Polycopié de cours

INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE

Socle Commun Deuxième Année Licence Physique

Université Ziane Achour – Djelfa

CHAPITRE III

FORMALISME DE HAMILTON

FORMALISME DE HAMILTON

I. ÉQUATIONS DE HAMILTON

Soit un système physique composé de N particules, leurs masses respectives sont notées m_α, leurs positions $\vec{r}_\alpha$ et leurs vitesses $\vec{v}_\alpha$ avec $\alpha = 1, \dots, N$.
Nous reprenons la notion de degrés de liberté introduite dans le chapitre précédent.
Les coordonnées généralisées sont notées $\{q_i\}$ et leurs dérivées par rapport au temps (vitesses généralisées) sont notées $\{\dot{q}_i\}$, avec $i = 1, \dots, d$.

Hamiltonien

La fonction de Hamilton ou Hamiltonien su système est donné par

$$\mathcal{H}(\{q_i\},\{p_i\},t) = \sum_{i=1}^{d} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

Tel que $\mathcal{L}(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t)$ est le Lagrangien du système (voir le chapitre précédent). Et

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

p_i est l'impulsion généralisée associée à la coordonnée généralisée q_i.
Dans le formalisme de Hamilton p_i est appelée « moment canoniquement conjugué » de la coordonnée généralisée q_i.

Remarque :

$\mathcal{H}(\{q_i\},\{p_i\},t)$ est une fonction des coordonnées généralisées $\{q_i\}$, de leurs moments conjugués $\{p_i\}$ et éventuellement du temps, c'est-à-dire que nous devons remplacer tous les $\{\dot{q}_i\}$ que nous trouvons parleurs expressions en fonction des $\{q_i\}$ et des $\{p_i\}$.

Equations canoniques de Hamilton

Calculons la différentielle de l'équation précédente

$$d\mathcal{H}(\{q_i\},\{p_i\},t) = \sum_{i=1}^{d} p_i . d\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{d} \dot{q}_i . dp_i - d\mathcal{L}$$

Avec

$$d\mathcal{L}(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i$$

L'équation de Lagrange donne

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \dot{p}_i$$

D'où

$$d\mathcal{H}(\{q_i\},\{p_i\},t) = \sum_{i=1}^{d} \dot{q}_i . dp_i - \sum_{i=1}^{d} \dot{p}_i . dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

D'autre part

$$d\mathcal{H}(\{q_i\},\{p_i\},t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} . dq_i + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} . dp_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt$$

Comme les variables $(\{q_i\},\{p_i\},t)$ sont considérées comme indépendantes. Il vient que :

$$\begin{cases} q_i^{\bullet} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ p_i^{\bullet} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases}$$

Que nous appellerons « équations canoniques de Hamilton ».

Les variables q_i et p_i sont dites «variables canoniquement conjuguées » ou simplement «variables conjuguées ».

Remarque :

Dans les équations de Lagrange nous avions d équations différentielles du deuxième ordre. Les équations de Hamilton donnent $2d$ équations différentielles du premier ordre qui sont souvent bien plus simples à résoudre.

D'après les différentielles précédentes on trouve aussi que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Exemple :

Masse glissant sans frottement sur un plan incliné.

Le Lagrangien du système à 01 degré de liberté

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m.v^2 - mgh$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m.x^{\bullet 2} + mg.\sin\alpha\,.x$$

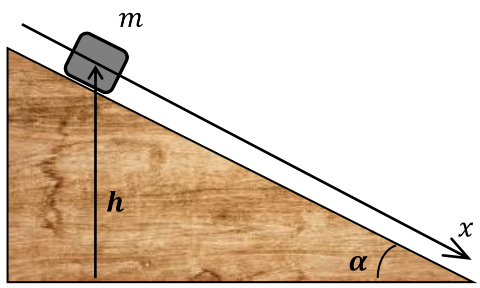

Figure 1.

Le moment conjugué p_x de la variable x .

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\bullet}} = m.x^{\bullet}$$

C'est la quantité de mouvement de la masse.

$$x^{\bullet} = p_x/m$$

D'où l'expression du Hamiltonien

$$\mathcal{H} = p_x.x^{\bullet} - \mathcal{L} = \frac{p_x^2}{m} - \left(\frac{1}{2}m.\frac{p_x^2}{m^2} + mg.\sin\alpha\,.x\right)$$

Donc

$$\mathcal{H}(x,p_x) = \frac{p_x^2}{2m} - mg.\sin\alpha\,.x$$

Les équations de Hamilton donnent

$$\begin{cases} q_i^{\bullet} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ p_i^{\bullet} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{\bullet} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} \\ p_x^{\bullet} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{\bullet} = p_x/m \\ p_x^{\bullet} = mg.\sin\alpha \end{cases}$$

Et leur résolution

$$p_x^{\bullet} = mg.\sin\alpha \qquad \Rightarrow \qquad p_x(t) = mg.\sin\alpha\,.t + p_x(0)$$

$$x^{\bullet} = \frac{p_x}{m} = \frac{mg.\sin\alpha\,.t + p_x(0)}{m} \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = \frac{1}{2}\,g.\sin\alpha\,.t^2 + \frac{p_x(0)}{m}t + x(0)$$

Nous pouvons aussi écrire

$$x^{\bullet\bullet} = \frac{p_x^{\bullet}}{m} = g.\sin\alpha$$

Qui est l'équation différentielle donnée par l'équation de Lagrange.

Lien avec l'énergie mécanique

Dans le cas de contraintes ne dépendants pas explicitement du temps (toutes les liaisons sont holonomes scléronomes), alors, les positions ne dépendent pas explicitement du temps et l'énergie cinétique est une forme quadratique des vitesses généralisées, aussi l'énergie potentielle est fonction uniquement des coordonnées généralisées.

$$\text{Contraintes indépendantes du temps} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_\alpha(\{q_i\}) \ \text{ et } \ U(\{q_i\})$$

Dans ce cas le Hamiltonien

$$\mathcal{H}(\{q_i\},\{p_i\}) = \sum_{i=1}^{d} p_i\, q_i^{\bullet} - \mathcal{L} = T + U$$

Représente l'énergie mécanique totale du système, il est constant si le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps.

Propriétés du Hamiltonien

Le Hamiltonien $\mathcal{H}(\{q_i\},\{p_i\},t)$ est une fonction des variables conjuguées $\{q_i\},\{p_i\}$ et du temps t. Sa différentielle totale

$$d\mathcal{H}(\{q_i\},\{p_i\},t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}.dq_i + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}.dp_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}dt$$

Et sa dérivée totale par rapport au temps

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}.q_i^{\bullet} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}.p_i^{\bullet} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

En utilisant les équations canoniques

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{i=1}^{d} (-p_i^{\bullet}).q_i^{\bullet} + \sum_{i=1}^{d} q_i^{\bullet}.p_i^{\bullet} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

Donc

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

Si le Hamiltonien (ou le Lagrangien) ne dépend pas explicitement du temps, alors il est conservé.

Le Hamiltonien possède les mêmes propriétés mathématiques que la Lagrangien dont il est dérivé, c'est-à-dire

- Invariance d'échelle : Les équations de Hamilton sont invariantes par rapport à la multiplication du Hamiltonien par un scalaire avec ou sans unité.
- Invariance d'origine : Les équations de Hamilton sont invariantes lorsqu'on ajoute une constante quelconque au Hamiltonien.
- Additivité : Si deux sous-systèmes indépendants sont représenté par les Hamiltoniens $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ alors le système total est représenté par le Hamiltonien $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$.

Exemple :

Dans l'exemple précédent, nous remarquons que la position $\vec{r}(x) = x.\vec{e}_x$ et l'énergie potentielle $U(x) = -mg.\sin\alpha\,.x$ ne dépendent que de la variable (coordonnée généralisée) x. Alors le Hamiltonien est égal à l'énergie mécanique totale

$$\mathcal{H}(x,p_x) = \frac{p_x^2}{2m} - mg.\sin\alpha\,.x = T + U = E_m$$

En plus le Hamiltonien (et le Lagrangien) ne dépend pas explicitement du temps, alors cette énergie mécanique totale est conservée.

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(x,p_x) = E_m = \text{Constante}$$

II. CROCHETS DE POISSON

Définition

Soit un système physique à d degrés de liberté, décrit par les variables canoniques conjuguées $\{q_i\}$ et $\{p_i\}$. Considérons deux fonctions $f(\{q_i\},\{p_i\},t)$ et $g(\{q_i\},\{p_i\},t)$ des variables $\{q_i\}$, $\{p_i\}$ et du temps.

Le crochet de Poisson des deux fonctions f et g (dans cet ordre) par rapport aux variables canoniques $\{q_i\}$ et $\{p_i\}$ est donné par

$$\{f,g\}_{q,p} = \{f,g\} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}$$

Propriétés des crochets de Poisson

1. $\{f,f\} = 0$
2. $\{f,g\} = -\{g,f\}$
3. $\{\lambda f, \mu g\} = \lambda\mu.\{f,g\}$ λ et μ sont des constantes.
4. $\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$
5. $\{f,\{g,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\}\} = 0$

f, g et h sont des fonctions des $\{q_i\}$, $\{p_i\}$ et t.

Dérivée totale par rapport au temps d'une fonction

Soit $f(\{q_i\},\{p_i\},t)$ une fonction scalaire des variables $\{q_i\}$, $\{p_i\}$ et du temps. Sa dérivée totale est données par

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial q_i}.\dot{q_i} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial p_i}.\dot{p_i} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

En utilisant les équations canoniques

$$\dot{q_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \qquad \text{et} \qquad \dot{p_i} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$$

Nous trouvons

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Autrement dit

$$\frac{df}{dt} = \{f,\mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Equations de Hamilton

Calculons

$$\{q_i,\mathcal{H}\}=\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial q_i}{\partial q_j}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}-\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial q_i}{\partial p_j}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}$$

Comme les $\{q_i\}$, $\{p_i\}$ sont indépendantes, et les $\{q_i\}$ sont indépendantes entres elles. Alors

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j}=\delta_{ij}\qquad \text{et} \qquad \frac{\partial q_i}{\partial p_j}=0$$

D'où

$$\{q_i,\mathcal{H}\}=\sum_{j=1}^{d}\delta_{ij}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$$

Calculons

$$\{p_i,\mathcal{H}\}=\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial p_i}{\partial q_j}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}-\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial p_i}{\partial p_j}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}$$

Comme les $\{q_i\}$, $\{p_i\}$ sont indépendantes, et les $\{p_i\}$ sont indépendantes entres elles. Alors

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_j}=\delta_{ij}\qquad \text{et} \qquad \frac{\partial p_i}{\partial q_j}=0$$

D'où

$$\{p_i,\mathcal{H}\}=-\sum_{j=1}^{d}\delta_{ij}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$$

D'où les équations de Hamilton

$\dot{q_i}=\{q_i,\mathcal{H}\}=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$	$\dot{p_i}=\{p_i,\mathcal{H}\}=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$

Relations de conjugaison canonique

Nous appelons relations de conjugaison canonique, les relations suivantes

$\{q_i,q_j\}=0$	$\{p_i,p_j\}=0$	$\{p_i,p_j\}=0$

Démonstration

$$\{q_i,q_j\}=\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_j}{\partial p_k}-\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial q_j}{\partial q_k}\quad \text{comme}\quad \frac{\partial q_j}{\partial p_k}=\frac{\partial q_i}{\partial p_k}=0\quad \text{donc}\quad \{q_i,q_j\}=0$$

$$\{p_i,p_j\}=\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k}-\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial q_k}\quad \text{comme}\quad \frac{\partial p_i}{\partial q_k}=\frac{\partial p_j}{\partial q_k}=0\quad \text{donc}\quad \{p_i,p_j\}=0$$

$$\{q_i,p_j\}=\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k}-\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial q_k}$$

Comme

$$\frac{\partial p_j}{\partial q_k}=\frac{\partial q_i}{\partial p_k}=0\quad ;\quad \frac{\partial q_i}{\partial q_k}=\delta_{ik}\quad ;\quad \frac{\partial p_j}{\partial p_k}=\delta_{jk}$$

Alors

$$\{q_i,p_j\}=\sum_{k=1}^{d}\delta_{ik}\delta_{jk}=\delta_{ij}$$

III. TRANSFORMATIONS CANONIQUES

Définition d'une transformation canonique

Prenons un système donné dont les coordonnées généralisées sont notés $\{q_i\} \quad i = 1, \dots, d$.

Le Lagrangien du système $\mathcal{L}(\{q_i\}, \{q_i^\bullet\}, t)$ est fonction des coordonnées généralisées $\{q_i\}$ des vitesses généralisées $\{q_i^\bullet\}$ et du temps.

Le Hamiltonien $\mathcal{H}(\{q_i\}, \{p_i\}, t)$ est fonction des variables conjuguées $\{q_i\}, \{p_i\}$ et du temps.

Considérons le changement de variable suivant :

$$q_i \to Q_i(\{q_j\}, t) \qquad \text{avec} \qquad i, j = 1, \dots, d$$

Ce changement de variable est une transformation ponctuelle dans l'espace des configurations.

Le Lagrangien étant invariant par rapport à cette transformation

$$\mathcal{L}(\{q_i\}, \{q_i^\bullet\}, t) = L(\{Q_i\}, \{Q_i^\bullet\}, t) = T - U$$

Tel que : $L(\{Q_i\}, \{Q_i^\bullet\}, t)$ est le Lagrangien en fonction des nouvelles coordonnées. Et

$$Q_i^\bullet(\{q_j\}, \{q_j^\bullet\}, t) = \frac{dQ_i(\{q_j\}, t)}{dt}$$

Sont les vitesses généralisées associées aux coordonnées généralisée Q_i.

Nous pouvons alors calculer les moments conjugués aux coordonnées Q_i par

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial Q_i^\bullet}$$

Et le Hamiltonien pour les nouvelles coordonnées est donné par

$$H(\{Q_i\}, \{P_i\}, t) = \sum_{i=1}^{d} P_i Q_i^\bullet - L(\{Q_i\}, \{Q_i^\bullet\}, t)$$

En généralisant

La transformation des variables conjuguées $\{q_i\}$ et $\{p_i\}$.

$$\begin{cases} q_i \to Q_i(\{q_j\}, \{p_j\}, t) \\ p_i \to P_i(\{q_j\}, \{p_j\}, t) \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad i, j = 1, \dots, d$$

Implique une transformation du Hamiltonien

$$\mathcal{H}(\{q_i\}, \{p_i\}, t) \to H(\{Q_i\}, \{P_i\}, t)$$

Le Hamiltonien transformé n'est pas forcément égal au premier

La transformation est dite canonique si les variables (Q_i, P_i) sont conjuguées, c'est-à-dire si ces variables vérifient les équations de Hamilton (pour le nouveau Hamiltonien).

$$\text{transformation canonique} \quad \Leftrightarrow \quad \left(Q_i^\bullet = \frac{\partial H}{\partial P_i} \quad \text{et} \quad P_i^\bullet = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} \right)$$

Exemple :

L'oscillateur Harmonique à une dimension

Energie potentielle : $U(q) = \frac{1}{2}k.q^2 = \frac{1}{2}m\omega^2.q^2$

Energie cinétique : $T(q^\bullet) = \frac{1}{2}m.q^{\bullet 2}$

$$\mathcal{L}(q,q^\bullet) = T - U = \frac{1}{2}m.q^{\bullet 2} - \frac{1}{2}m\omega^2.q^2$$

Hamiltonien.

$$\mathcal{H}(q,p,t) = pq^\bullet - \mathcal{L} \qquad \text{avec} \qquad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\bullet} = mq^\bullet \qquad \text{et} \qquad q^\bullet = \frac{p}{m}$$

Donc

$$\mathcal{H}(q,p,t) = \frac{p^2}{m} - \left(\frac{1}{2}\frac{p^2}{m} - \frac{1}{2}m\omega^2.q^2\right) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}m\omega^2.q^2}$$

Transformation.

$$Q = C.(p + i.m\omega.q) \quad \text{et} \quad P = C.(p - i.m\omega.q)$$

Pour que la transformation soit canonique, elle doit vérifier : $\{q,p\}_{Q,P} = \{Q,P\}_{q,p} = 1$

$$\{Q,P\}_{q,p} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}$$

En remplaçant

$$\{Q,P\}_{q,p} = C.(i.m\omega).C - C.C.(-i.m\omega) = 2C^2.(i.m\omega) = 1$$

Donc

$$C^2 = 1/i.2m\omega$$

Cherchons le nouvel Hamiltonien

$$\begin{cases} Q = C.(p + i.m\omega.q) \\ P = C.(p - i.m\omega.q) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} q = (Q - P)/i.2m\omega.C \\ \quad p = (Q + P)/2C \end{cases}$$

En remplaçant q et p.

$$H(Q,P) = \frac{1}{2m}\frac{(Q+P)^2}{4C^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\frac{(Q-P)^2}{(i.2m\omega)^2C^2} = = \frac{i.2m\omega}{2m}\frac{(Q+P)^2}{4} + \frac{1}{2}m\omega^2\frac{(Q-P)^2}{i.2m\omega}$$

D'où

$$H(Q,P) = \frac{i\omega}{4}((Q+P)^2 - (Q-P)^2)$$

Et

$$H(Q,P) = i\omega QP$$

Les équations de Hamilton.

$$\begin{cases} Q^{\bullet} = \dfrac{\partial H}{\partial P} = i\omega Q \\ P^{\bullet} = -\dfrac{\partial H}{\partial Q} = -i\omega P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q = Q_0 . e^{i\omega t} \\ P = P_0 . e^{-i\omega t} \end{cases}$$

Q_0 et P_0 sont des constantes d'intégrations déterminée à partir des conditions initiales.
Les Solution en q et p

$$q = \left(Q_0 . e^{i\omega t} - P_0 . e^{-i\omega t}\right)/i.2m\omega . C \qquad \text{et} \qquad p = \left(Q_0 . e^{i\omega t} + P_0 . e^{-i\omega t}\right)/2C$$

Pour les conditions initiales $(q(0) = q_0 \ ; \ p(0) = 0)$ on trouve

$$Q_0 = -P_0 = q_0 . (i.m\omega . C)$$

Ce qui donne

$$q = q_0 . \cos(\omega t) \qquad \text{et} \qquad p = -q_0 . m\omega . \sin(\omega t)$$