SOLUTIONS DE LA SÉRIE DE TD N° 01
FORMALISME DE LAGRANGE – INTRODUCTION

EXERCICE 01 :

N est le nombre de points matériels ou de solides. k est le nombre de liaisons (contraintes).

Le nombre de degrés de liberté (ddl) pour :

1. Particule (point matériel) libre dans l'espace.

$$N = 1 \quad ; \quad k = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 3.1 - 0 = 3$$

Coordonnées généralisées : (x, y, z)

2. Particule libre dans le plan.

$$N = 1 \quad ; \quad k = 1 \quad \Rightarrow \quad d = 3.1 - 1 = 2$$

Coordonnées généralisées : (x, y)

3. Particule libre sur une trajectoire rectiligne.

$$N = 1 \quad ; \quad k = 2 \quad \Rightarrow \quad d = 3.1 - 2 = 1$$

Coordonnées généralisées : (x)

4. Particule libre sur une trajectoire circulaire.

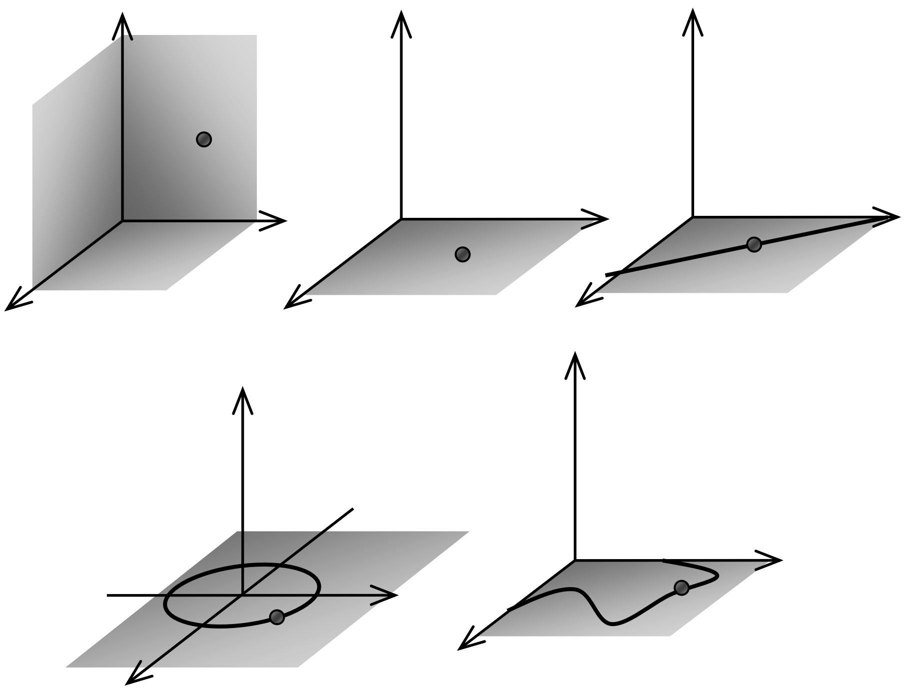
$$N = 1 \quad ; \quad k = 2 \quad \Rightarrow \quad d = 3.1 - 2 = 1$$

Coordonnées généralisées : (θ)

5. Particule libre sur une courbe plane $f(x, y) = 0$.

$$N = 1 \quad ; \quad k = 2 \quad \Rightarrow \quad d = 3.1 - 2 = 1$$

Coordonnées généralisées : (x)



6. Ensemble de deux particules liés par une tige, libre dans l'espace.

$$N = 2 \quad ; \quad k = 1 \quad \Rightarrow \quad d = 3.2 - 1 = 5$$

Coordonnées généralisées : (x, y, z) translation du centre de masse (α, β) rotation autour du cdm.

7. Ensemble de deux particules liés par une tige, libre dans le plan.

$$N = 2 \quad ; \quad k = 3 \quad \Rightarrow \quad d = 3.2 - 3 = 3$$

Coordonnées généralisées : (x, y) translation du centre de masse (α) rotation autour du cdm.

8. Particule se déplaçant librement sur la surface d'une sphère.

$$N = 1 \quad ; \quad k = 1 \quad \Rightarrow \quad d = 3.1 - 1 = 2$$

Coordonnées généralisées : (θ, φ) coordonnées sphériques.

9. Particule se déplaçant librement sur la surface d'un cylindre.

$$N = 2 \quad ; \quad k = 1 \quad \Rightarrow \quad d = 3.2 - 1 = 5$$

Coordonnées généralisées : (φ, z) coordonnées cylindriques.

10. Solide indéformable se déplaçant librement dans l'espace.

$$N = 1 \quad ; \quad k = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 6.1 - 0 = 6$$

Coordonnées généralisées : (x, y, z) centre de masse (α, β, γ) rotation autour du cdm.

11. Solide indéformable dont le centre de masse de déplace librement dans le plan.

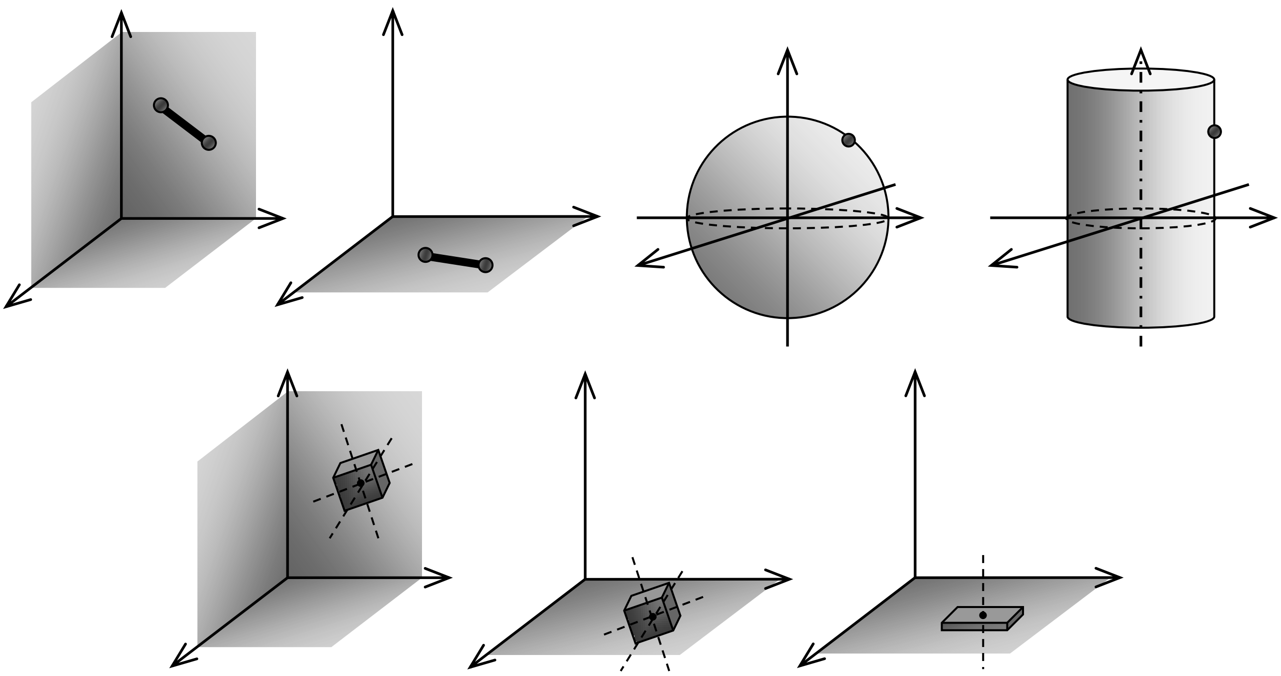
$$N = 1 \quad ; \quad k = 1 \quad \Rightarrow \quad d = 6.1 - 1 = 5$$

Coordonnées généralisées : (x, y) centre de masse (α, β, γ) rotation autour du cdm.

12. Solide indéformable se déplaçant librement dans le plan.

$$N = 1 \quad ; \quad k = 3 \quad \Rightarrow \quad d = 6.1 - 3 = 3$$

Coordonnées généralisées : (x, y, z) centre de masse (γ) rotation autour du cdm.



EXERCICE 02 :
Energie cinétique T, énergie potentielle U et la fonction de Lagrange $\mathcal{L}$, pour les systèmes :

Figure 01 : ***pendule élastique***

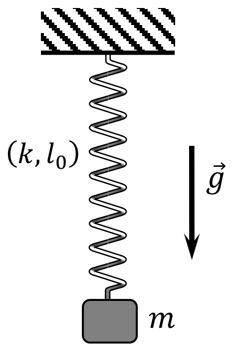
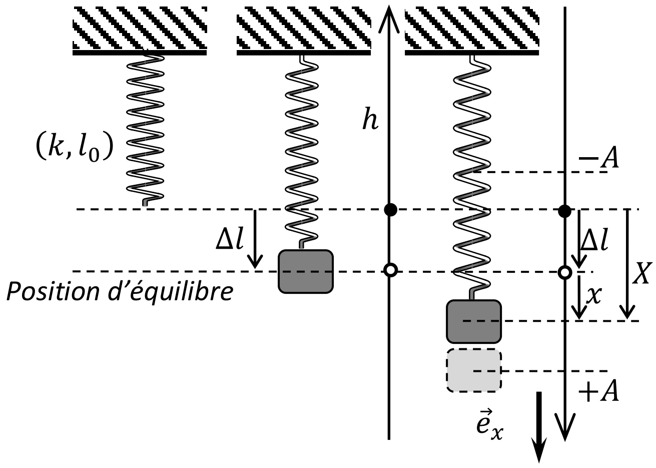


Figure 01.



Nombre de degrés de liberté : $d = 1$

En prenant la coordonnée généralisée X l'élongation totale du ressort. L'axe (Ox) étant vertical et dirigé vers le bas le point d'origine est donné par l'extrémité inférieure du ressort quand il est vide (point en noir sur la figure).

$$U = mgh + \frac{1}{2}kX^2$$

Dans l'énergie potentielle gravitationnelle **l'axe des hauteurs** est toujours **vertical** et orienté **vers le haut**.

Le choix de l'origine des hauteurs (origine de l'énergie potentielle gravitationnelle) est **arbitraire**. Donc on peut choisir n'importe quel point comme référence à la seule condition que ce **point** soit **fixe**.

En choisissant le point d'origine des hauteur au même point que l'origine de l'axe (Ox).

$$h = -X$$

Les deux axes étant d'orientations opposées.

$$U = -mgX + \frac{1}{2}kX^2$$

D'autre part, l'énergie cinétique est donnée par :

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m.X^{\bullet 2}$$

D'où le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m.X^{\bullet 2} + mgX - \frac{1}{2}kX^2}$$

La condition d'équilibre est donnée par

$$\boxed{\left.\frac{\partial U(X)}{\partial X}\right|_{X=X_{\text{équilibre}}} = 0}$$

Donc

$$-mg + k.X_{\text{équilibre}} = 0$$

En notant, l'élongation (constante) du ressort à l'équilibre

$$X_{\text{équilibre}} = \Delta l$$

Alors, la condition d'équilibre s'écrit :

$$\boxed{k\Delta l - mg = 0}$$

En prenant la coordonnée généralisée x l'élongation (verticale) du ressort par rapport à la position d'équilibre. L'axe (Ox) étant vertical et dirigé vers le bas le point d'origine est donné par la position d'équilibre de la masse m (point en blanc sur la figure).

$$X = \Delta l + x$$

Et

$$U = -mg(\Delta l + x) + \frac{1}{2}k(\Delta l + x)^2$$

$$U = -mg\Delta l - mgx + \frac{1}{2}k(\Delta l^2 + x^2 + 2\Delta l.x) = (k\Delta l - mg).x + \frac{1}{2}k\Delta l^2 - mg\Delta l + \frac{1}{2}kx^2$$

Comme la condition d'équilibre donne : $k\Delta l - mg = 0$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\Delta l^2 - mg\Delta l$$

Le **terme constant** dans l'énergie potentielle n'influe pas sur les équations de Lagrange et **peut être omis**.

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

L'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m.(\Delta l + x)^{\bullet 2}$$

Donc

$$T = \frac{1}{2}m.x^{\bullet 2}$$

Et le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m.x^{\bullet 2} - \frac{1}{2}kx^2}$$

En conclusion :

Dans le cas où nous avons une élongation Δl à l'équilibre due au poids mg de la masse m.

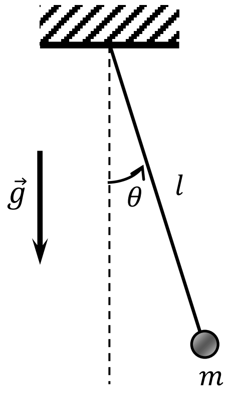
L'énergie potentielle est la somme des énergies élastique et gravitationnelle quand on utilise **l'élongation totale du ressort X**.

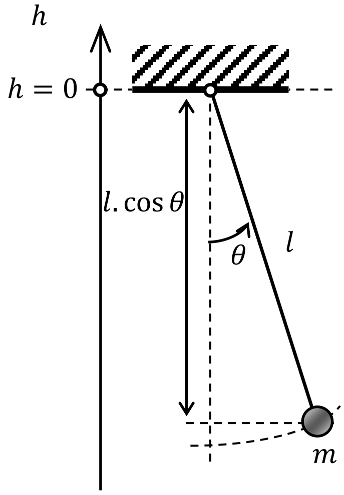
$$U = -mgX + \frac{1}{2}kX^2$$

On peut aussi l'écrire en utilisant uniquement l'énergie potentielle élastique quand on utilise **l'élongation par rapport à l'équilibre x**.

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Figure 02 : ***pendule simple***





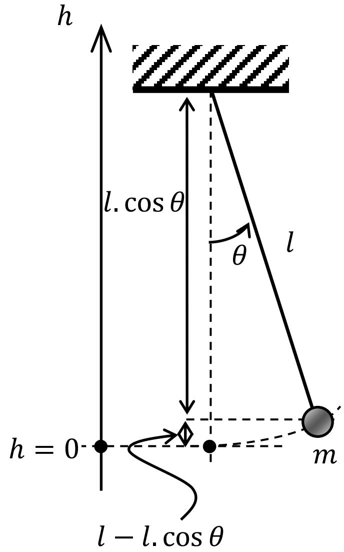


Figure 02.

Nombre de degrés de liberté : $d = 1$

Coordonnée généralisée : θ

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

La vitesse en coordonnées polaires étant

$$\vec{v} = r^\bullet \vec{e}_r + r\theta^\bullet \vec{e}_\theta \qquad \text{avec} \qquad r = l = \text{constante}$$

Donc

$$T = \frac{1}{2}m(l\theta^\bullet)^2 = \frac{1}{2}ml^2\theta^{\bullet 2}$$

Le moment d'inertie du point matériel étant $I = m.l^2$ nous aurions tout aussi bien écrire

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m.l^2\theta^{\bullet 2}$$

Dans le cas de la **rotation** d'un **point matériel**, on peut écrire

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \textbf{ou} \qquad T = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Mais dans le cas d'un **solide indéformable**

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Energie potentielle

$$U = mgh$$

On rappelle que l'axe des hauteurs est toujours vertical et dirigé vers le haut et que le choix de l'origine des hauteurs (point fixe) est arbitraire.

En choisissant l'origine des hauteurs le point de suspension du pendule (point en blanc).

$$h = -l.\cos\theta$$

Et

$$U = mgh = -mgl.\cos\theta$$

En choisissant l'origine des hauteurs la position d'équilibre de la masse (point en noir).

$$h = l - l.\cos\theta$$

Et

$$U = mgh = mgl - mgl.\cos\theta$$

La différence mgl est constante et n'influe pas sur les équations de Lagrange.

Dans l'**approximation des petits angles** :

Développement limité au deuxième ordre au voisinage de la position d'équilibre $\boldsymbol{\theta_0 = 0}$

$$\sin\theta \approx \theta$$

$$\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$$

D'où le Lagrangien (en omettant les constantes).

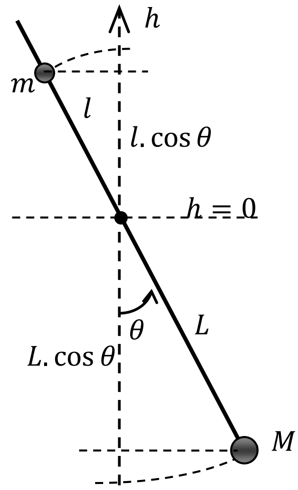
$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}ml^2\theta^{\bullet 2} - \frac{1}{2}mgl.\theta^2}$$

Le Lagrangien d'un **oscillateur harmonique** à un degré de liberté (de coordonnée généralisée q) est de la forme

$$\mathcal{L}(q, q^{\bullet}) = \frac{1}{2}A.q^{\bullet 2} - \frac{1}{2}B.q^2$$

Avec A et B sont des **constantes positives**.

Figure 03 : ***Métronome***



Nombre de degrés de liberté : 01

Coordonnée généralisée : θ

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m(l.\theta^{\bullet})^2 + \frac{1}{2}M(L.\theta^{\bullet})^2$$

Donc

$$T = \frac{1}{2}(ml^2 + ML^2)\theta^{\bullet 2}$$

Energie potentielle

$$U = mgh + MgH = mg(+l.\cos\theta) + Mg(-L.\cos\theta)$$

Avec

$$h = +l.\cos\theta \quad ; \quad H = -L.\cos\theta$$

Nous avons choisi l'origine de la hauteur au point de fixation (axe de rotation) du pendule.

D'où

$$U = (ml - ML)g.\cos\theta$$

La position d'équilibre est donnée par

$$\left.\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_{\text{équilibre}}} = 0$$

D'où

$$-(ml - ML)g.\sin\theta_{\text{équ}} = 0$$

Et

$$\theta_{\text{équ}} = 0 \quad \text{ou} \quad \theta_{\text{équ}} = \pi$$

Le Lagrangien

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}(ml^2 + ML^2)\theta^{\bullet 2} + (ML - ml)g.\cos\theta$$

En utilisant l'approximation des petits angles autour de la position d'équilibre $\left(\theta_{\text{équ}} = 0\right)$ et en omettant la constante $g(ML - ml)$.

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}(ml^2 + ML^2)\theta^{\bullet 2} - \frac{1}{2}g(ML - ml).\theta^2}$$

Prenant la forme d'un Lagrangien d'un oscillateur harmonique pour

$$g(ML - ml) > 0$$

Ou

$$ML > ml$$

Figure 04 :

Nombre de degrés de liberté : 01

Coordonnée généralisée : θ

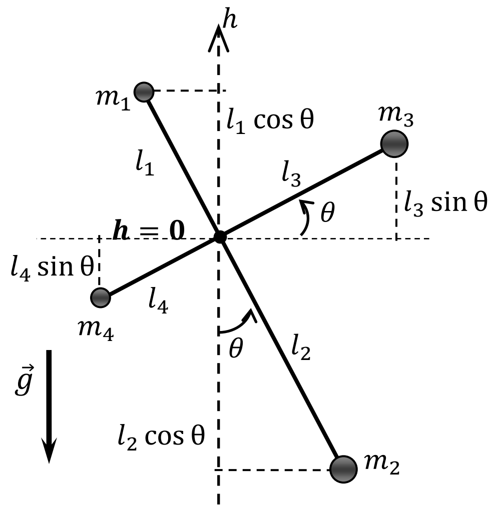


Figure 04.

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \frac{1}{2}m_4v_4^2$$

Donc

$$T = \frac{1}{2}m_1(l_1\theta^\bullet)^2 + \frac{1}{2}m_2(l_2\theta^\bullet)^2 + \frac{1}{2}m_3(l_3\theta^\bullet)^2 + \frac{1}{2}m_4(l_4\theta^\bullet)^2$$

Et

$$T = \frac{1}{2}(m_1l_1^2 + m_2l_2^2 + m_3l_3^2 + m_4l_4^2)\theta^{\bullet 2}$$

Energie potentielle

$$U = m_1gh_1 + m_2gh_2 + m_3gh_3 + m_4gh_4$$

Avec

$$h_1 = +l_1.\cos\theta \quad ; \quad h_2 = -l_2.\cos\theta \quad ; \quad h_3 = +l_3.\sin\theta \quad ; \quad h_4 = -l_4.\sin\theta$$

Nous avons choisi l'origine de la hauteur au point de fixation (axe de rotation) du pendule.

$$U = (m_1l_1 - m_2l_2)g.\cos\theta + (m_3l_3 - m_4l_4)g.\sin\theta$$

La position d'équilibre est donnée par

$$\left.\frac{\partial U(\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_{\text{équilibre}}} = 0$$

D'où

$$-(m_1l_1 - m_2l_2)g.\sin\theta_{\text{équ}} + (m_3l_3 - m_4l_4)g.\cos\theta_{\text{équ}} = 0$$

Et

$$\tan\theta_{\text{équ}} = \frac{m_3l_3 - m_4l_4}{m_1l_1 - m_2l_2}$$

Le Lagrangien

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1l_1^2 + m_2l_2^2 + m_3l_3^2 + m_4l_4^2)\theta^{\bullet 2} - (m_1l_1 - m_2l_2)g.\cos\theta - (m_3l_3 - m_4l_4)g.\sin\theta}$$

Figure 05 :

Nombre de degrés de liberté : 01

Coordonnée généralisée : θ

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l.\theta^{\bullet})^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}ml^2\theta^{\bullet 2}$$

Puisque l'élongation du ressort est nulle quand le pendule est à la verticale, alors, la position d'équilibre est donnée par $\theta_{\text{équ}} = 0$ (position verticale du pendule).

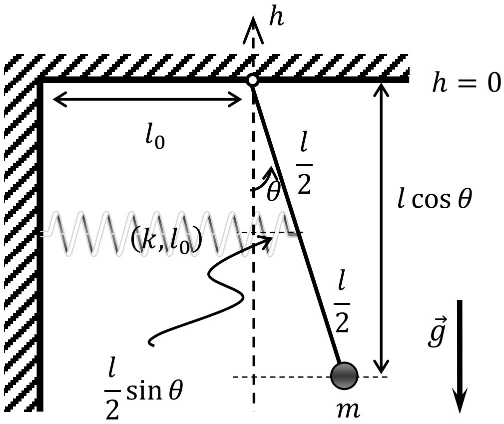


Figure 05.

Energie potentielle

$$U = mgh + \frac{1}{2}kx^2$$

En choisissant l'origine de la hauteur au point de fixation (axe de rotation) du pendule.

$$h = -l.\cos\theta \quad \text{et} \quad x = \frac{l}{2}\sin\theta$$

Donc

$$U = -mgl.\cos\theta + \frac{1}{8}kl^2.\sin^2\theta$$

Et pour des petits angles autour de la position d'équilibre $(\theta_{\text{équ}} = 0)$

$$\sin\theta \approx \theta \quad ; \quad \cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$$

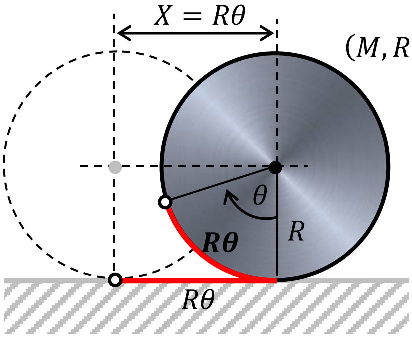
Donc

$$U = \frac{1}{2}\left(mgl + \frac{1}{4}kl^2\right)\theta^2 - mgl$$

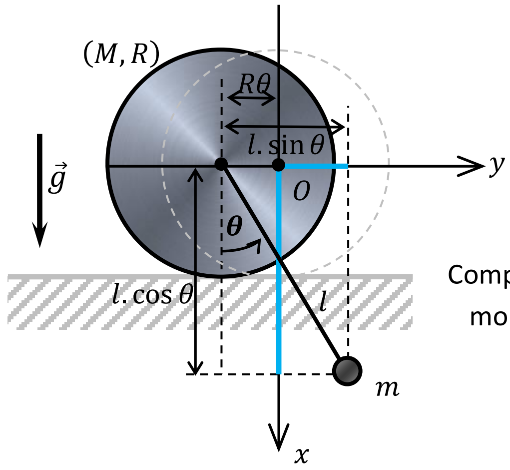
Le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}ml^2\theta^{\bullet 2} - \frac{1}{2}\left(mgl + \frac{1}{4}kl^2\right)\theta^2 + mgl}$$

Figure 06 :



Roulement sans glissement



Composition des mouvements

Condition de **roulement sans glissement** : La distance parcourue sur le plan de contact (translation du centre de masse) est égale à la longueur de l'arc de cercle sur le cylindre.

$$X = R\theta$$

Nombre de degrés de liberté : 01 (tige solidaire au cylindre)

Coordonnée généralisée : θ

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Avec I le moment d'inertie du cylindre plein

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Condition de roulement sans glissement

$$y = -R\theta \quad \Rightarrow \quad V = y^{\bullet} = -R\theta^{\bullet}$$

Les vitesses des différents corps ou points matériels doivent être calculés par rapport au **même référentiel**. Ce référentiel doit être un **référentiel galiléen** (le référentiel terrestre en est une bonne approximation pour les expériences de courtes durées).

La vitesse du point matériel par rapport au référentiel fixe du sol (référentiel terrestre) est obtenue en utilisant la loi de compositions des vitesses

$$\begin{cases} x_m = l.\cos\theta \\ y_m = l.\sin\theta - R\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_m^{\bullet} = -l\theta^{\bullet}.\sin\theta \\ y_m^{\bullet} = l\theta^{\bullet}.\cos\theta - R\theta^{\bullet} \end{cases}$$

Et le carré du module de la vitesse

$$v^2 = {x_m^{\bullet}}^2 + {y_m^{\bullet}}^2 = (l^2 + R^2 - 2lR.\cos\theta).{\theta^{\bullet}}^2$$

Et pour de très petits angles autour de la position d'équilibre $\left(\theta_{\text{équ}} = 0\right)$

$$\cos\theta \approx 1$$

Cette approximation (grossière) au premier ordre est faite exprès **pour obtenir le lagrangien d'un oscillateur harmonique**.

Dans ce cas

$$v^2 = (l^2 + R^2 - 2lR).\theta^{\bullet 2} = (l - R)^2.\theta^{\bullet 2}$$

Et l'énergie cinétique devient

$$T = \frac{1}{2}MR^2\theta^{\bullet 2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\theta^{\bullet 2} + \frac{1}{2}m(l-R)^2.\theta^{\bullet 2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2 + m(l-R)^2\right)\theta^{\bullet 2}$$

Energie potentielle

$$U = mgh + MgH = -mg(x_m)$$

Donc

$$U = -mgl.\cos\theta$$

En choisissant l'origine de la hauteur au point de fixation du pendule (centre de masse du cylindre).

Et pour des petits angles autour de la position d'équilibre $(\theta_0 = 0)$

$$\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$$

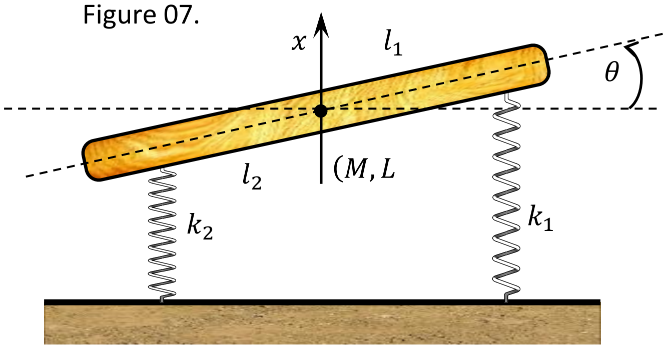
Donc

$$U = \frac{1}{2}mgl.\theta^2 - mgl$$

Le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2 + m(l-R)^2\right)\theta^{\bullet 2} - \frac{1}{2}mgl.\theta^2 + mgl}$$

Figure 07 :



Nombre de degrés de liberté : 02

Coordonnée généralisée : (x, θ)

x : Translation du centre de masse de la poutre par rapport à l'équilibre.
θ : Rotation de la poutre autour de son centre de masse par rapport à l'horizontale.

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$T = \frac{1}{2}Mx^{\bullet 2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ML^2\right)\theta^{\bullet 2}$$

Energie potentielle

En utilisant les **élongations des ressorts x_1 et x_2 par rapport à leurs positions d'équilibres** respectives, nous avons

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2$$

Le terme gravitationnel est éliminé avec le terme élastique comprenant les élongations à l'équilibre.

Comme

$$\begin{cases} x_1 = x + l_1\theta \\ x_2 = x - l_2\theta \end{cases}$$

Nous obtenons

$$U = \frac{1}{2}k_1(x + l_1\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(x - l_2\theta)^2$$

Et le Lagrangien

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$\boxed{\mathcal{L}(x, \theta, x^\bullet, \theta^\bullet) = \frac{1}{2}Mx^{\bullet 2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ML^2\right)\theta^{\bullet 2} - \frac{1}{2}k_1(x + l_1\theta)^2 - \frac{1}{2}k_2(x - l_2\theta)^2}$$