RÉSUMÉ DU COURS

DEGRÉS DE LIBERTÉ

C'est le nombre d de paramètres indépendants permettant de décrire la position d'un corps solide ou d'un ensemble de corps solides dans l'espace.

Ensemble de N points matériels	$d = 3N - k$
Ensemble de N solides indéformables	$d = 6N - k$

k est le nombre de liaisons (contraintes).

COORDONNÉES GÉNÉRALISÉES

On appelle coordonnées généralisées tout ensemble de d variables indépendantes, notées $q_1, q_2, \dots, q_d$, permettant d'exprimer les positions des N corps solides constituant le système. La nature et la dimension de ces coordonnées est indifférente.
Les vitesses généralisées $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_3$ sont les dérivées par rapport au temps des coordonnées généralisées.

LAGRANGIEN

$$\mathcal{L} = T - U$$

T : Energie cinétique		U : Energie potentielle	
Energie cinétique de translation	$T_{\text{translation}} = \frac{1}{2} m.v^2$	Energie potentielle gravitationnelle	$U_{\text{gravitationnelle}} = mgh$
Energie cinétique de rotation	$T_{\text{rotation}} = \frac{1}{2} I.\omega^2$	Energie potentielle élastique	$U_{\text{élastique}} = \frac{1}{2} k.x^2$

ÉQUATIONS D'EULER-LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

FONCTION DE DISSIPATION (cas de frottements visqueux) :

Dans le cas d'un système subissant une force de frottement visqueux de la forme $\vec{F} = -\alpha.\vec{v}$, les équations d'Euler-Lagrange et la fonction de dissipation $\mathcal{D}$ s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} \qquad \mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha.v^2$$

SYSTÈME FORCÉ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} + F_{q_i}^{\text{NC}} \qquad F_{q_i}^{\text{NC}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{\text{ncv}} \bullet \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}$$

$F_{q_i}^{\text{NC}}$ est la force généralisée non conservatives *autres que le frottement visqueux* conjuguée à la coordonnée q_i.

SÉRIE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 02
FORMALISME DE LAGRANGE

EXERCICE 01 : *La machine d'Atwood*

La machine d'Atwood (figure 01.) est constituée d'une poulie ayant la forme d'un disque de masse M et de rayon R, d'un fil inextensible de masse négligeable passant par la gorge de la poulie et de deux masses m_1 et m_2 qui pendent verticalement aux extrémités du fil.

1. Ecrire le Lagrangien du système et en déduire l'équation différentielle du mouvement.
2. Dans le cas où le système est initialement au repos, donner la solution de cette équation différentielle (équation horaire du mouvement des deux masses et de la poulie).

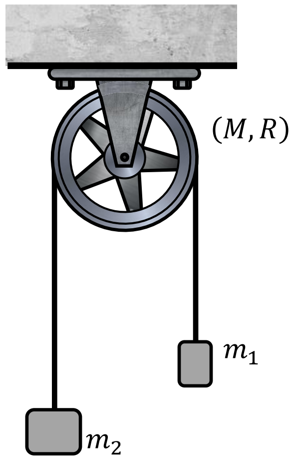


Figure 01.

EXERCICE 02 : *Pendule élastique*

La figure 02. montre un pendule élastique formé par une masse ponctuelle m qui pend verticalement au bout d'un ressort de constante de raideur k.

1. Ecrire la condition d'équilibre du système masse-ressort.
2. Ecrire le Lagrangien du système masse-ressort.
3. Trouver, à partir des équations de Lagrange, l'équation différentielle du mouvement de la masse m dans le cas des oscillations libres (on néglige les frottements).

Conditions initiales : La masse m est lachée sans vitesse initiale à partir d'une position $x = d$ par rapport à sa position d'équilibre.

4. Ecrire l'équation horaire du mouvement de la masse m.

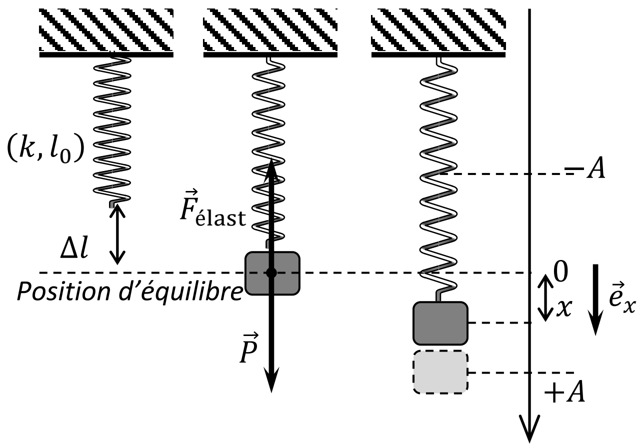
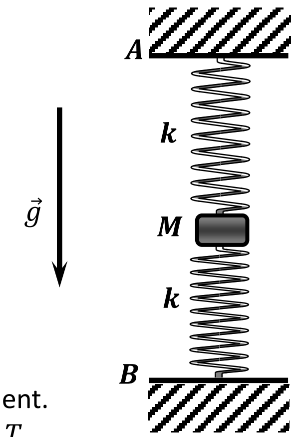


Figure 02.

EXERCICE 03 :

Entre deux points A et B, sont tendus deux ressorts identiques, ayant chacun une longueur à vide l_0, et une constante de raideur k. On place entre les deux ressorts un point matériel M de masse m astreint à se déplacer suivant l'axe vertical. Le système étant contenu dans le plan vertical, comme le montre la figure ci-contre, et la distance AB est notée $AB = l =$ constante.



1. En choisissant la coordonnée généralisée q adéquate, calculer l'expression de l'énergie potentielle $U(q)$ et trouver les positions d'équilibre données par $\partial U(q)/\partial q = 0$.
2. En déduire les élongations Δl_A et Δl_B des deux ressorts quand le système est en équilibre.
3. Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système.
4. Ecrire l'équation de Lagrange du système et en déduire l'équation du mouvement.
5. Quelle alors la pulsation propre du système ω_0 et la période des oscillations T.
6. Application Numérique : Pour les questions 2 et 5.

$l = 45\ cm$; $l_0 = 15\ cm$; $k = 20\ N/m$; $m = 100\ g$ et $g = 10\ m/s^2$.

EXERCICE 04 : ***Pendule simple***

La figure 03. montre un pendule pesant simple formé par une masse ponctuelle m qui pend verticalement au bout d'une tige de longueur l et de masse négligeable.

1. Ecrire le Lagrangien du système.
2. Trouver, à partir des équations de Lagrange, l'équation différentielle du mouvement de la masse m dans le cas des oscillations libres (on néglige les frottements).

Conditions initiales : A $t = 0\ s$ on donne une vitesse initiale horizontale V_0 à la masse qui se trouve dans sa position d'équilibre.

3. Ecrire l'équation horaire du mouvement de la masse m dans le cas des oscillations de petites amplitudes.

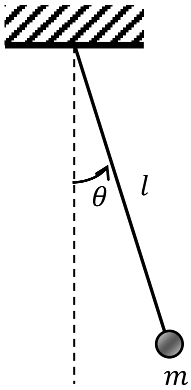


Figure 03.

EXERCICE 05 : ***Métronome***

Dans la figure 04. la tige est de masse négligeable et les masses m et M sont ponctuelles.

1. Ecrire le Lagrangien du système.
2. Trouver, à partir des équations de Lagrange, l'équation différentielle du mouvement des deux masses (Les frottements sont négligés).
3. Quelle est, dans ce cas, la période des petites oscillations ?

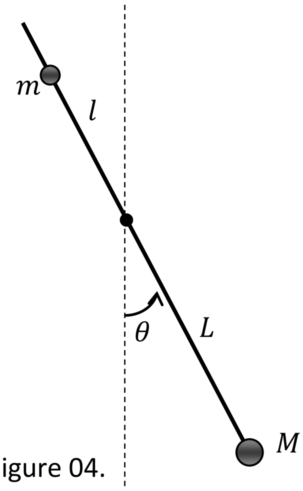


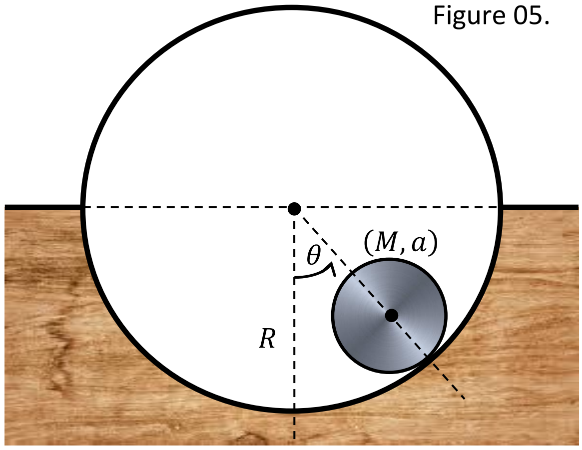
Figure 04.

EXERCICE 06 : ***Cylindre dans une cavité Cylindrique***

Un cylindre plein de masse M et de rayon a roule sans glisser, uniquement sous l'effet de son poids, à l'intérieur d'une cavité cylindrique de rayon R (figure 05.). On néglige les frottements avec l'air.

1. Quel est le nombre de degrés de liberté du cylindre ?
2. Ecrire la condition de roulement sans glissement.
3. Ecrire le lagrangien du système.
4. A partir des équations d'Euler-Lagrange, déduire l'équation différentielle du mouvement.
5. Quelle est, dans ce cas, la période des petites oscillations libres du cylindre ?

Figure 05.



EXERCICE 07 : ***Cylindre sur un plan incliné***

Un cylindre plein de masse M et de rayon R roule sans glisser, uniquement sous l'effet de son poids, sur un plan incliné faisant un angle α avec le plan horizontal.

1. Quel est le nombre de degrés de liberté du cylindre ?
2. Ecrire la condition de roulement sans glissement.
3. Ecrire le lagrangien du système.
4. A partir des équations d'Euler-Lagrange, déduire l'équation différentielle du mouvement.
5. Quelle est la nature du mouvement ?

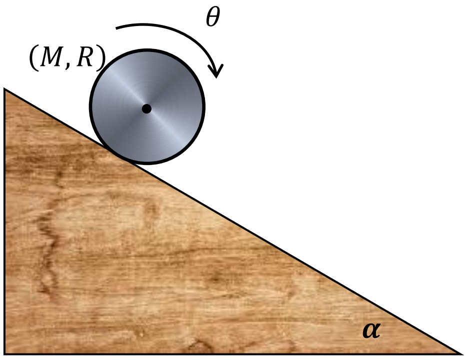


Figure 06.

EXERCICE 08 : ***Systèmes oscillatoires libres à un degré de liberté***

1. Calculer le Lagrangien des systèmes représentés dans les figures 07, 08 et 09.
2. Calculer, à partir des équations de Lagrange, les équations différentielles du mouvement.
3. En déduire la période des petites oscillations.

Les ressorts, les tiges et les fils sont de masses négligeables.
Les fils sont inextensibles.
Les masses m sont ponctuelles.
Les poulies sont des disques pleins.
Dans la figure 07. L'élongation du ressort est nulle à l'équilibre.
Le cylindre dans la figure 09. est plein et la tige est solidaire au cylindre.
Tous les roulements se font sans glissement.

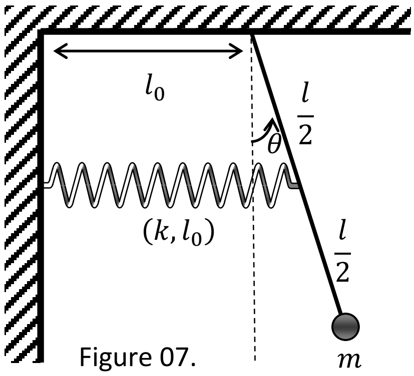
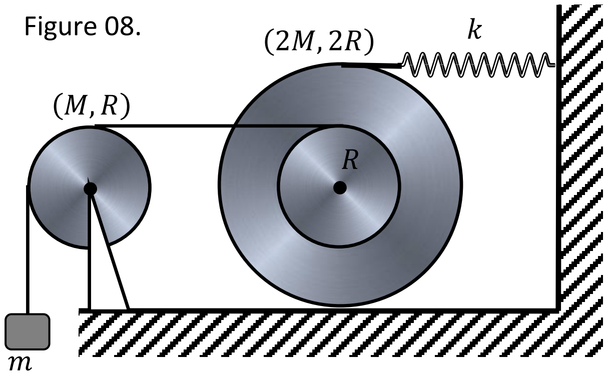


Figure 07.

Figure 08.



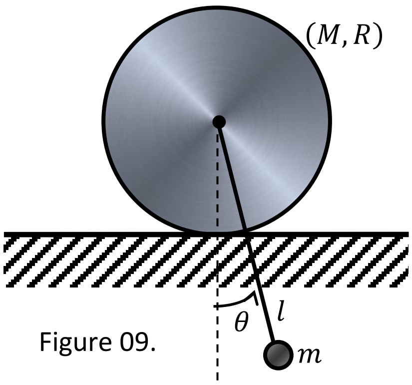


Figure 09.

EXERCICE 09 : ***Systèmes oscillatoires amortis à un degré de liberté***

1. Calculer le Lagrangien des systèmes représentés dans les figures 10 et 11.
2. Calculer, à partir des équations de Lagrange, les équations différentielles du mouvement.
3. En déduire le facteur d'amortissement δ et la pulsation propre ω_0 dans chaque cas.

Les ressorts, les tiges et les amortisseurs sont de masses négligeables. Les masses m sont ponctuelles. L'élongation du ressort est nulle à l'équilibre.
Le cylindre dans la figure 11. est plein et roule sans glisser sur le plan horizontal et la tige est solidaire au cylindre.

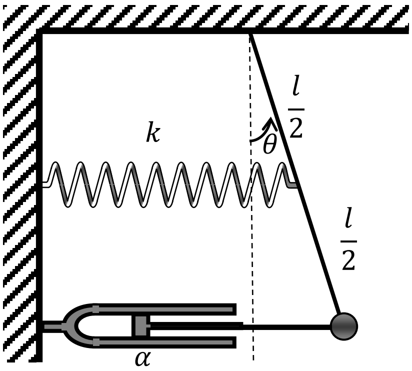


Figure 10.

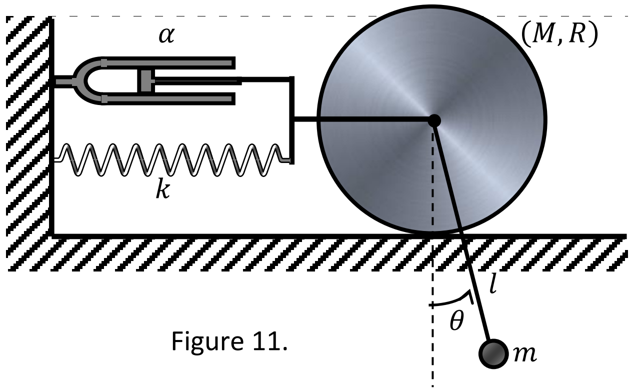


Figure 11.

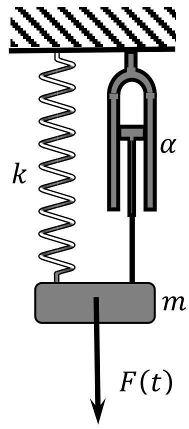
EXERCICE 10 : ***Systèmes oscillatoires forcés à un degré de liberté***

Pour le système de la figure 12.

1. Ecrire le Lagrangien, et déduire, à partir de l'équation de Lagrange, l'équation différentielle du mouvement.
2. Mettre l'équation sous la forme
$$x^{\bullet\bullet} + 2\delta . x^{\bullet} + \omega_0^2 . x = A(t)$$
Identifier les valeurs δ, ω_0 et $A(t)$.
3. Dans le cas d'une excitation sinusoïdale. On cherche la solution de cette équation en utilisant la notation complexe. Pour cela nous posons $A(t) = A_0 . e^{i\Omega t}$ et on cherche la solution de la forme $X(t) = X_0 . e^{i(\Omega t+\varphi)}$. Exprimer l'amplitude X_0 et le déphasage φ en fonction de Ω, δ, ω_0 et A_0.
4. A quelle condition peut-on trouver un maximum pour l'amplitude $X_0(\Omega)$?
Quelle est la valeur de ce maximum $X_{0\max}$ et du déphasage qui lui correspond $\varphi_{\max}$.
5. Que deviennent ces valeurs dans le cas où l'amortissement est faible $\delta \ll \omega_0$.

Reprendre les questions 1 et 2 dans le cas du système de la figure 12.bis où la masse est plongée dans un liquide offrant un coefficient de frottement visqueux α à la masse et dans le cas ou l'extrémité supérieure du ressort est soumise à une excitation sinusoïdale induisant un déplacement $s(t)$ connu.

Figure 12.



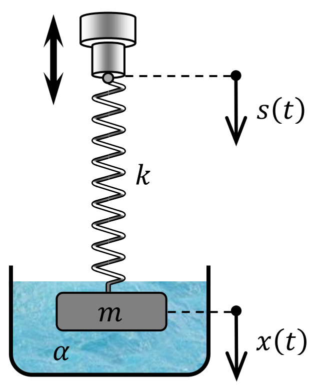


Figure 12.bis

EXERCICE 11 : ***Corde s'enroulant sur un mat***

Dans cet exercice nous nous limiterons au problème à deux dimensions sans prendre en compte l'attraction gravitationnelle sur les masses, donc nous considérerons uniquement le mouvement dans le plan horizontal d'une masse ponctuelle m fixée au bout d'une corde inextensible et de masse négligeable de longueur initiale l qui s'enroule autour d'un mât cylindrique de rayon R. Voir la figure 13.
En plus, on suppose que la corde reste tendue tout au long du mouvement.

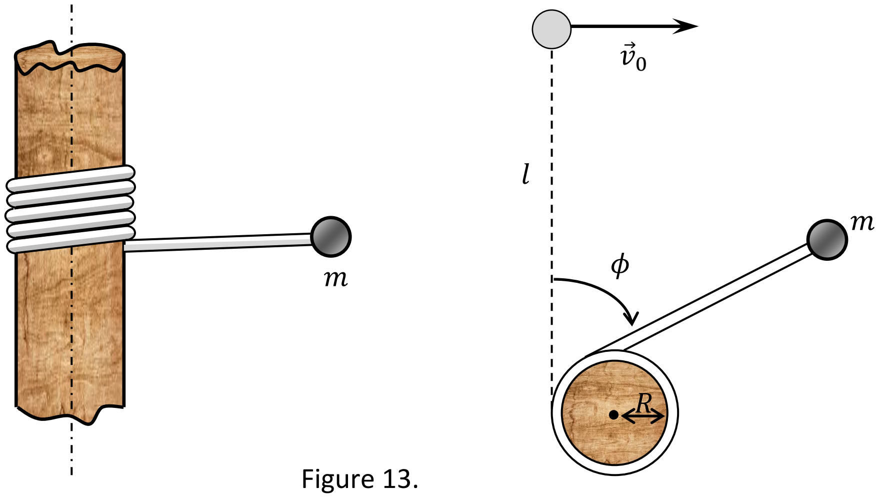


Figure 13.

1. Déterminer le nombre de degrés de liberté associés à la masse m.
2. Ecrire le Lagrangien de la masse m.
3. En appliquant les équations d'Euler-Lagrange, trouver les équations paramétriques du mouvement de la masse m, sachant qu'à l'instant initiale l'expérimentateur avait donné une vitesse initiale $\vec{v}_0$ contenue dans le plan horizontal et perpendiculaire à la corde complètement tendue.
4. Calculer le temps total du mouvement τ (temps au bout duquel la corde s'enroule totalement autour du mât).

EXERCICE 12 : ***Sphère qui roule sur une butte sphérique***

Une sphère pleine de rayon a et de masse m est située initialement au sommet d'une butte sphérique de rayon b. La première sphère est déplacée légèrement de sorte qu'elle puisse rouler sans glisser, sous l'effet de son poids, le long de la seconde sphère.
On veut calculer les forces responsables des liaisons en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange

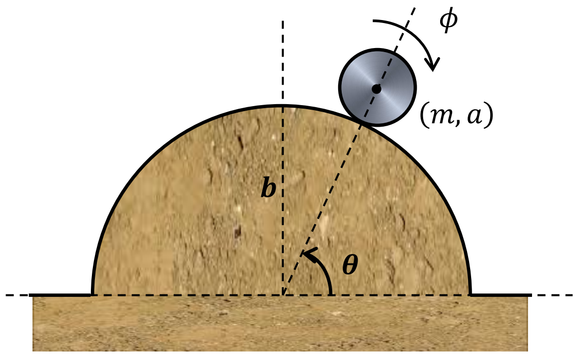


Figure 14.

1. Ecrire la condition de liaison permettant de déterminer la force de contact.
2. Exprimer la condition de roulement sans glissement. Quelle force est responsable de cette liaison ?
3. Calculer le Lagrangien de la sphère de rayon a, en prenant en compte les liaisons (multiplicateurs de Lagrange).
4. Ecrire les équation de Lagrange et en déduire l'équation du mouvement et les multiplicateur de Lagrange en fonction de θ.
5. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique totale, déterminer l'angle θ_{lim} au-delà duquel le contact entre les deux sphères est rompu.

EXERCICE 13 : ***Système à deux poulies***

Soit un système composé de deux poulies de masses et rayons respectifs (M_1, R_1) et (M_2, R_2) tel que décrit dans la figue 15.
La longueur du fil qui passe par la gorge de la poulie supérieure est notée L_1 et la longueur du fil qui passe par la gorge de la poulie inférieure est notée L_2.
Les fils sont inextensibles et de masses négligeables et les masses m_1, m_2, m_3 sont ponctuelles.
On note x_1, x_2, x_3 les postions respectives des masses m_1, m_2, m_3, et on note X_2 la position de l'axe de la poulie de masse M_2. L'axe de rotation de la poulie de masse M_1 est fixe.

1. Ecrire les conditions de liaison du système étudié et en déduire le nombre de degrés de liberté.
2. Ecrire le Lagrangien du système.
3. Ecrire les équations de Lagrange correspondantes et en déduire les équations du mouvement de chaque solide.

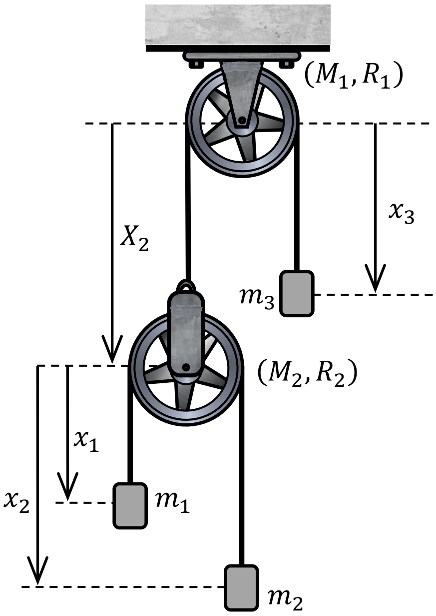


Figure 15.

EXERCICE 14 : ***Systèmes oscillatoires libres à deux degrés de liberté***

1. Calculer le Lagrangien des systèmes représentés dans les figures 16, 17 et 18.
2. Calculer, à partir des équations de Lagrange, les équations différentielles du mouvement.
3. En posant les solutions particulières de ces équations sous la forme :
$$\begin{cases} q_1(t) = A_1.\sin(\omega.t+\varphi) \\ q_2(t) = A_2.\sin(\omega.t+\varphi) \end{cases}$$
Trouver les pulsations propres de chaque système.
4. Dans le cas de la figure 18. Quelle est la condition pour que les deux coordonnées x et θ soient découplées ?

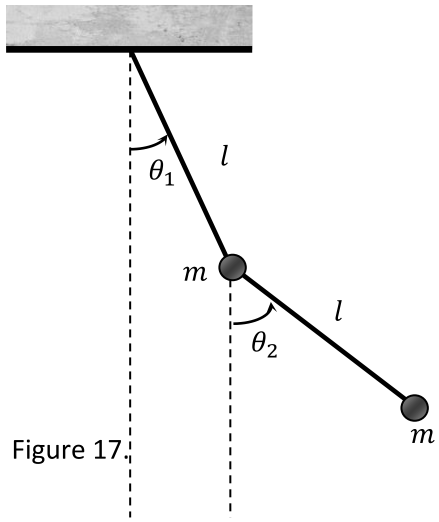


Figure 17.

Les ressorts et les tiges sont de masses négligeables.
Les masses m sont ponctuelles.
Dans la figure 16. Les élongations des ressorts sont nulles à l'équilibre.
Tous les frottements sont négligés.
Dans la figure 18. x est la position du centre de masse de la poutre par-rapport à sa position d'équilibre.

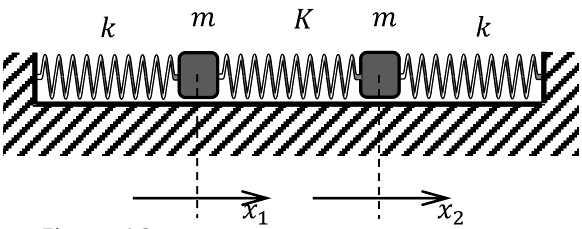
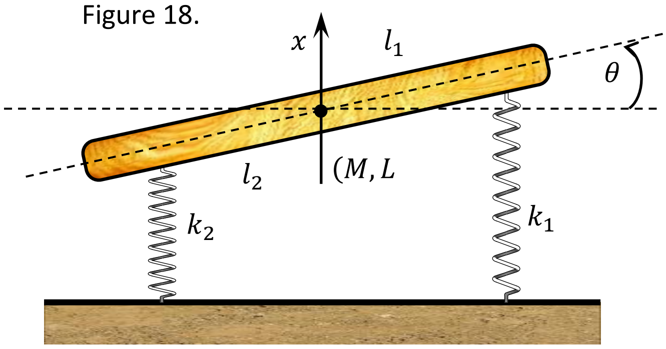


Figure 16.

Figure 18.


EXERCICE 15 : ***Singe et bananes***

Une corde sans masse, inextensible, de longueur l passe à travers une poulie – de masse et de rayon négligeables – située à une distance h du sol. À un bout A de la corde est attaché un régime de bananes de masse m et un singe de masse M se trouve initialement à l'autre bout B. Le singe grimpe le long de la corde dans le but d'atteindre les bananes et son déplacement $d(t)$ par rapport à l'extrémité B est une fonction *donnée* du temps.

Initialement, le système est au repos avec $d(0) = 0$ et $d^{\bullet}(0) = 0$.

1. Faire un schéma en reportant toute les quantités définies.
2. Quelle est la contrainte ?
3. Introduire les coordonnées généralisées adéquates.
4. Calculer le lagrangien du système en utilisant les questions 1 et 2.
5. Montrer que l'équation de Lagrange conduit à l'équation suivante pour l'altitude $z(t)$ du singe par rapport au sol $(m + M).z^{\bullet\bullet} - m.d^{\bullet\bullet} = (m - M)g$.
6. Intégrer l'équation et déterminer le mouvement.
7. Dans le cas spécial $m = M$, montrer que la séparation verticale entre le singe et les bananes reste constante.
8. Dans le cas $m > M$ avec $z(0) = h/4$, $l = h$ et $d(t) = a.t^2$ avec $a = \text{Constante} > 0$, déterminer le temps que le singe met pour atteindre le même niveau que les bananes.