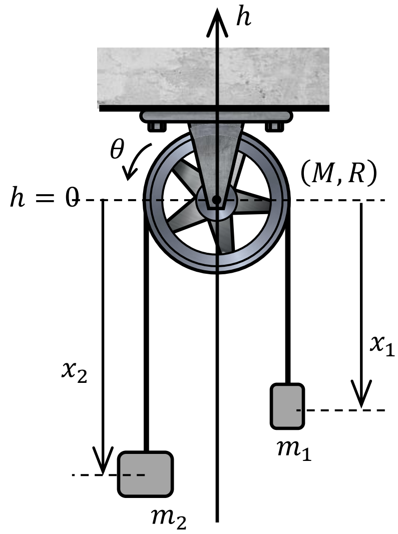
SOLUTIONS DE LA SÉRIE DE TD N° 02
FORMALISME DE LAGRANGE

<u>EXERCICE 01</u> : *La machine d'Atwood*



1. Nombre de degrés de liberté : 01

Coordonnée généralisée : x

Liaison holonome : $x_1 + x_2 + \pi R = l$ (fil inextensible)

Liaison holonome : $x_2 = R\theta$ (le fil ne glisse pas sur la gorge de la poulie)

$$\begin{cases} x_1 = l - \pi R - x \\ x_2 = x \\ \theta = x/R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^\bullet = -x^\bullet \\ x_2^\bullet = x^\bullet \\ \theta^\bullet = x^\bullet/R \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} h_2 = -x_2 \\ h_1 = -x_1 \end{cases}$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m_1(x_1^\bullet)^2 + \frac{1}{2}m_2(x_2^\bullet)^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)x^{\bullet 2}$$

Le moment d'inertie du disque $I = MR^2/2$

Energie potentielle

$$U = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 \quad \Rightarrow \quad U = (m_1 - m_2)g.x - (l - \pi R).m_1 g$$

Le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M\right)x^{\bullet 2} - (m_1 - m_2)g.x + (l - \pi R).m_1 g}$$

L'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\bullet}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M\right)x^\bullet\right) + (m_1 - m_2)g = 0$$

D'où l'équation du mouvement

$$\boxed{x^{\bullet\bullet} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + M/2}g = \text{constante}}$$

2. Equation horaire du mouvement

Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré pour les deux masses et circulaire uniformément accéléré pour la poulie.

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + M/2}g\right).t^2 + x_0$$

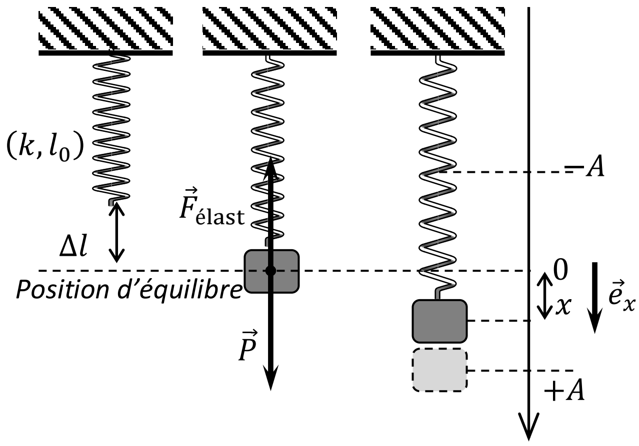
La vitesse initiale du système étant nulle ($x_0^\bullet = 0$).

D'où

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = l - \pi R - x = -\frac{1}{2}\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + M/2}g\right).t^2 - x_0 + l - \pi R \\ x_2 = x = \frac{1}{2}\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + M/2}g\right).t^2 + x_0 \\ \theta = \frac{x}{R} == \frac{1}{2}\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + M/2}\frac{g}{R}\right).t^2 + \frac{x_0}{R} \end{cases}}$$

EXERCICE 02 : ***Pendule élastique***

1. Condition d'équilibre du système



Energie potentielle du système masse ressort (vertical).

$$U = mgh + \frac{1}{2}k(\Delta l + x)^2$$

Δl est l'élongation à l'équilibre (constante).
x est l'élongation par rapport à la position d'équilibre.

$$h = -x$$

La condition d'équilibre est donnée par

$$\boxed{\left.\frac{\partial U(x)}{\partial x}\right|_{x=x_{\text{équilibre}}} = 0}$$

Donc

$$-mg + k\left(\Delta l + x_{\text{équilibre}}\right) = 0$$

Comme $x_{\text{équilibre}} = 0$, alors, la condition d'équilibre s'écrit : $\boxed{k.\Delta l - mg = 0}$

2. Lagrangien

Un seul degré de liberté : la coordonnée généralisée est (x) la position verticale par rapport au point d'équilibre.

Energie cinétique

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m.x^{\bullet 2}}$$

Energie potentielle

$$\boxed{U = -mgx + \frac{1}{2}k(\Delta l + x)^2}$$

On peut aussi écrire

$$U = -mgx + \frac{1}{2}k(\Delta l^2 + x^2 + 2\Delta l.x) = (k.\Delta l - mg).x + \frac{1}{2}k\Delta l^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

En utilisant la condition à l'équilibre $(k.\Delta l - mg = 0)$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\Delta l^2$$

$k\Delta l^2/2$ est un terme constant qui n'influe pas sur les équations de Lagrange. D'où nous pouvons écrire l'énergie potentielle sous la forme

$$\boxed{U = \frac{1}{2}kx^2}$$

Et le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m.x^{\bullet 2} - \frac{1}{2}kx^2}$$

3. Les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\bullet}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}(m.x^{\bullet}) - (-k.x) = 0$$

D'où l'équation du mouvement

$$\boxed{x^{\bullet\bullet} + \frac{k}{m}x = 0}$$

4. Equation horaire du mouvement

L'équation du mouvement précédente est une équation différentielle du 2ème ordre de la forme

$$q^{\bullet\bullet} + \omega_0^2 . q = 0$$

Où ω_0 est appelée pulsation propre du système.

Dans notre cas

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

La solution de cette équation est une fonction sinusoïdale du temps pouvant avoir l'une des formes suivantes :

Forme 1 : $$x(t) = A.\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

A et φ sont des constantes d'intégrations déterminées à partir des conditions initiales.

Forme 2 : $$x(t) = A.\sin(\omega_0 t + \varphi')$$

A et $\varphi' = \varphi + \pi/2$ sont des constantes d'intégrations déterminées à partir des conditions initiales.

Forme 3 : $$x(t) = K_1.\cos(\omega_0 t) + K_2.\sin(\omega_0 t)$$

K_1 et K_2 sont des constantes d'intégrations déterminées à partir des conditions initiales.

Forme 4 : $$x(t) = A_1.e^{i.\omega_0 t} + A_2.e^{-i.\omega_0 t}$$

A_1 et A_2 sont des constantes d'intégrations déterminées à partir des conditions initiales.

Prenons la forme

$$x(t) = A_1.e^{i.\omega_0 t} + A_2.e^{-i.\omega_0 t}$$

Dans ce cas

$$\begin{cases} x^{\bullet}(t) = i.\omega_0\left(A_1.e^{i.\omega_0 t} - A_2.e^{-i.\omega_0 t}\right) \\ x^{\bullet\bullet}(t) = -\omega_0^2.\left(A_1.e^{i.\omega_0 t} + A_2.e^{-i.\omega_0 t}\right) \end{cases}$$

Nous retrouvons bien là l'équation différentielle précédente.

Appliquons les conditions initiales

$$\begin{cases} x(0) = d \\ x^{\bullet}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = d \\ i.\omega_0(A_1 - A_2) = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad A_1 = A_2 = \frac{d}{2}$$

En remplaçant dans l'équation horaire

$$x(t) = \frac{d}{2}\left(e^{i.\omega_0 t} + e^{-i.\omega_0 t}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = d.\cos(\omega_0 t)}$$

EXERCICE 03 :

1. ***Coordonnée généralisée.***

Le point matériel se déplaçant sur une droite donc le système possède un (01) seul degré de liberté. Coordonnée généralisée : Hauteur du point matériel z par rapport à l'origine prise au point B.

$$U = mgh + \frac{1}{2}k.X_A^2 + \frac{1}{2}k.X_B^2$$

Avec

$$h = z \quad ; \quad X_A = (AB - z) - l_0 \quad ; \quad X_B = z - l_0$$

Donc

$$U(z) = mg.z + \frac{1}{2}k.\{(l - z - l_0)^2 + (z - l_0)^2\}$$

Et

$$\boxed{U(z) = mg.z + \frac{1}{2}k.(2.z^2 - 2l.z + l^2 + 2.l_0^2 + 2ll_0)}$$

La position d'équilibre est donnée par

$$\left.\frac{\partial U(z)}{\partial z}\right|_{z=z_0} = mg + 2k.z_0 - kl = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{z_0 = \frac{l}{2} - \frac{mg}{2k}}$$

2. ***Elongation des ressorts à l'équilibre.***

$$\boxed{X_{0A} = \Delta l_A = (l - z_0) - l_0 = \frac{l}{2} + \frac{mg}{2k} - l_0} \quad ; \quad \boxed{X_{0B} = \Delta l_B = z_0 - l_0 = \frac{l}{2} - \frac{mg}{2k} - l_0}$$

3. ***Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système.***

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$T = \frac{1}{2}m.v^2 = \frac{1}{2}m.z^{\bullet 2} \qquad \text{et} \qquad U(z) = mg.z + \frac{1}{2}k.(2.z^2 - 2l.z + l^2 + 2.l_0^2 + 2ll_0)$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}m.z^{\bullet 2} - mg.z - \frac{1}{2}k.(2.z^2 - 2l.z)}$$

L'énergie potentielle étant définie à une constante près.

4. ***Equation d'Euler-Lagrange du système.***

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^\bullet}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0$$

Avec

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^\bullet} = m.z^\bullet \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^\bullet}\right) = m.z^{\bullet\bullet} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -mg - 2k.z + kl$$

En remplaçant

$$m.z^{\bullet\bullet} + mg + 2k.z - kl = 0$$

En utilisant la condition à l'équilibre $(mg + 2k.z_0 - kl = 0)$, nous avons :

$$m.z^{\bullet\bullet} + 2k.(z - z_0) = 0$$

Nous définissons la positions par rapport au point d'équilibre par $u = z - z_0$ et $u^{\bullet\bullet} = z^{\bullet\bullet}$.

D'où l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique

$$\boxed{u^{\bullet\bullet} + \frac{2k}{m}u = 0}$$

5. ***La pulsation des oscillations libre.***

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{2k/m}}$$

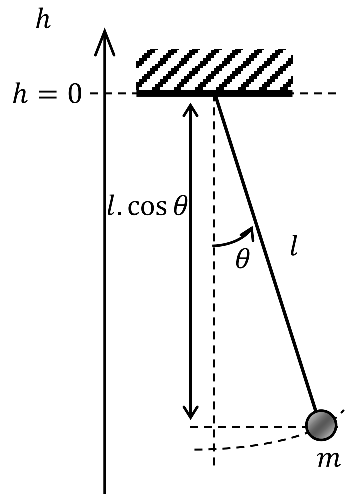
Et la période des petites oscillations libres

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}}$$

6. ***Application numérique*** :

$$\boxed{\Delta l_A = 0{,}1\ m = 10\ cm} \quad ; \quad \boxed{\Delta l_B = 0{,}05\ m = 5\ cm}$$
$$\boxed{\omega_0 = 20\ rad/s} \quad ; \quad \boxed{T = 0{,}314\ s}$$

EXERCICE 04 : ***Pendule simple***



1. Nombre de degrés de liberté : 01

Coordonnée généralisée : θ

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l.\theta^\bullet)^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}m.l^2\theta^{\bullet 2}$$

Le moment d'inertie du point matériel étant $I = m.l^2$ nous aurions tout aussi bien écrire

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m.l^2\theta^{\bullet 2}$$

Energie potentielle

$$U = mgh = mg(-l.\cos\theta)$$

L'axe de la hauteur est toujours vertical et orienté vers le haut.

L'expression de l'énergie potentielle (et du lagrangien) est déterminée à une constante près selon le choix de l'origine des hauteurs (origine de l'énergie potentielle gravitationnelle).

Ici nous avons choisi l'origine de la hauteur au point de fixation (axe de rotation) du pendule.

Le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m.l^2\theta^{\bullet 2} + mgl.\cos\theta}$$

2. L'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^\bullet}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = \frac{d}{dt}(m.l^2\theta^\bullet) - (-mgl.\sin\theta) = 0$$

D'où l'équation du mouvement

$$\boxed{\theta^{\bullet\bullet} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

Approximation des petits angles au voisinage de la position d'équilibre $\theta_{\text{équ}} = 0$

$$\sin\theta \approx \theta$$

L'équation du mouvement devient

$$\boxed{\theta^{\bullet\bullet} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

Donc de la forme

$$q^{\bullet\bullet} + \omega_0^2.q = 0$$

Et la pulsation propre

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

Pour obtenir la même équation différentielle, nous aurions pu faire l'approximation dans l'expression du Lagrangien

$$\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$$

Ce qui donne

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m.l^2\theta^{\bullet 2} - \frac{1}{2}mgl.\theta^2 + mgl}$$

En appliquant l'équation de Lagrange, nous retrouvons

$$\theta^{\bullet\bullet} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

On rappelle l'approximation des petits angles :
Développement limité au deuxième ordre au voisinage de la position d'équilibre $\theta_{\text{équ}} = 0$

$$\sin\theta \approx \theta$$

$$\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$$

3. Equation horaire du mouvement

$$\theta(t) = A_1.e^{i.\omega_0 t} + A_2.e^{-i.\omega_0 t}$$

Dans ce cas

$$\begin{cases} \theta^{\bullet}(t) = i.\omega_0\left(A_1.e^{i.\omega_0 t} - A_2.e^{-i.\omega_0 t}\right) \\ \theta^{\bullet\bullet}(t) = -\omega_0^2.\left(A_1.e^{i.\omega_0 t} + A_2.e^{-i.\omega_0 t}\right) \end{cases}$$

Appliquons les conditions initiales

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \theta^{\bullet}(0) = V_0/l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ i.\omega_0(A_1 - A_2) = V_0/l \end{cases} \quad \text{d'où} \quad A_1 = -A_2 = \frac{V_0}{2i\omega_0.l}$$

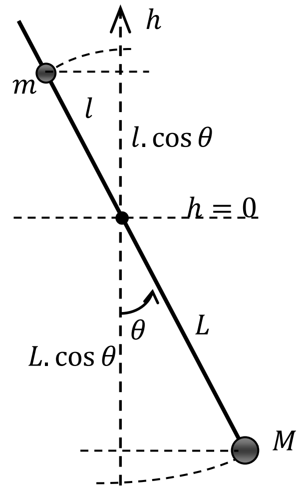
En remplaçant dans l'équation horaire

$$\theta(t) = \frac{V_0}{\omega_0.l}\left(\frac{e^{i.\omega_0 t} - e^{-i.\omega_0 t}}{2i}\right)$$

Donc

$$\boxed{\theta(t) = \frac{V_0}{\omega_0.l}.\sin(\omega_0 t)} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

<u>EXERCICE 05</u> : ***Métronome***



1. Nombre de degrés de liberté : 01

Coordonnée généralisée : θ

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m(l.\theta^{\bullet})^2 + \frac{1}{2}M(L.\theta^{\bullet})^2$$

donc

$$T = \frac{1}{2}(m.l^2 + M.L^2)\theta^{\bullet 2}$$

Energie potentielle

$$U = mgh + MgH = mg(+l.\cos\theta) + Mg(-L.\cos\theta)$$

Avec

$$h = +l.\cos\theta \quad ; \quad H = -L.\cos\theta$$

Nous avons choisi l'origine de la hauteur au point de fixation (axe de rotation) du pendule.

Le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}(ml^2 + ML^2)\theta^{\bullet 2} + g(ML - ml).\cos\theta}$$

2. L'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^{\bullet}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}\left((ml^2 + ML^2)\theta^{\bullet}\right) - (-g(ML - ml).\sin\theta) = 0$$

D'où l'équation du mouvement

$$\boxed{\theta^{\bullet\bullet} + g\frac{ML - ml}{ml^2 + ML^2}\sin\theta = 0}$$

Dans l'approximation des petits angles

$$\sin\theta \approx \theta$$

L'équation du mouvement devient

$$\boxed{\theta^{\bullet\bullet} + g\frac{ML - ml}{ml^2 + ML^2}\theta = 0}$$

Donc pour obtenir une équation différentielle de la forme

$$q^{\bullet\bullet} + \omega_0^2.q = 0$$

Dont la solution serait sinusoïdale, il faut que

$$\boxed{ML > ml}$$

Et la pulsation propre des petites oscillations

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{g\frac{ML - ml}{ml^2 + ML^2}}}$$

EXERCICE 06 :

1. ***Nombre de degrés de liberté.***

Solide roulant dans le plan :
02 degrés de liberté pour sons centre de masse + 01 degré de liberté pour la rotation.

Contraintes : 02 contraintes.
Le cylindre est astreint à rouler dans une cavité cylindrique (courbe) + roulement sans glissement.

03 degrés de liberté – 02 contraintes ⇒ un (01) seul degré de liberté.

Coordonnée généralisée : variable θ

2. ***Condition de roulement sans glissement.***

$$R_\theta.\theta = R_\varphi.\varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{R.\theta = a.\varphi} \quad \text{et} \quad \boxed{R.\theta^\bullet = a.\varphi^\bullet}$$

3. ***Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système.***

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$T = \frac{1}{2}M.v_{cdm}^2 + \frac{1}{2}I.\omega^2 \quad \text{et} \quad U = Mgh_{cdm}$$

Avec

$$v_{cdm} = (R-a).\theta^\bullet \quad ; \quad \omega = \varphi^\bullet = \frac{R}{a}\theta^\bullet \quad ; \quad I = \frac{1}{2}M.a^2 \quad ; \quad h_{cdm} = -(R-a).\cos\theta$$

Donc

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(R-a)^2.\theta^{\bullet 2} + \frac{1}{4}MR^2.\theta^{\bullet 2} + Mg(R-a).\cos\theta$$

Et

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\left[(R-a)^2 + \frac{1}{2}R^2\right].\theta^{\bullet 2} + Mg(R-a).\cos\theta}$$

4. ***Equation d'Euler-Lagrange du système.***

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^\bullet}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$$

Avec

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^\bullet} = M\left[(R-a)^2 + \frac{1}{2}R^2\right].\theta^\bullet \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^\bullet}\right) = M\left[(R-a)^2 + \frac{1}{2}R^2\right].\theta^{\bullet\bullet}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -Mg(R-a).\sin\theta$$

En remplaçant

$$M\left[(R-a)^2 + \frac{1}{2}R^2\right].\theta^{\bullet\bullet} + Mg(R-a).\sin\theta = 0$$

D'où l'équation du mouvement

$$\boxed{\left[(R-a)^2 + \frac{1}{2}R^2\right].\theta^{\bullet\bullet} + g(R-a).\sin\theta = 0}$$

5. ***Cas des petites oscillations.***

Pour les angles petits : $\sin\theta \approx \theta$

$$\left[(R-a)^2 + \frac{1}{2}R^2\right].\theta^{\bullet\bullet} + g(R-a).\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta^{\bullet\bullet} = -\frac{2g(R-a)}{2(R-a)^2 + R^2}\theta}$$

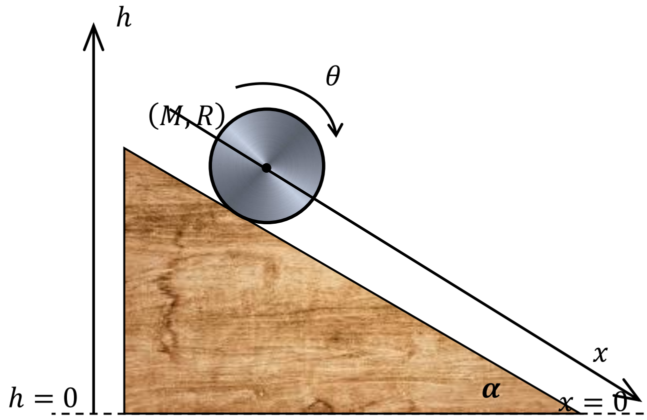
La pulsation des oscillations libre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g(R-a)}{2(R-a)^2 + R^2}}$$

Et la période des petites oscillations libres

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2(R-a)^2 + R^2}{2g(R-a)}}}$$

EXERCICE 07 : ***Cylindre sur un plan incliné***



1. Degrés de liberté.

Nombre de degrés de liberté pour la translation : 01.
Nombre de degrés de liberté pour la rotation : 01.
Mais comme ces deux degrés de libertés ne sont pas indépendants, donc nous avons un seul (01) degrés de liberté.

2. Condition de roulement sans glissement

$$x = R\theta$$

Coordonnée généralisée : θ

3. Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}M(R\theta^\bullet)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\theta^{\bullet 2}$$

Le moment d'inertie du cylindre plein étant

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Et

$$x = R\theta \quad \Rightarrow \quad x^\bullet = R\theta^\bullet$$

Donc

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2\right)\theta^{\bullet 2}$$

Energie potentielle

$$U = Mgh = Mg(-x.\sin\alpha) \qquad U = -MgR.\sin\alpha\,.\,\theta$$

L'axe de la hauteur est toujours vertical et orienté vers le haut.

Le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2\right)\theta^{\bullet 2} + MgR.\sin\alpha\,.\,\theta}$$

4. L'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^\bullet}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = \frac{d}{dt}\left(\left(\frac{3}{2}MR^2\right)\theta^\bullet\right) - (MgR.\sin\alpha) = 0$$

D'où l'équation du mouvement

$$\boxed{\theta^{\bullet\bullet} = \frac{2g.\sin\alpha}{3R} = \text{Constante}}$$

Et

$$\boxed{x^{\bullet\bullet} = R\theta^{\bullet\bullet} = \frac{2}{3}g.\sin\alpha = \text{Constante}}$$

5. Nature du mouvement

Le mouvement du centre de masse du cylindre est un mouvement rectiligne uniformément varié.
Le mouvement du cylindre (un point quelconque du cylindre) par rapport à son centre de masse est circulaire uniformément varié.

<u>EXERCICE 08</u> : *Systèmes oscillatoires libres à un degré de liberté*

<u>Figure 07.</u>

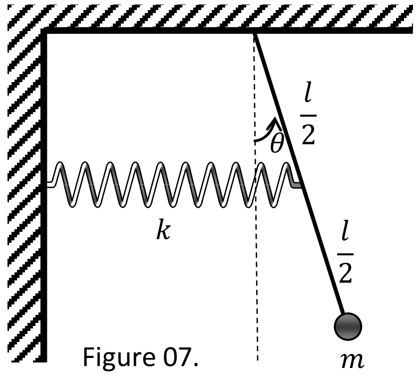


Figure 07.

1. Nombre de degrés de liberté : 01

Coordonnée généralisée : θ

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l.\theta^{\bullet})^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}ml^2\theta^{\bullet 2}$$

Energie potentielle

$$U = mgh + \frac{1}{2}kx^2$$

En choisissant l'origine de la hauteur au point de fixation (axe de rotation) du pendule.

$$h = -l.\cos\theta \quad \text{et} \quad x = \frac{l}{2}\sin\theta$$

Donc

$$U = -mgl.\cos\theta + \frac{1}{8}kl^2.\sin^2\theta$$

Et pour des petits angles autour de la position d'équilibre $(\theta_0 = 0)$

$$\sin\theta \approx \theta \quad ; \quad \cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$$

Donc

$$U = \frac{1}{2}\left(mgl + \frac{1}{4}kl^2\right)\theta^2 - mgl$$

Le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m.l^2\theta^{\bullet 2} - \frac{1}{2}\left(mgl + \frac{1}{4}kl^2\right)\theta^2 + mgl}$$

2. L'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^{\bullet}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = \frac{d}{dt}(m.l^2\theta^{\bullet}) - \left(-\left(mgl + \frac{1}{4}kl^2\right).\theta\right) = 0$$

D'où l'équation du mouvement

$$\boxed{\theta^{\bullet\bullet} + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{4m}\right)\theta = 0}$$

Donc de la forme

$$q^{\bullet\bullet} + \omega_0^2.q = 0$$

3. La pulsation propre

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{4m}}}$$

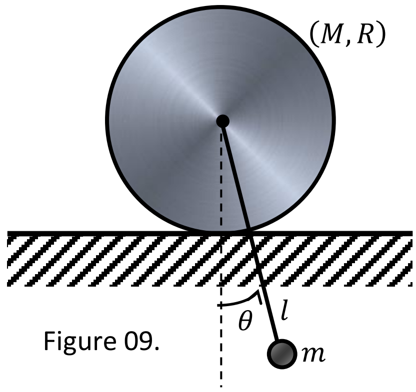


Figure 09.

Figure 09.

1. Nombre de degrés de liberté : 01 (tige solidaire au cylindre)

Coordonnée généralisée : θ

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Avec I le moment d'inertie du cylindre plein

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Condition de roulement sans glissement

$$y = R\theta \quad \Rightarrow \quad V = y^\bullet = R\theta^\bullet$$

La vitesse du point matériel (par rapport au référentiel fixe du sol) est obtenue en utilisant la loi de compositions des vitesses

$$\begin{cases} x_m = l.\cos\theta \\ y_m = l.\sin\theta - R\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_m^\bullet = -l\theta^\bullet.\sin\theta \\ y_m^\bullet = l\theta^\bullet.\cos\theta - R\theta^\bullet \end{cases}$$

Et le carré du module de la vitesse

$$v^2 = {x_m^\bullet}^2 + {y_m^\bullet}^2 = (l^2 + R^2 - 2lR.\cos\theta).\theta^{\bullet 2}$$

Et pour de très petits angles autour de la position d'équilibre $(\theta_{\text{équ}} = 0)$

$$\cos\theta \approx 1$$

Cette approximation (grossière) au premier ordre est faite exprès pour obtenir le lagrangien d'un oscillateur harmonique. Dans ce cas

$$v^2 = (l^2 + R^2 - 2lR).\theta^{\bullet 2} = (l - R)^2.\theta^{\bullet 2}$$

Et l'énergie cinétique devient

$$T = \frac{1}{2}MR^2\theta^{\bullet 2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\theta^{\bullet 2} + \frac{1}{2}m(l-R)^2.\theta^{\bullet 2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2 + m(l-R)^2\right)\theta^{\bullet 2}$$

Energie potentielle

$$U = mgh + MgH = mg(-x_m) \quad \Rightarrow \quad U = -mgl.\cos\theta$$

En choisissant l'origine de la hauteur au point de fixation du pendule (centre de masse du cylindre).

Et pour des petits angles autour de la position d'équilibre $(\theta_0 = 0)$

$$\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$$

Donc

$$U = \frac{1}{2}mgl.\theta^2 - mgl$$

Le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2 + m(l-R)^2\right)\theta^{\bullet 2} - \frac{1}{2}mgl.\theta^2 + mgl}$$

2. L'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^{\bullet}}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}=\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{3}{2}MR^2+m(l-R)^2\right)\theta^{\bullet}\right)-(-mgl.\theta)=0$$

D'où l'équation du mouvement

$$\boxed{\theta^{\bullet\bullet}+\left(\frac{mgl}{\frac{3}{2}MR^2+m(l-R)^2}\right)\theta=0}$$

Donc de la forme

$$q^{\bullet\bullet}+\omega_0^2.q=0$$

3. La pulsation propre

$$\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{mgl}{\frac{3}{2}MR^2+m(l-R)^2}}}$$

EXERCICE 09 : ***Systèmes oscillatoires amortis à un degré de liberté***

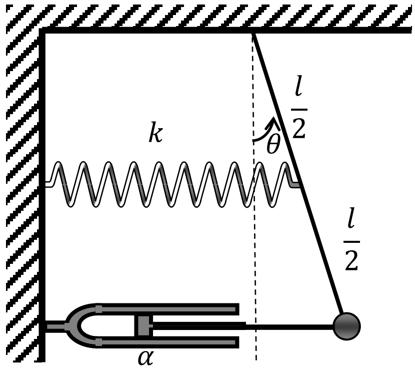


Figure 10.

Figure 10.

1. Nombre de degrés de liberté : 01

Coordonnée généralisée : θ

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l.\theta^\bullet)^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}m.l^2\theta^{\bullet 2}$$

Energie potentielle

$$U = mgh + \frac{1}{2}kx^2$$

En choisissant l'origine de la hauteur au point de fixation (axe de rotation) du pendule.

$$h = -l.\cos\theta \quad \text{et} \quad x = \frac{l}{2}\sin\theta$$

Donc

$$U = -mgl.\cos\theta + \frac{1}{8}kl^2.\sin^2\theta$$

Et pour des petits angles autour de la position d'équilibre $(\theta_0 = 0)$

$$\sin\theta \approx \theta \qquad ; \qquad \cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$$

Donc

$$U = \frac{1}{2}\left(mgl + \frac{1}{4}kl^2\right)\theta^2 - mgl$$

Le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m.l^2\theta^{\bullet 2} - \frac{1}{2}\left(mgl + \frac{1}{4}kl^2\right)\theta^2 + mgl}$$

La fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha v^2 = \frac{1}{2}\alpha l^2\theta^{\bullet 2}$$

2. L'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^\bullet}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -\frac{\partial D}{\partial\theta^\bullet} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(m.l^2\theta^\bullet) - \left(-\left(mgl + \frac{1}{4}kl^2\right).\theta\right) = -\alpha l^2\theta^\bullet$$

D'où l'équation du mouvement

$$\boxed{\theta^{\bullet\bullet} + \frac{\alpha}{m}\theta^\bullet + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{4m}\right)\theta = 0}$$

Donc de la forme

$$q^{\bullet\bullet} + 2\delta.q^\bullet + \omega_0^2.q = 0$$

3. La pulsation propre

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{4m}}}$$

Le facteur d'amortissement

$$\boxed{\delta = \frac{\alpha}{2m}}$$

Figure 11.

1. Nombre de degrés de liberté : 01 (tige solidaire au cylindre)

Coordonnée généralisée : θ

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Avec I le moment d'inertie du cylindre plein

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Condition de roulement sans glissement

$$x = R\theta \quad \Rightarrow \quad V = x^\bullet = R\theta^\bullet$$

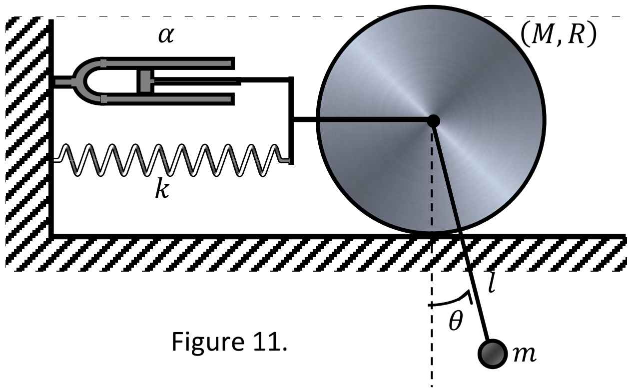


Figure 11.

La vitesse du point matériel (par rapport au référentiel fixe du sol) est obtenue en utilisant la loi de compositions des vitesses

$$\begin{cases} x_m = l.\cos\theta \\ y_m = l.\sin\theta - R\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_m^\bullet = -l\theta^\bullet.\sin\theta \\ y_m^\bullet = l\theta^\bullet.\cos\theta - R\theta^\bullet \end{cases}$$

Et le carré du module de la vitesse

$$v^2 = {x_m^\bullet}^2 + {y_m^\bullet}^2 = (l^2 + R^2 - 2lR.\cos\theta).\theta^{\bullet 2}$$

Et pour de très petits angles autour de la position d'équilibre $\left(\theta_{\text{équ}} = 0\right)$

$$\cos\theta \approx 1$$

Cette approximation (grossière) au premier ordre est fait exprès pour obtenir le lagrangien d'un oscillateur harmonique. Dans ce cas

$$v^2 = (l^2 + R^2 - 2lR).\theta^{\bullet 2} = (l - R)^2.\theta^{\bullet 2}$$

Et l'énergie cinétique devient

$$T = \frac{1}{2}MR^2\theta^{\bullet 2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\theta^{\bullet 2} + \frac{1}{2}m(l-R)^2.\theta^{\bullet 2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2 + m(l-R)^2\right)\theta^{\bullet 2}$$

Energie potentielle

$$U = mgh + MgH + \frac{1}{2}kx^2 = mg(x_m) + \frac{1}{2}kx^2 \quad \Rightarrow \quad U = -mgl.\cos\theta + \frac{1}{2}kR^2\theta^2$$

En choisissant l'origine de la hauteur au point de fixation du pendule (centre de masse du cylindre).

Et pour des petits angles autour de la position d'équilibre $\left(\theta_{\text{équ}} = 0\right)$

$$\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$$

Donc

$$U = \frac{1}{2}(mgl + kR^2).\theta^2 - mgl$$

Le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2 + m(l-R)^2\right)\theta^{\bullet 2} - \frac{1}{2}(mgl + kR^2)\theta^2 + mgl}$$

La fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha v^2 = \frac{1}{2}\alpha x^{\bullet 2} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{1}{2}\alpha R^2\theta^{\bullet 2}$$

2. L'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^{\bullet}}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}=-\frac{\partial D}{\partial \theta^{\bullet}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\left(\frac{3}{2}MR^2+m(l-R)^2\right)\theta^{\bullet}\right)-\left(-(mgl+kR^2)\theta\right)=-\alpha R^2\theta^{\bullet}$$

D'où l'équation du mouvement

$$\boxed{\theta^{\bullet\bullet}+\left(\frac{\alpha R^2}{\frac{3}{2}MR^2+m(l-R)^2}\right)\theta^{\bullet}+\left(\frac{mgl+kR^2}{\frac{3}{2}MR^2+m(l-R)^2}\right)\theta=0}$$

Donc de la forme

$$q^{\bullet\bullet}+2\delta.q^{\bullet}+\omega_0^2.q=0$$

3. La pulsation propre

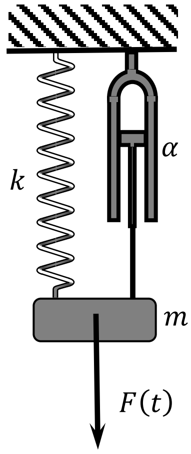
$$\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{mgl+kR^2}{\frac{3}{2}MR^2+m(l-R)^2}}}$$

Le facteur d'amortissement

$$\boxed{\delta=\frac{\alpha R^2}{3MR^2+2m(l-R)^2}}$$

<u>EXERCICE 10</u> : *Systèmes oscillatoires forcés à un degré de liberté*

1. Lagrangien



Un seul degré de liberté : la coordonnée généralisée est (x) la position verticale par rapport au point d'équilibre.

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m.x^{\bullet 2}$$

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Et le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m.x^{\bullet 2} - \frac{1}{2}kx^2}$$

La fonction de dissipation

$$\boxed{D = \frac{1}{2}\alpha v^2 = \frac{1}{2}\alpha x^{\bullet 2}}$$

Force généralisée

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha \bullet \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \qquad \Rightarrow \qquad Q_x = \vec{F} \bullet \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}$$

Avec $\vec{F} = F(t).\vec{e}_x$ et $\vec{r} = x.\vec{e}_x$, ce qui donne : $\boxed{Q_x = F(t)}$

2. Equation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\bullet}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial x^\bullet} + Q_x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}(m.x^\bullet) - (-k.x) = -\alpha.x^\bullet + F(t)$$

D'où l'équation du mouvement

$$\boxed{x^{\bullet\bullet} + \frac{\alpha}{m}x^\bullet + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m}}$$

Donc de la forme

$$q^{\bullet\bullet} + 2\delta.q^\bullet + \omega_0^2.q = A(t)$$

Avec

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad ; \quad \boxed{\delta = \frac{\alpha}{2m}} \quad ; \quad \boxed{A(t) = \frac{F(t)}{m}}$$

La solution générale de l'équation différentielle précédente est une somme de la solution sans second membre et d'une solution particulière qui dépend de $A(t)$.

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t)$$

Toutefois, au bout d'un certain temps, la solution homogène tend vers zéro $(x_H(t) \to 0)$. Nous ne garderons alors que la solution particulière $x_P(t)$.

3. On donne une excitation sinusoïdale : $A(t) = A_0 . e^{i\Omega t}$

D'où la réponse du système est aussi de forme sinusoïdale ayant la même période Ω

$$X(t) = X_0 . e^{i(\Omega t+\varphi)}$$

X_0 et φ sont des valeurs à déterminer.

En remplaçant dans l'équation différentielle, nous avons

$$-\Omega^2 . X_0 . e^{i(\Omega t+\varphi)} + 2\delta . i\Omega . X_0 . e^{i(\Omega t+\varphi)} + \omega_0^2 . X_0 . e^{i(\Omega t+\varphi)} = A_0 . e^{i\Omega t}$$

Donc

$$X_0 . e^{i\varphi} = \frac{A_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + i . 2\delta\Omega}$$

Les deux nombre complexes étant égaux, nous obtenons le module X_0 et l'argument φ :

$$\boxed{X_0(\Omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}} \quad ; \quad \boxed{\tan(\varphi) = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}}$$

4. Résonance

$$X_0(\Omega_R) = X_{0\max}$$

Donc

$$\left.\frac{dX_0(\Omega)}{d\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_R} = -\frac{1}{2} A_0 \frac{2(-2\Omega)(\omega_0^2 - \Omega^2) + 8\delta^2\Omega}{((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2)^{3/2}} = 0$$

En annulant le numérateur

$$\left((\omega_0^2 - \Omega^2) - 2\delta^2\right)\Omega = 0 \qquad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Omega = 0 \\ (\omega_0^2 - \Omega^2) = 2\delta^2 \end{cases}$$

La première valeur correspond à un minimum. Le maximum est obtenu pour la seconde égalité, d'où

$$\boxed{\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}$$

On voit bien que pour obtenir une résonance il faut que le système vérifie

$$\omega_0 > \sqrt{2}\delta$$

En remplaçant la valeur de dans l'amplitude nous trouvons

$$\boxed{X_{0\max} = X_0(\Omega_R) = \frac{A_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}}$$

Et le déphasage pour cette valeur

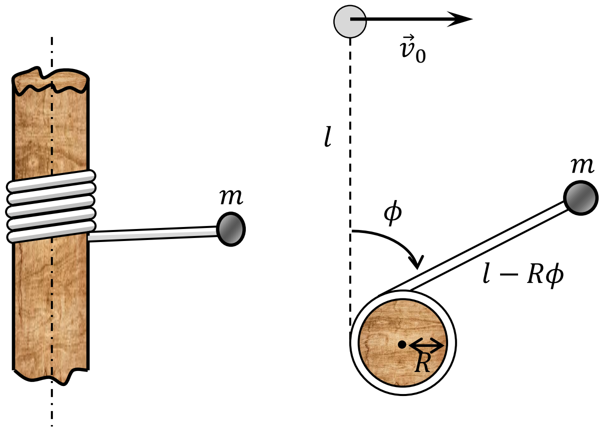
$$\boxed{\tan(\varphi_R) = -\frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}{\delta}}$$

5. Pour un amortissement très faible ($\delta \ll \omega_0$)

$$\boxed{\Omega_R \approx \omega_0} \quad ; \quad \boxed{X_{0\max} \approx \frac{A_0}{2\delta\omega_0}} \quad ; \quad \tan(\varphi_R) \approx -\frac{\omega_0}{\delta} \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi_R \approx -\frac{\pi}{2}}$$

EXERCICE 11 : ***Corde s'enroulant sur un mat***

1. Degrés de libertés :



La position de la masse ponctuelle m est déterminée par l'angle ϕ entre la corde tendue à un instant t et l'axe portant la corde tendue à l'instant initial $(t_0 = 0)$, aisi que par la distance séparant la masse du mat. Comme cette distance peut être donnée par la longueur de la corde qui n'est pas enroulée autour du mat à un instant t donnée qui est elle-même égale à $(r = l - R\phi)$. Donc, un seul paramètre définit la position de la masse m.
Le nombre de degrés de liberté est (01) et la coordonnée généralisée que nous choisissons est ϕ.
Remarquer que la coordonnée ϕ n'est pas une coordonnée habituelle comme l'angle polaire θ par exemple, cependant nous pouvons l'utiliser pour résoudre le problème d'où l'appellation de coordonnée généralisée.

2. Lagrangien :

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m.r^2\omega^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}m.(l - R\phi)^2\phi^{\bullet 2}$$

Energie potentielle $\quad U = mgH = 0 \quad$ (hauteur de la masse constante)

Le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m.(l - R\phi)^2\phi^{\bullet 2}}$$

L'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\bullet}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}\left(m.(l - R\phi)^2\phi^\bullet\right) - \left(-mR.(l - R\phi)\phi^{\bullet 2}\right) = 0$$

Donc

$$-2R.(l - R\phi)\phi^{\bullet 2} + (l - R\phi)^2\phi^{\bullet\bullet} + R.(l - R\phi)\phi^{\bullet 2} = 0$$

D'où l'équation du mouvement

$$\boxed{(l - R\phi)\phi^{\bullet\bullet} - R\phi^{\bullet 2} = 0}$$

Qui s'intègre une première fois, après la multiplication par $2(l - R\phi)\phi^\bullet$

$$(l - R\phi)^2(2\phi^\bullet\phi^{\bullet\bullet}) - \left(2R\phi^\bullet(l - R\phi)\right).\phi^{\bullet 2} = \frac{d}{dt}\left((l - R\phi)^2\phi^{\bullet 2}\right) = 0$$

Donc

$$\boxed{(l - R\phi)^2\phi^{\bullet 2} = \text{constante}}$$

Qui n'est autre que l'énergie totale à $(m/2)$ près. En effet, la position et l'énergie potentielle de la masse m ne dépendent pas explicitement du temps, d'où le Hamiltonien du système est égal à l'énergie mécanique totale. De plus, la lagrangien ne dépend pas explicitement du temps, alors cet Hamiltonien est conservé.

3. Equation horaire du mouvement

En utilisant les conditions initiales : $(t_0 = 0 \;;\; \phi = 0 \;;\; v_0 = l.\phi_0^\bullet)$
Donc

$$(l - R\phi)^2 \phi^{\bullet 2} = \text{constante} = v_0^2$$

En prenant la racine carrée

$$(l - R\phi)\phi^\bullet = v_0$$

En multipliant par $(-R)$ et en intégrant par rapport au temps

$$\int (l - R\phi)(-R\phi^\bullet).dt = \frac{1}{2}(l - R\phi)^2 = -Rv_0.t + C$$

La condition initiale $(t_0 = 0 \;;\; \phi = 0)$ donne

$$C = l^2/2$$

D'où

$$(l - R\phi)^2 = l^2 - 2Rv_0.t$$

Et

$$\boxed{\phi(t) = \frac{l}{R} - \frac{1}{R}\sqrt{l^2 - 2Rv_0.t}}$$

4. Temps total du mouvement :

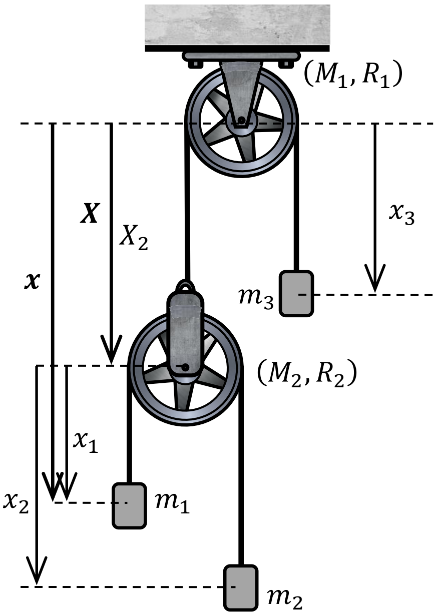
La masse s'arrête quand la corde s'enroule complètement autour du mât, c'est-à-dire :
$r = l - R\phi = 0$ ou $\phi = l/R$. Dans ce cas

$$\sqrt{l^2 - 2Rv_0.\tau} = 0$$

Et

$$\boxed{\tau = \frac{l^2}{2Rv_0}}$$

<u>EXERCICE 13</u> : *Système à deux poulies*



1. Conditions de liaison (04) :

$$\begin{cases} X_2 = R_1.\theta_1 \\ X_2 + x_3 = C_1 = \text{constante} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x_1 = R_2.\theta_2 \\ x_1 + x_2 = C_2 = \text{constante} \end{cases}$$

Et les vitesses

$$\begin{cases} \dot{X}_2 = R_1.\dot{\theta}_1 \\ \dot{X}_2 = -\dot{x}_3 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = R_2.\dot{\theta}_2 \\ \dot{x}_1 = -\dot{x}_2 \end{cases}$$

2. Degrés de libertés : 02

Coordonnées généralisées : (x, X)

$$\begin{cases} X_2 = X \\ X_2 + x_1 = x \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} X_2 = X \\ x_1 = x - X \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \theta_1 = X/R_1 \\ x_3 = C_1 - X \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \theta_2 = (x - X)/R_2 \\ x_2 = C_2 - x + X \end{cases}$$

En dérivant

$$\begin{cases} \dot{X}_2 = \dot{X} \\ \dot{x}_1 = \dot{x} - \dot{X} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \dot{\theta}_1 = \dot{X}/R_1 \\ \dot{x}_3 = -\dot{X} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \dot{\theta}_2 = (\dot{x} - \dot{X})/R_2 \\ \dot{x}_2 = -\dot{x} + \dot{X} \end{cases}$$

3. Lagrangien

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_3 v_3^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}M_2 V_2^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2$$

Les vitesses

$$\begin{cases} v_1 = \dot{x}_1 + \dot{X}_2 = \dot{x} \\ v_2 = \dot{x}_2 + \dot{X}_2 = -\dot{x} + 2\dot{X} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} v_3 = \dot{x}_3 = -\dot{X} \\ V_2 = \dot{X}_2 = \dot{X} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \omega_1 = \dot{\theta}_1 = \dot{X}/R_1 \\ \omega_2 = \dot{\theta}_2 = (\dot{x} - \dot{X})/R_2 \end{cases}$$

D'où

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(-\dot{x} + 2\dot{X})^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{X}^2 + \frac{1}{2}\frac{I_1}{R_1^2}\dot{X}^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{X}^2 + \frac{1}{2}\frac{I_2}{R_2^2}(\dot{x} - \dot{X})^2$$

Les moments d'inertie

$$I_1 = \frac{1}{2}M_1 R_1^2 \quad ; \quad I_2 = \frac{1}{2}M_2 R_2^2$$

Nous trouvons

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M_2\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(4m_2 + m_3 + \frac{1}{2}M_1 + \frac{3}{2}M_2\right)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}(-4m_2 - M_2)\dot{x}\dot{X}}$$

Energie potentielle

$$U = m_1 g.h_1 + m_2 g.h_2 + m_3 g.h_3 + M_2 g.H_2$$

Avec, en prenant comme ***origine des hauteurs l'horizontale passant par l'axe de la poulie fixe***.

$$\begin{cases} h_1 = -(x_1 + X_2) = -x \\ h_2 = -(x_2 + X_2) = -C_2 + x - 2X \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} h_3 = -x_3 = -C_1 + X \\ H_2 = -X_2 = -X \end{cases}$$

Donc

$$\boxed{U = (m_2 - m_1)g.x + (m_3 - 2m_2 - M_2)g.X + \text{constante}}$$

Et le Lagrangien : $\mathcal{L} = T - U$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M_2\right)x^{\bullet 2} + \frac{1}{2}\left(4m_2 + m_3 + \frac{1}{2}M_1 + \frac{3}{2}M_2\right)X^{\bullet 2} + \frac{1}{2}(-4m_2 - M_2)x^{\bullet}X^{\bullet}$$
$$-(m_2 - m_1)g.x - (m_3 - 2m_2 - M_2)g.X$$

De la forme

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}A.x^{\bullet 2} + \frac{1}{2}B.X^{\bullet 2} + C.x^{\bullet}X^{\bullet} - D.x - E.X}$$

4. Equations de Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\bullet}}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\bullet}}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(A.x^{\bullet} + C.X^{\bullet}) + D = 0 \\ \dfrac{d}{dt}(B.X^{\bullet} + C.x^{\bullet}) + E = 0 \end{cases}$$

D'où le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} A.x^{\bullet\bullet} + C.X^{\bullet\bullet} = -D \\ C.x^{\bullet\bullet} + B.X^{\bullet\bullet} = -E \end{cases}$$

Dont les solutions sont

$$\boxed{x^{\bullet\bullet} = \frac{-D.B + C.E}{AB - C^2}} \quad ; \quad \boxed{X^{\bullet\bullet} = \frac{-E.A + C.D}{AB - C^2}}$$

En remplaçant

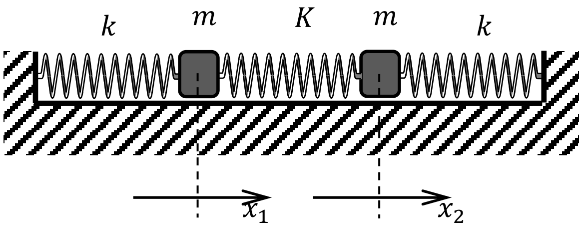
$$\boxed{x^{\bullet\bullet} = \frac{-2(m_2 - m_1).(8m_2 + 2m_3 + M_1 + 3M_2) + 2(-4m_2 - M_2).(m_3 - 2m_2 - M_2)}{(2m_1 + 2m_2 + M_2)(8m_2 + 2m_3 + M_1 + 3M_2) - (4m_2 + M_2)^2}g}$$

$$\boxed{X^{\bullet\bullet} = \frac{-2(m_3 - 2m_2 - M_2).(2m_1 + 2m_2 + M_2) + 2(-4m_2 - M_2).(m_2 - m_1)}{(2m_1 + 2m_2 + M_2)(8m_2 + 2m_3 + M_1 + 3M_2) - (4m_2 + M_2)^2}g}$$

Qui sont des ***constantes***, donc tous les mouvements sont uniformément variés.

EXERCICE 14 : ***Systèmes oscillatoires libres à deux degrés de liberté***

Figure 16.



Lagrangien

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m.\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m.\dot{x}_2^2$$

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2$$

Et le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2}$$

Equations de Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}(m\dot{x}_1) - \left(-kx_1 - K(x_1 - x_2)\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}(m\dot{x}_2) - \left(-kx_2 + K(x_1 - x_2)\right) = 0 \end{cases}$$

D'où le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k + K)x_1 - Kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + (k + K)x_2 - Kx_1 = 0 \end{cases}$$

En posant les solutions particulières de ces équations sous la forme :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1.\sin(\omega t + \varphi) \\ x_2(t) = A_2.\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Et en remplaçant dans les équations différentielles précédentes, nous trouvons

$$\begin{cases} (k + K - m\omega^2)A_1 - KA_2 = 0 \\ -KA_1 + (k + K - m\omega^2)A_2 = 0 \end{cases}$$

Ce qui nous ramène à un système linéaire d'équation sans second membre qui n'admet de solutions non nulles que dans le cas où le déterminant est égal à zéro.

$$\begin{vmatrix} k + K - m\omega^2 & -K \\ -K & k + K - m\omega^2 \end{vmatrix} = (k + K - m\omega^2)^2 - K^2 = 0$$

Ce qui donne

$$k + K - m\omega^2 = \pm K$$

Dont les solutions sont

$$\boxed{\omega_f = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad ; \quad \boxed{\omega_h = \sqrt{\frac{k + 2K}{m}}}$$

ω_f est la pulsation fondamentale et ω_h est appelée harmonique.

En remplaçant dans le système d'équations linéaires nous obtenons

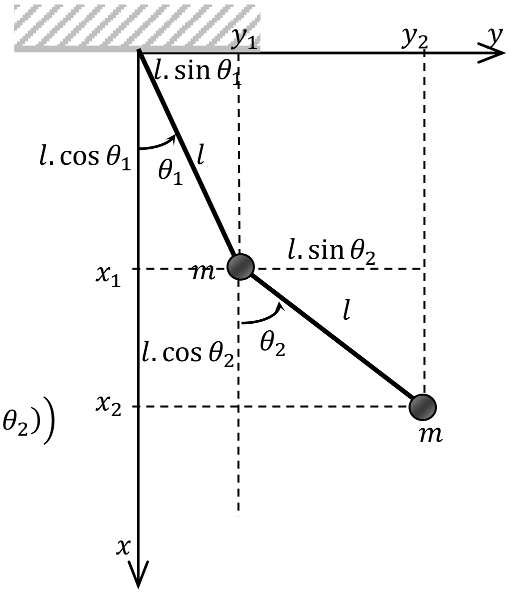
$$\begin{cases} \text{pour} \quad \omega = \omega_f \quad : \quad A_1 = A_2 \\ \text{pour} \quad \omega = \omega_h \quad : \quad A_1 = -A_2 \end{cases}$$

Et la solution générale est une somme des deux ondes

$$\begin{cases} x_1(t) = A_f.\sin\left(\omega_f t + \varphi_f\right) + A_h.\sin(\omega_h t + \varphi_h) \\ x_2(t) = A_f.\sin\left(\omega_f t + \varphi_f\right) - A_h.\sin(\omega_h t + \varphi_h) \end{cases}$$

Les constantes A_f, A_h, φ_f, φ_h sont calculées à partir des conditions initiales $x_1(0)$, $x_2(0)$, $\dot{x}_1(0)$, $\dot{x}_2(0)$.

<u>Figure 17.</u>



Positions des deux masses

$$\begin{cases} x_1 = l.\cos\theta_1 \\ y_1 = l.\sin\theta_1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x_2 = l.\cos\theta_1 + l.\cos\theta_2 \\ y_2 = l.\sin\theta_1 + l.\sin\theta_2 \end{cases}$$

Les vitesses des deux masses

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -l\dot{\theta}_1.\sin\theta_1 \\ \dot{y}_1 = l\dot{\theta}_1.\cos\theta_1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = -l.(\dot{\theta}_1.\sin\theta_1 + \dot{\theta}_2.\sin\theta_2) \\ \dot{y}_2 = l.(\dot{\theta}_1.\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2.\cos\theta_2) \end{cases}$$

Et le carré de leurs modules

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l^2\dot{\theta}_1^2$$

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l^2\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)\right)$$

Ou

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l^2\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right)$$

Lagrangien

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}ml^2.\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2.\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right)$$

Energie potentielle

$$U = m_1g.h_1 + m_2g.h_2$$

Avec

$$h_1 = -x_1 = -l.\cos\theta_1 \quad ; \quad h_2 = -x_2 = -l.(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

Donc

$$U = -mgl.(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

Et le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}ml^2.\left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right) + mgl.(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2)}$$

Pour des angles très petits, nous pouvons faire les approximations suivantes

$$\cos\theta_1 \approx 1 - \theta_1^2/2 \quad ; \quad \cos\theta_1 \approx 1 - \theta_2^2/2 \quad ; \quad \cos(\theta_1 - \theta_2) \approx 1$$

Et le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2.\left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right) - \frac{1}{2}mgl.(2\theta_1^2 + \theta_2^2) + 3mgl}$$

Equations de Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(ml^2.(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\right) - (-2mgl.\theta_1) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(ml^2.(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1)\right) - (-mgl.\theta_2) = 0 \end{cases}$$

D'où le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} 2l.\ddot{\theta}_1 + l.\ddot{\theta}_2 + 2g.\theta_1 = 0 \\ l.\ddot{\theta}_1 + l.\ddot{\theta}_2 + g.\theta_2 = 0 \end{cases}$$

En posant les solutions particulières de ces équations sous la forme :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1.\sin(\omega t + \varphi) \\ \theta_2(t) = A_2.\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Et en remplaçant dans les équations différentielles précédentes, nous trouvons

$$\begin{cases} 2(g - l\omega^2).A_1 - l\omega^2.A_2 = 0 \\ -l\omega^2.A_1 + (g - l\omega^2).A_2 = 0 \end{cases}$$

Ce qui nous ramène à un système linéaire d'équation sans second membre qui n'admet de solutions non nulles que dans le cas où le déterminant est égal à zéro.

$$\begin{vmatrix} 2(g - l\omega^2) & l \\ l & g - l\omega^2 \end{vmatrix} = 2(g - l\omega^2)^2 - (-l\omega^2)^2 = 0$$

Ce qui donne

$$\sqrt{2}(g - l\omega^2) = \pm l\omega^2$$

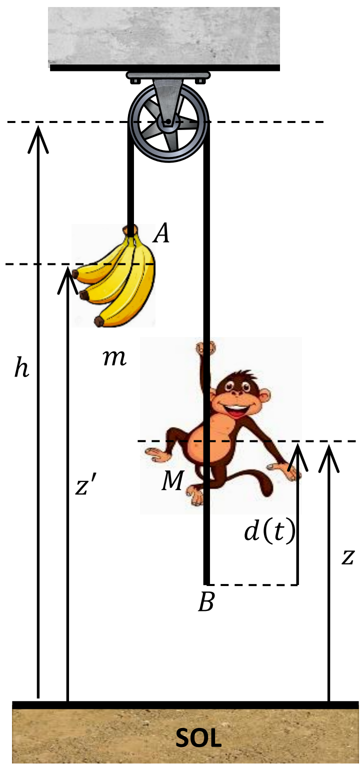
D'où les pulsations propres (fondamentale et harmonique).

$$\boxed{\omega_f = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}}\right)\sqrt{\frac{g}{l}}} \quad ; \quad \boxed{\omega_h = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}}\right)\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

En remplaçant dans le système d'équations linéaires, nous trouvons

$$\begin{array}{llll} \text{pour} & \omega = \omega_f & ; & A_2 = +\sqrt{2}A_1 \\ \text{pour} & \omega = \omega_h & ; & A_2 = -\sqrt{2}A_1 \end{array}$$

EXERCICE 15 : ***Singe et bananes***



1. Schéma ci-contre

2. Contrainte

$$(h - z) + d(t) + (h - z') = l$$

Que nous pouvons réécrire

$$\boxed{z' = 2h - l - z + d(t)}$$

3. Nombre de degrés de liberté : 01.
   Coordonnée généralisée : z.

4. Lagrangien

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

Avec

$$\begin{cases} v = z'^{\bullet} = -z^{\bullet} + d^{\bullet}(t) \\ V = z^{\bullet} \end{cases}$$

Donc

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m(z^{\bullet} - d^{\bullet})^2 + \frac{1}{2}Mz^{\bullet 2}}$$

Energie potentielle $U = Mgh_{\text{singe}} + mgh_{\text{bananes}}$

$$U = Mgz + mgz' \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = (M - m)gz + mg.d(t) + mg(2h - l)}$$

Le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m(z^{\bullet} - d^{\bullet})^2 + \frac{1}{2}Mz^{\bullet 2} - (M - m)gz - mg.d(t) - mg(2h - l)}$$

5. L'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^{\bullet}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{d}{dt}(m(z^{\bullet} - d^{\bullet}) + Mz^{\bullet}) - (-(M - m)g) = 0$$

Donc

$$m(z^{\bullet\bullet} - d^{\bullet\bullet}) + Mz^{\bullet\bullet} + (M - m)g = 0$$

D'où l'équation du mouvement

$$\boxed{(m + M).z^{\bullet\bullet} - m.d^{\bullet\bullet} = (m - M)g}$$

En intégrant une première fois, nous trouvons

$$(m + M).z^{\bullet} - m.d^{\bullet} = (m - M)g.t + C_1$$

C_1 est constante d'intégration que nous déterminons à partir des conditions initiales

$$(t = 0\,;\ z^{\bullet}(0) = 0\,;\ d^{\bullet}(0) = 0) \qquad \text{(système au repos)}$$

D'où

$$C_1 = 0$$

Et donc

$$(m + M).z^{\bullet} - m.d^{\bullet} = (m - M)g.t$$

En intégrant une seconde fois

$$(m+M).z - m.d(t) = \frac{1}{2}(m-M)g.t^2 + C_2$$

C_2 est constante d'intégration que nous déterminons à partir des conditions initiales

$$(t=0\,;\ z(0)=z_0\,;\ d(0)=0)$$

D'où

$$C_2 = (m+M).z_0$$

Et donc

$$(m+M).z - m.d(t) = \frac{1}{2}(m-M)g.t^2 + (m+M).z_0$$

Nous trouvons finalement

$$\boxed{z(t) = \frac{1}{2}\frac{m-M}{m+M}g.t^2 + z_0 + \frac{m}{m+M}d(t)}$$

6. Pour $m = M$:

$$z(t) = z_0 + \frac{1}{2}d(t)$$

La séparation verticale

$$\Delta z = z' - z = 2h - l - 2z + d(t)$$

Donc

$$\Delta z = 2h - l - 2\left(z_0 + \frac{1}{2}d(t)\right) + d(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta z = 2h - l - 2z_0 = \text{constante}}$$

7. Dans le cas $m > M$ avec $z(0) = h/4$, $l = h$ et $d(t) = a.t^2$ avec $a = \text{Constante} > 0$.

$$z(t) = \frac{1}{2}\frac{m-M}{m+M}g.t^2 + \frac{h}{4} + \frac{m}{m+M}a.t^2$$

Et

$$\Delta z = z' - z = 2h - l - 2z + d(t)$$

Donc

$$\Delta z = 2h - l - 2\left(\frac{1}{2}\frac{m-M}{m+M}g.t^2 + \frac{h}{4} + \frac{m}{m+M}a.t^2\right) + a.t^2$$

$$\Delta z = -\frac{m-M}{m+M}(g+a).t^2 + \frac{h}{2}$$

Le singe atteint les bananes quand cette séparation verticale s'annule, c'est-à-dire à :

$$\boxed{t_1 = \sqrt{\frac{h}{2}\left(\frac{m+M}{m-M}\right)\frac{1}{g+a}}} \qquad \text{et} \qquad t_2 = -\sqrt{\frac{h}{2}\left(\frac{m+M}{m-M}\right)\frac{1}{g+a}} \quad \text{(impossible)}$$