SÉRIE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 02
COMPLÉMENT : POSITIONS D'ÉQUILIBRE

Le formalisme de Lagrange est largement utilisé sans le cas des systèmes dont le mouvement se présente sous la forme d'oscillations de petites amplitudes autour d'une position d'équilibre.

La position d'équilibre dans le cas d'un système à un degré de liberté est donnée par :

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_{q=q_{\text{équil}}} = 0$$

q est la coordonnée généralisée associée au degré de liberté et $U(q)$ est l'énergie potentiel du système.

$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right\|_{q=q_{\text{équil}}} > 0$	Position d'équilibre stable
$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right\|_{q=q_{\text{équil}}} < 0$	Position d'équilibre instable

Pour obtenir des oscillations autour de la position d'équilibre $\left(q_{\text{équil}}\right)$ il faut que le système retourne à la position d'équilibre quand il est légèrement écarté de celle-ci. Donc il faut que la position d'équilibre soit stable. En se limitant au deuxième degré du développement limité de l'énergie potentielle au voisinage de la position d'équilibre

$$U(q) \approx U\left(q_{\text{équil}}\right) + \left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_{q=q_{\text{équil}}} \left(q - q_{\text{équil}}\right) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q=q_{\text{équil}}} \left(q - q_{\text{équil}}\right)^2 + \cdots$$

Le premier terme est constant et peut être donc omis, le deuxième terme étant nul l'énergie potentielle peut être écrite sous la forme caractéristique de l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique

$$U(\bar{q}) \approx \frac{1}{2} A.\bar{q}^2$$

Avec $A = \partial^2 U/\partial q^2|_{q=q_{\text{équil}}}$ est une constante positive et $\bar{q} = q - q_{\text{équil}}$ est la nouvelle coordonnée définie par rapport à l'équilibre.

Pour des systèmes à plusieurs degrés de liberté, les positions d'équilibre sont données par

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_{q_i=q_{i_{\text{équil}}}} = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots , d$$

Et le développement au second ordre de l'énergie potentielle

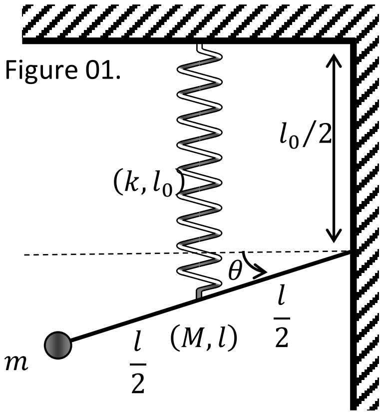
$$U(\{\bar{q}_i\}) \approx \frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}.\bar{q}_i\bar{q}_j \qquad \text{avec} \qquad i,j = 1, \dots , d$$

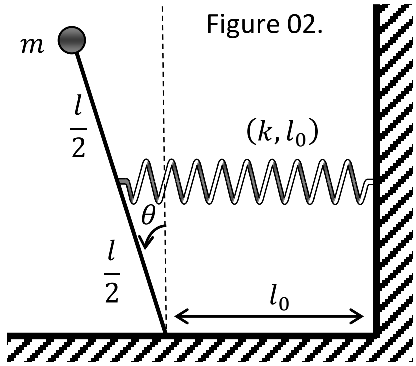
Avec

$$A_{ij} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{q}_i \partial \bar{q}_j}\right|_{\bar{q}_i=\bar{q}_j=0} \qquad \text{et} \qquad \bar{q}_{i,j} = q_{i,j} - q_{i,j_{\text{équil}}}$$

EXERCICE 01 :

1. Trouver les positions d'équilibre pour les deux systèmes représenté dans les figures 01 et 02.
2. Pour le système de la figure 02, écrire l'énergie potentielle dans le cas des oscillations de petites amplitudes autours de la position d'équilibre puis déduire la pulsation des petites oscillations.





CORRIGÉ DE L'EXERCICE 01 :

Système de la figure 01.

Energie potentielle

$$U = mgh + MgH + \frac{1}{2}k\left(-\frac{l_0}{2} + x\right)^2$$

En choisissant l'origine de la hauteur au point de fixation (axe de rotation) du pendule.

$$h = -l.\sin\theta \quad ; \quad H = -\frac{l}{2}\sin\theta \quad \text{et} \quad x = \frac{l}{2}\sin\theta$$

Donc

$$U = -\left(m + \frac{1}{2}M\right)gl.\sin\theta + \frac{1}{8}k(-l_0 + l.\sin\theta)^2$$

Position d'équilibre

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_{\text{équil}}} = 0$$

Donc

$$\left.-\left(m + \frac{1}{2}M\right)gl.\cos\theta + \frac{1}{4}kl(-l_0 + l.\sin\theta)\cos\theta\right|_{\theta=\theta_{\text{équil}}} = 0$$

$$\frac{1}{2}l\left(-(2m+M)g + \frac{1}{2}k\left(-l_0 + l.\sin\theta_{\text{équil}}\right)\right)\cos\theta_{\text{équil}} = 0$$

Et les positions d'équilibre

$$\begin{cases} \cos\theta_{\text{équil}} = 0 & \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{\text{équil}} = \pm\frac{\pi}{2}} \\ -(2m+M)g + \frac{1}{2}k\left(-l_0 + l.\sin\theta_{\text{équil}}\right) = 0 & \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{\text{équil}} = \arcsin\left(\frac{(2m+M)g + kl_0}{kl}\right)} \end{cases}$$

Système de la figure 02.

Energie potentielle

$$U = mgh + \frac{1}{2}kx^2$$

En choisissant l'origine de la hauteur au point de fixation (axe de rotation) du pendule.

$$h = l.\cos\theta \qquad \text{et} \quad x = \frac{l}{2}\sin\theta$$

Donc

$$U = mgl.\cos\theta + \frac{1}{8}kl^2\sin^2\theta$$

Positions d'équilibre

$$\left.\frac{\partial U}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_{\text{équil}}} = -mgl.\sin\theta + \frac{1}{4}kl^2\sin\theta\,.\cos\theta\Big|_{\theta=\theta_{\text{équil}}} = 0$$

Donc

$$l\left(-mg + \frac{1}{4}kl.\cos\theta_{\text{équil}}\right).\sin\theta_{\text{équil}} = 0$$

D'où

$$\begin{cases} \sin\theta_{\text{équil}} = 0 & \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{\text{équil}} = 0} \\ \cos\theta_{\text{équil}} = \dfrac{4mg}{kl} & \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{\text{équil}} = \pm\arccos\left(\dfrac{4mg}{kl}\right)} \end{cases}$$

Discutons la stabilité de ces positions d'équilibre

Pour $\boldsymbol{\theta_{\text{équil}} = 0}$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0} = -mgl.\cos\theta + \frac{1}{4}kl^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\Big|_{\theta=0} = l\left(-mg + \frac{1}{4}kl\right)$$

D'où

$$\begin{cases} \text{Si} \quad kl > 4mg \quad \Rightarrow \quad \left.\dfrac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0} > 0 \qquad \text{l'équilibre est stable} \\ \text{Si} \quad kl < 4mg \quad \Rightarrow \quad \left.\dfrac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0} < 0 \qquad \text{l'équilibre est instable} \end{cases}$$

Pour $\boldsymbol{\theta_{\text{équil}} = \pm\arccos(4mg/kl)}$ ou $\cos\theta_{\text{équil}} = 4mg/kl$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\theta_{\text{équil}}} = -mgl.\cos\theta + \frac{1}{4}kl^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\Big|_{\theta=\theta_{\text{équil}}}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\theta_{\text{équil}}} = -mgl.\cos\theta_{\text{équil}} + \frac{1}{4}kl^2\left(2.\cos^2\theta_{\text{équil}} - 1\right) = -mgl.\frac{4mg}{kl} + \frac{1}{4}kl^2\left(2.\left(\frac{4mg}{kl}\right)^2 - 1\right)$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\theta_{\text{équil}}} = -4\frac{m^2g^2}{k} + 8\frac{m^2g^2}{k} - \frac{1}{4}\frac{k^2l^2}{k} = \frac{16.m^2g^2 - k^2l^2}{4k}$$

Comme nous devons avoir $kl \geq 4mg$ pour que $\cos\theta_{\text{équil}} = 4mg/kl$ soit définit, donc

$$kl > 4mg \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0} < 0 \qquad \text{l'équilibre est instable}$$

Comme le mouvement oscillatoire n'est obtenu que dans le cas d'un équilibre stable donc

$$\theta_{\text{équil}} = 0 \qquad \text{avec} \qquad kl > 4mg$$

Dans ce cas l'énergie potentielle s'écrit au deuxième ordre

$$U(\theta) \approx U(\theta_{\text{équil}}) + \left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_{\text{équil}}} (\theta - \theta_{\text{équil}}) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\theta_{\text{équil}}} (\theta - \theta_{\text{équil}})^2 + \cdots$$

$$U(\theta) \approx U(0) + \left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} \theta + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} \theta^2 + \cdots$$

Comme

$$U(0) = mgl = \text{constante} \quad ; \quad \left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0 \quad ; \quad \left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} = \frac{1}{4} l(kl - 4mg)$$

$$\boxed{U(\theta) \approx mgl + \frac{1}{2}\frac{1}{4} l(kl - 4mg)\theta^2}$$

Le lagrangien du système

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} ml^2 \theta^{\bullet 2} - \frac{1}{2}\frac{1}{4} l(kl - 4mg)\theta^2 - mgl$$

L'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^\bullet}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}(ml^2\theta^\bullet) - \left(-\frac{1}{4} l(kl - 4mg)\theta\right) = 0$$

D'où l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique

$$\theta^{\bullet\bullet} + \omega_0^2.\theta = 0 \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\omega_0 = \left(\frac{kl - 4mg}{4ml}\right)^{1/2}}$$

<u>EXERCICE 02</u> :

Une perle de masse m, que nous assimilerons à un point matériel, glisse sans frottement le long d'un anneau de rayon R contenu dans le plan vertical (figures 03 et 04). Elle est soumise a son poids, ainsi qu'à la force de rappel d'un ressort, fixé en A, de constante de raideur k et de longueur à vide nulle ($l_0 = 0$). La position de la bille est repérée par l'angle θ sur la figure.

Calculer dans chaque cas l'expression de l'énergie potentielle $U(\theta)$ et trouver les positions d'équilibre données par $\partial U(\theta)/\partial\theta = 0$.

Figure 03.

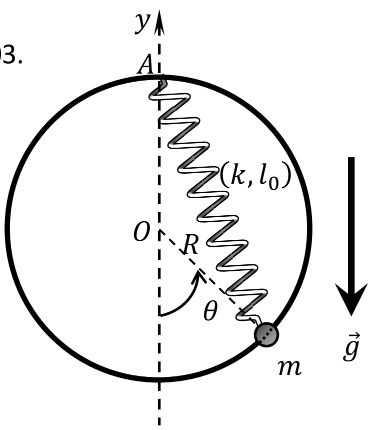


Figure 04.