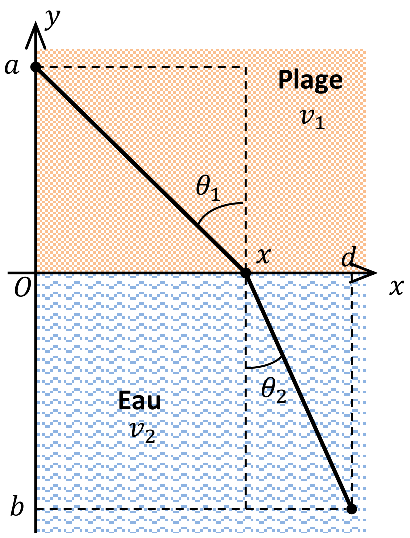
SOLUTIONS DE LA SÉRIE DE TD N° 03
CALCUL VARIATIONNEL

EXERCICE 01 : ***Problème du nageur.***

Comme le mouvement du sauveteur est rectiligne uniforme sur la plage et dans l'eau



$$l_1 = v_1 . t_1 \quad \text{et} \quad l_2 = v_2 . t_2$$

Donc

$$t_1 = \frac{l_1}{v_1} = \frac{1}{v_1}\sqrt{x^2 + a^2}$$

Et

$$t_2 = \frac{l_2}{v_2} = \frac{1}{v_2}\sqrt{(x-d)^2 + b^2}$$

Et le temps total pour arriver au nageur

$$t = t_1 + t_2 = \frac{1}{v_1}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{(x-d)^2 + b^2}$$

Ce temps devant être minimum, nous écrivons alors

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

Ce qui donne

$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{1}{v_2}\frac{(x-d)}{\sqrt{(x-d)^2 + b^2}} = 0$$

Ou bien

$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{v_2}\frac{(d-x)}{\sqrt{(x-d)^2 + b^2}}$$

Nous retrouvons alors la loi de Descartes pour la réfraction de la lumière

$$\boxed{\frac{1}{v_1}\sin\theta_1 = \frac{1}{v_2}\sin\theta_2}$$

EXERCICE 02 : ***Principe de Fermat.***

1. Le principe de Fermat stipule que le temps de parcours de la lumière est minimum entre deux points. La vitesse de la lumière dans un milieu d'indice n étant

$$v = \frac{c}{n(x,y)} = \frac{dl}{dt}$$

Donc

$$t = \frac{1}{c}\int n(x,y).\,dl$$

Avec

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}$$

D'où la fonctionnelle

$$t[y(x)] = \frac{1}{c}\int_{x_1}^{x_2} n(x,y).\sqrt{1 + y'^2}.\,dx$$

Tel que la fonction

$$f(y, y', x) = n(x,y).\sqrt{1 + y'^2}$$

Doit vérifier l'équation d'Euler-Lagrange pour que la fonctionnelle précédente soit minimale.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

2. En prenant :

$$n(x,y) = \sqrt{n_0 - a.x^2} \qquad \text{avec} \qquad (n_0 > 1 \text{ et } a > 0)$$

Nous avons

$$f(y, y', x) = \sqrt{n_0 - a.x^2}.\sqrt{1 + y'^2}$$

En dérivant

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \sqrt{n_0 - a.x^2}\,\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Donc

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

Et

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \sqrt{n_0 - a.x^2}\,\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = b = \text{constante}$$

La constante b est déterminée à partir des conditions initiales :

A $\quad t = 0 \quad ; \quad x = y = 0 \quad \text{et} \quad y' = \tan\alpha \quad \Rightarrow \quad 1 + y'^2 = 1/\cos^2\alpha$

Ce qui donne

$$b = \sqrt{n_0}.\sin\alpha$$

Donc

$$\sqrt{n_0 - a.x^2}\,\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \sqrt{n_0}.\sin\alpha$$

Et l'équation différentielle du premier ordre est donnée par :

$$(n_0 - a.x^2).y'^2 = (1 + y'^2).n_0.\sin^2\alpha$$

$$(n_0.\cos^2\alpha - a.x^2).y'^2 = n_0.\sin^2\alpha$$

Donc

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{n_0.\sin^2\alpha}}{\sqrt{n_0.\cos^2\alpha - a.x^2}}$$

D'où l'intégrale

$$y = \tan\alpha.\int\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a}{n_0.\cos^2\alpha}x^2}}dx$$

En posant le changement de variable

$$u = \sqrt{\frac{a}{n_0.\cos^2\alpha}}x \quad ; \quad dx = \sqrt{\frac{n_0.\cos^2\alpha}{a}}du$$

L'intégrale précédente s'écrit

$$y = \sqrt{\frac{n_0}{a}}\sin\alpha.\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \sqrt{\frac{n_0}{a}}\sin\alpha.\mathrm{arcsinh}(u) + \text{constante}$$

Et

$$y = \sqrt{\frac{n_0}{a}}\sin\alpha.\mathrm{arcsinh}\left(\sqrt{\frac{a}{n_0.\cos^2\alpha}}x\right) + c$$

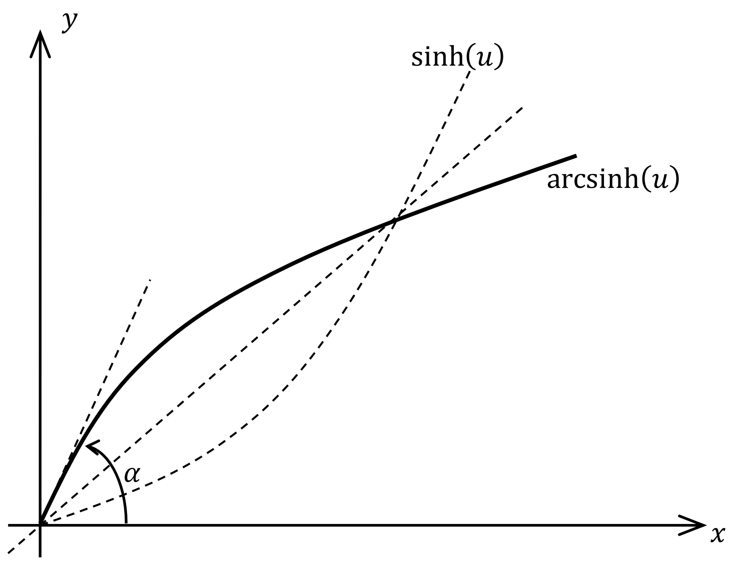
Conditions initiales

$$t = 0 \quad ; \quad x = y = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

Finalement

$$\boxed{y = \sqrt{\frac{n_0}{a}}\sin\alpha.\mathrm{arcsinh}\left(\sqrt{\frac{a}{n_0.\cos^2\alpha}}x\right)}$$

3. Représentation :



EXERCICE 04 : ***Brachistochrone.***

1. Cherchons la courbe dans le plan qui permet d'obtenir un temps de parcours minimum

$$dl = v.dt \qquad\qquad dt = \frac{dl}{v} = \frac{1}{v}\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

La vitesse est remplacée par son expression en fiction de la hauteur en utilisant la conservation de l'énergie mécanique totale (frottements nuls)

$$E_m = \frac{1}{2}m.v^2 + mgh = mg.y_0 \qquad \text{avec} \quad h = y$$

D'où

$$v = \sqrt{2g.(y_0 - y)}$$

Le temps de parcours est donné par la fonctionnelle

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x=0}^{x=x_0}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y_0 - y}}.dx$$

Pour obtenir le minimum de cette fonctionnelle il faut que la fonction $f(y, y', x)$ vérifie l'équation d'Euler-Lagrange

$$f(y, y', x) = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y_0 - y}}$$

Comme $f(y, y')$ ne dépend pas explicitement de x, alors nous pouvons utiliser la formule de Beltrami.

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = a$$

a est une constante d'intégration, donc

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y_0 - y}} - y'\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{y_0 - y}} = a \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{y_0 - y}} = a$$

D'où

$$\frac{1}{(1+y'^2)(y_0 - y)} = a^2 \qquad \text{et} \quad 1 + y'^2 = \frac{1}{a^2(y_0 - y)}$$

En utilisant le changement de variable $y' = \tan(\theta/2)$

$$1 + y'^2 = \frac{1}{\cos^2(\theta/2)} = \frac{1}{a^2(y_0 - y)}$$

Donc

$$y = y_0 - \frac{1}{a^2}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

En utilisant $2\cos^2(\theta/2) = 1 + \cos\theta$

$$y = y_0 - \frac{1}{2a^2}(1 + \cos\theta)$$

Et la dérivée y' s'écrit

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad y' = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2a^2}\sin\theta\,.\frac{d\theta}{dx}$$

En inversant et en utilisant $\sin\theta = 2\sin(\theta/2).\cos(\theta/2)$

$$dx = \frac{1}{2a^2}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right).d\theta$$

Comme $2\cos^2(\theta/2) = 1 + \cos\theta$

$$dx = \frac{1}{2a^2}(1+\cos\theta).d\theta$$

Et

$$x = \frac{1}{2a^2}(\theta + \sin\theta) + b$$

La trajectoire est alors donné par les équations paramétriques (en fonction du paramètre θ) suivantes :

$$\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{1}{2a^2}(\theta+\sin\theta) + b \\ y = y_0 - \dfrac{1}{2a^2}(1+\cos\theta) \end{cases}}$$

a et b sont des constantes d'intégrations déterminées à partir des conditions limites.

Conditions limites

$$(x = 0, y = y_0)$$

D'où

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{1}{2a^2}(\theta+\sin\theta) + b \\ y_0 = y_0 - \dfrac{1}{2a^2}(1+\cos\theta) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \theta = \pm\pi \quad \text{et} \quad b = \mp\frac{\pi}{2a^2}$$

$$(x = x_0, y = 0) \quad \text{avec} \quad x_0 = \frac{\pi}{2}y_0$$

D'où

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{2a^2}(\theta+\sin\theta) + \dfrac{\pi}{2a^2} \\ 0 = y_0 - \dfrac{1}{2a^2}(1+\cos\theta) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \theta = 0 \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{1}{a^2}$$

Finalement, nous trouvons

$$\begin{cases} x = \dfrac{y_0}{2}(\pi + \theta + \sin\theta) \\ y = \dfrac{y_0}{2}(1-\cos\theta) \end{cases} \quad \text{avec} \quad -\pi \le \theta \le 0$$

Ou en posant $\pi + \theta = \phi$

$$\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{y_0}{2}(\phi - \sin\phi) \\ y = \dfrac{y_0}{2}(1+\cos\phi) \end{cases}} \quad \text{avec} \quad 0 \le \phi \le \pi$$

Ces équations paramétriques représentent un arc de cycloïde.

EXERCICE 05 : ***Chainette.***

1. Contrainte sous forme intégrale : La longueur de la corde est constante.

$$l = \int dl = \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + y'^2(x)}.\,dx$$

2. La grandeur à minimiser est l'énergie potentielle gravitationnelle de la corde

$$U_{\text{gravit}} = \int dm.\,g.\,h$$

Donc

$$U_{\text{gravit}} = g\lambda \int y.\,dl = g\lambda \int_{-x_0}^{x_0} y(x).\sqrt{1 + y'^2(x)}.\,dx$$

D'où la fonction qui doit vérifier l'équation d'Euler-Lagrange est

$$f(y, y', x) = y.\sqrt{1 + y'^2}$$

En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, la nouvelle fonction qui doit satisfaire à l'équation d'Euler-Lagrange est

$$h(y, y', x) = y.\sqrt{1 + y'^2} - \mu.\sqrt{1 + y'^2} = (y - \mu).\sqrt{1 + y'^2}$$

μ étant le multiplicateur de Lagrange

Remarquons que la fonction h ne dépend pas explicitement de x, donc nous pouvons utiliser la formule de Beltrami

$$h - y'\frac{\partial h}{\partial y'} = a$$

a est une constante d'intégration, donc

$$(y - \mu).\sqrt{1 + y'^2} - y'\frac{(y - \mu).\,y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y - \mu}{\sqrt{1 + y'^2}} = a$$

Donc

$$(y - \mu)^2 = a^2(1 + y'^2) \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{y - \mu}{a}\right)^2 - 1}$$

En séparant les variables

$$\frac{dy}{\sqrt{(y - \mu)^2/a^2 - 1}} = dx$$

On fait le changement de variable suivant

$$u^2 = (y - \mu)^2/a^2 \quad \Rightarrow \quad u = (y - \mu)/a \qquad \text{et} \quad dy = a.\,du$$

On obtient alors

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{1}{a}dx$$

En intégrant

$$\operatorname{arccosh} u = \frac{1}{a}(x + b)$$

b est une deuxième constante d'intégration, et donc

$$u = \cosh\left(\frac{x+b}{a}\right)$$

Et

$$y = a.\cosh\left(\frac{x+b}{a}\right) + \mu$$

Pour calculer les constantes nous utilisons les conditions limites

$$a.\cosh\left(\frac{x_0+b}{a}\right) + \mu = 0 \quad \text{et} \quad a.\cosh\left(\frac{-x_0+b}{a}\right) + \mu = 0$$

En faisant l'égalité des deux équations

$$\begin{cases} x_0 + b = -x_0 + b \\ x_0 + b = x_0 - b \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x_0 = 0 \quad \text{impossible} \\ b = 0 \end{cases}$$

Et en remplaçant dans les conditions précédentes

$$\mu = -a.\cosh(x_0/a)$$

D'où

$$\boxed{y = a\left(\cosh\left(\frac{x}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x_0}{a}\right)\right)}$$

La constante a est calculée à partir de la contrainte

$$l = \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + y'^2}.dx = \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)}.dx$$

$$l = \int_{-x_0}^{x_0} \cosh\left(\frac{x}{a}\right).dx = \left[a.\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{-x_0}^{x_0} \quad \Rightarrow \quad l = 2a.\sinh\left(\frac{x_0}{a}\right)$$