SÉRIE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 04
FORMALISME DE HAMILTON

HAMILTONIEN

$$\mathcal{H}(\{q_i\},\{p_i\},t) = \sum_{i=1}^{d} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

p_i est le « moment canoniquement conjugué » de la coordonnée généralisée q_i.

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

ÉQUATIONS DE HAMILTON

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$$

LOIS DE CONSERVATION

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Contraintes indépendantes du temps $\Rightarrow$ $\vec{r}_\alpha(\{q_i\})$ et $U(\{q_i\})$

$$\mathcal{H}(\{q_i\},\{p_i\}) = E_m = T + U$$

CROCHETS DE POISSON

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}$$

Equations de Hamilton

$$\dot{q}_i = \{q_i, \mathcal{H}\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = \{p_i, \mathcal{H}\} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$$

Relations de conjugaison canonique

$$\{q_i, q_j\} = 0 \qquad \{p_i, p_j\} = 0 \qquad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

TRANSFORMATION CANONIQUE

La transformation des variables conjuguées $\{q_i\}$ et $\{p_i\}$.

$$\begin{cases} q_i \to Q_i(\{q_j\},\{p_j\},t) \\ p_i \to P_i(\{q_j\},\{p_j\},t) \end{cases} \Rightarrow \quad \mathcal{H}(\{q_i\},\{p_i\},t) \to H(\{Q_i\},\{P_i\},t)$$

Transformation canonique	
$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}$	$\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}$

La transformation $(q_i, p_i) \to (Q_i, P_i)$ est canonique si

$$\{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij} \quad \text{ou} \quad \{q_i, p_j\}_{Q,P} = \delta_{ij}$$

SÉRIE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 04
FORMALISME DE HAMILTON

EXERCICE 01 : ***Double plan incliné***

Soit le système décrit par la figure 01. Les deux masses peuvent glisser sur les plans inclinés sans frottement et le fil est inextensible et de masse négligeable.

1. Trouver l'équation du mouvement en utilisant les équations de Lagrange, retrouver cette même équation en utilisant les équations de Hamilton.
2. Que représente le Hamiltonien dans ce cas ? Pourquoi ?
3. Le Hamiltonien est-il conservé ? Pourquoi ?

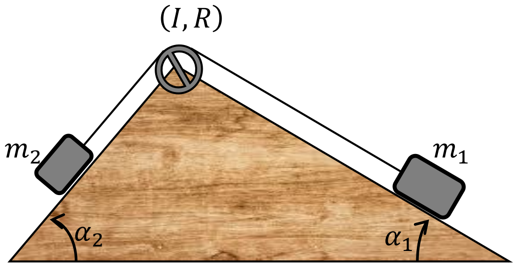

Figure 1.

EXERCICE 02 : ***Poulies Coaxiales***

Dans la figure 02 nous avons représenté deux masses accrochés à des fils inextensibles et de masses négligeables enroulés sur deux poulies solidaires (tournant avec le même angle θ) et ayant le même axe. Le moment d'inertie de l'ensemble des deux poulies est noté I.

1. En utilisant le formalisme de Hamilton, trouver l'équation différentielle du mouvement de l'ensemble. Nous prendrons comme variables conjuguées (θ, p_θ).
2. Quelle est la nature du mouvement ?
3. Penons maintenant comme variables canoniques (x, p_x) où x est la position de la masse m_2 comme le montre la figure 2.
   Quelle est la relation entre (θ, p_θ) et (x, p_x) ? Cette transformation est-elle canonique ?

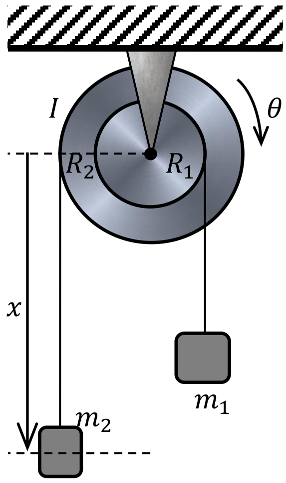

Figure 2.

EXERCICE 03 : ***masse sur une trappe***

La masse ponctuelle m dans la figure 03 glisse sans frottement sur une trappe plane qui s'ouvre avec un angle $\theta(t)$ par rapport à la verticale. $\theta(t)$ est une ***fonction connue*** du temps t.

1. Quelle est le nombre de degrés de liberté de la masse ?
2. Ecrire le Lagrangien de la masse m.
3. En déduire l'équation du mouvement.
4. Retrouver l'équation du mouvement en utilisant le formalisme de Hamilton.
5. Comparer le Hamiltonien avec l'énergie mécanique totale de la masse m.
6. Cette énergie est-elle conservée ? Et Le Hamiltonien est-il conservée ? Pourquoi ?

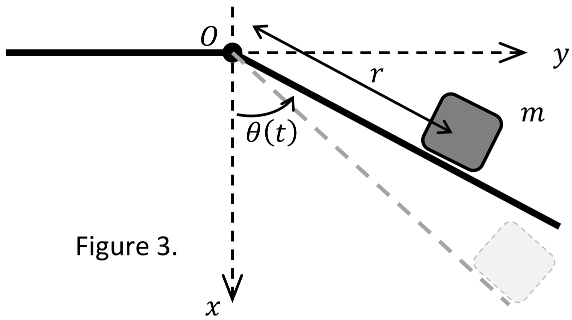

Figure 3.

<u>EXERCICE 04</u> : *Pendule simple et pendule simple avec un axe de rotation mobile*

En utilisant les équations de Hamilton, trouver l'équation du mouvement d'un pendule simple dans le plan vertical. Le pendule simple est constitué d'une masse ponctuelle m fixée au bout d'une tige de longueur constante l et de masse négligeable. L'autre bout est fixé à l'axe de rotation.

Dans la figure 04 le point de suspension d'un pendule simple (par où passe l'axe de rotation) se déplace suivant la verticale. Sa position par rapport à un point fixe est donnée par une fonction connue $h(t)$. Le pendule oscille dans le plan vertical.
Trouver l'équation du mouvement de la masse m.

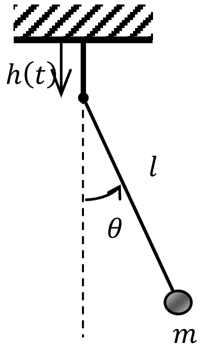

Figure 04.

<u>EXERCICE 05</u> : *Pendule simple avec un ressort*

Considérons un pendule constitué d'une masse ponctuelle m fixée au bout d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. La masse est astreinte à se déplacer dans le plan vertical (figure 05.).

1. Quel est le nombre de degrés de liberté du système ?
2. En utilisant le formalisme de Lagrange, trouver l'équation du mouvement de la masse m.
3. Retrouver ces équations du mouvement par la méthode de Hamilton.
4. Le Hamiltonien est-il conservé ? que représente-t-il ?

(utiliser les coordonnées polaires (r, θ))

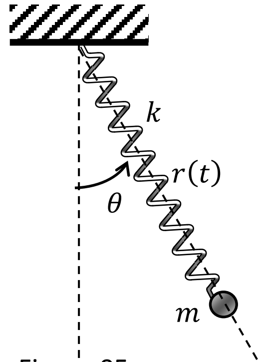

Figure 05.

<u>EXERCICE 06</u> : *Pendule sphérique*

Dans le cas d'un pendule sphérique, la tige de masse négligeable possède une longueur l fixe, mais la masse m peut se déplacer dans tout l'espace comme le montre la figure 06.

1. Quel est le nombre de degrés de liberté du système ?
2. Trouver l'équation du mouvement de la masse m en utilisant le formalisme de Hamilton.

(utiliser les coordonnées sphériques (r, θ, φ))

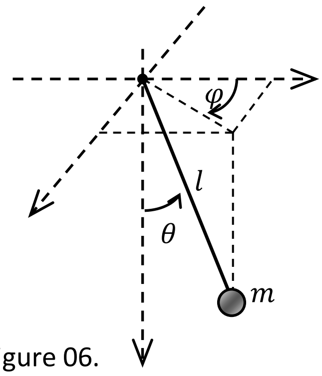

Figure 06.

<u>EXERCICE 07</u> :

Une perle considérée comme étant une masse ponctuelle m soumise au champ gravitationnel terrestre, est astreinte à glisser sans frottement le long d'un cerceau de masse négligeable et de rayon R placé dans le plan vertical. Le cerceau tourne autour de son axe vertical (Oz) avec une vitesse angulaire ***connue*** $\varphi^\bullet(t)$ et la position angulaire de la bille sur le cerceau est notée θ comme le montre la figure 07.

1. Quel est le nombre de degrés de liberté du système ? Définir la (ou les) coordonnée(s) généralisée(s) du système.
2. Ecrire le Lagrangien du système.
3. Ecrire les équations de Lagrange et en déduire l'équation (ou les équations) du mouvement.
4. Discuter suivant les valeurs de $\varphi^\bullet$ les positions d'équilibres de la bille le long du cerceau $\left(\theta^{\bullet\bullet}_{\text{équilibre}} = 0\right)$.
5. Trouver, dans l'expression du Lagrangien, l'énergie potentielle effective U_{eff} permettant de retrouver ces positions d'équilibre.

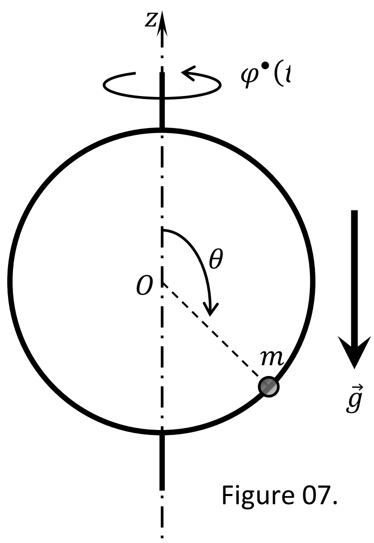

Figure 07.

6. Retrouver l'équation (ou les équations) du mouvement en utilisant le formalisme de Hamilton.
7. A quelle condition le Hamiltonien est conservé ? et dans quel cas de figure est-il égal à l'énergie mécanique totale de la perle ?

EXERCICE 08 :

Considérons le Hamiltonien d'une particule de masse m suivant :

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{p^2}{2m} e^{-q/a}$$

Où (q,p) sont les coordonnées canoniquement conjuguées et a une longueur.

1. Écrire les équations de Hamilton associées au Hamiltonien $\mathcal{H}$.
2. Résoudre le système d'équations de 1. avec comme conditions initiales $q(0) = 0$ et $p(0) = mv$ où $v > 0$ est une vitesse constante.
3. Vérifier à partir des résultats du 2. que $\mathcal{H} =$ constante. Expliquer pourquoi ce résultat est évident d'après la définition de $\mathcal{H}$.
4. Montrer que la force appliquée à la masse est constante et que la particule décélère en fonction du temps.
5. Trouver les limites de p à l'ordre 0 en t/τ et de q et $q^\bullet$ à l'ordre 1 lorsque $t \ll \tau$ où τ est un temps caractéristique à préciser. De quel mouvement s'agit-il ?
6. Tracer $q(t)/2a$ et $p(t)/mv$ en fonction du temps.

EXERCICE 09 :

1. Ecrire le lagrangien d'un oscillateur harmonique unidimensionnel de masse m et de constante de raideur k (on notera $\omega^2 = k/m$).
2. Construire le Hamiltonien $\mathcal{H}(q,p)$ du système (en utilisant 1).
3. On considère la transformation suivante des anciennes variables (q,p) aux nouvelles variables (Q,P)

   $$Q = C.(p + i.m\omega.q) \quad \text{et} \quad P = C.(p - i.m\omega.q)$$

   Déterminer C pour que cette transformation soit canonique.
4. Calculer le nouveau Hamiltonien $H(Q,P)$.
5. Déterminer les équations de Hamilton pour les nouvelles variables et calculer $Q(t)$ et $P(t)$.
6. Trouver alors la solution du problème originel, $q(t)$ et $p(t)$.

EXERCICE 10 :

1. Ecrire le lagrangien d'un oscillateur harmonique à une dimension (q) de masse m et de constante de raideur k (on notera $\omega^2 = k/m$).
2. Construire le Hamiltonien $\mathcal{H}(q,p)$ du système.
3. On considère la transformation suivante des anciennes variables (q,p) aux nouvelles variables (Q,P)

   $$p = \sqrt{2m\omega.P}.\cos Q \quad \text{et} \quad q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}.\sin Q$$

   Cette transformation est-elle canonique ?
4. Calculer le nouveau Hamiltonien $H(Q,P)$.
5. Déterminer les équations de Hamilton pour les nouvelles variables et calculer $Q(t)$ et $P(t)$. Trouver alors la solution du problème originel, $q(t)$ et $p(t)$.