

SOLUTIONS DE LA SÉRIE DE TD N° 02 RAPPELS DE THERMODYNAMIQUE

EXERCICE 02 :

1. Volume occupé par le gaz.

$$p_0 V_0 = nRT_0$$

Avec

$$n = 1 \text{ mole} ; T_0 = 293 \text{ K} ; p_0 = 1 \text{ atm} = 1,01 \times 10^5 \text{ pa}$$

$$V_0 = R \frac{T_0}{p_0}$$

Application numérique : $V_0 = 24,1072 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 24,1072 \text{ litres}$

2.

a. Le piston étant libre, et pour une transformation assez lente, nous pouvons considérer que la pression du gaz est en équilibre avec la pression extérieure.

$$p_1 = p_0$$

b. Travail.

$$\delta W = -p \cdot dV$$

La pression étant constante

$$W_0^1 = - \int_{V_0}^{V_1} p \cdot dV = -p_0 \int_{V_0}^{V_1} dV$$

Donc

$$W_0^1 = -p_0(V_1 - V_0)$$

$$W_0^1 = -p_0 V_1 + p_0 V_0 = -p_1 V_1 + p_0 V_0$$

En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits

$$W_0^1 = -nRT_1 + nRT_0 \Rightarrow W_0^1 = -R(T_1 - T_0)$$

c. Gaz parfait monoatomique :

$$C_V = \frac{3}{2}R \quad \text{et} \quad C_p = C_V + R = \frac{5}{2}R$$

C'est un résultat expérimental vérifié dans le cas d'un gaz parfait monoatomique.

La transformation étant à pression constante :

$$\delta Q = nC_p \cdot dT \Rightarrow Q_0^1 = nC_p \int_{T_0}^{T_1} dT \quad \text{et} \quad Q_0^1 = \frac{5}{2}R(T_1 - T_0)$$

Comme

$$Q_0^1 = Q = 100 \text{ J}$$

Donc

$$T_1 = 297,8134 \text{ K}$$

Et le volume est donné par l'équation d'état

$$V_1 = R \frac{T_1}{p_1}$$

Application numérique : $V_1 = 24,5032 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 24,5032 \text{ litres}$

En utilisant le premier principe de la thermodynamique

$$\Delta U = U_1 - U_0 = Q_0^1 + W_0^1$$

$$\Delta U = \frac{5}{2}R(T_1 - T_0) - R(T_1 - T_0)$$

On retrouve alors

$$\Delta U = nC_V \cdot \Delta T = \frac{3}{2}R(T_1 - T_0)$$

Pour un gaz parfait, l'énergie interne ne dépend que de la température (expérience de Joule). Nous utiliserons alors pour toutes les transformations réversibles :

$$dU = nC_V \cdot dT$$

Application numérique :

$$W_0^1 = -40 \text{ Joules} \quad \text{et} \quad \Delta U = 60 \text{ Joules}$$

d. Transformation isobare réversible.

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = nC_p \frac{dT}{T}$$

Donc

$$dS = \frac{5R}{2} \frac{dT}{T}$$

En intégrant

$$\Delta S = S_1 - S_0 = nC_p \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T} = nC_p (\ln T_1 - \ln T_0)$$

Donc

$$\Delta S = \frac{5R}{2} \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right)$$

Application numérique :

$$\Delta S = 0,3385 \text{ J/K}$$

3.

a. D'une part le cylindre et le piston sont calorifugés, d'autre part la transformation est très lente. Donc, la transformation est *adiabatique et réversible*.

b. Pour un gaz parfait lors d'une transformation adiabatique.

$$p \cdot V^\gamma = \text{constante} \quad \text{avec} \quad \gamma = C_p/C_V$$

Que nous pouvons utiliser sous la forme

$$p_1 \cdot V_1^\gamma = p_2 \cdot V_2^\gamma$$

Avec

$$p_1 = p_0 \quad ; \quad V_2 = V_0 \quad ; \quad \gamma = 5/3$$

D'où

$$p_2 = p_0 \cdot \left(\frac{V_1}{V_0} \right)^\gamma$$

Application numérique : $p_0 = 1,037 \times 10^5 \text{ Pa}$

Et la température est donnée par l'équation d'état

$$T_2 = \frac{1}{R} p_2 V_2$$

Application numérique : $T_2 = 301,0651 \text{ K}$

EXERCICE 03 :

1. La pression au point inférieur de la partie remplie d'eau est donné par la loi de l'hydrostatique.

$$p - p_0 = \rho g h_{H_2O}$$

Donc

$$\boxed{p = p_0 + \rho g d} \quad \text{Application numérique : } \boxed{p = 1,02962 \times 10^5 \text{ pa}}$$

A l'équilibre, cette pression est celle du gaz mesurée à n'importe quel point de son volume.

Le nombre de moles est calculé à partir de l'équation d'état :

$$pV = nRT$$

Avec

$$V = L^2 h \quad \text{et} \quad h = L/2$$

Et

$$\boxed{n = \frac{pV}{RT}} \quad \text{Application numérique : } \boxed{n = 20,7888 \text{ moles}}$$

2.

a. Capacités calorifiques molaires du dioxygène assimilé à un gaz parfait diatomique.

$$C_V = \frac{5}{2}R \quad \text{et} \quad C_p = C_V + R = \frac{7}{2}R$$

C'est un résultat expérimental vérifié dans le cas d'un gaz parfait diatomique.

La paroi étant mobile, l'échange de chaleur se fait à pression constante. Donc :

$$\boxed{Q_{O_2} = nC_p \cdot \Delta T = nC_p(T' - T)}$$

$$\boxed{Q_{H_2O} = mc \cdot \Delta T = \rho \tau_{H_2O} c \cdot (T' - T)}$$

Avec τ_{H_2O} est le volume occupé par la masse d'eau :

$$\tau_{H_2O} = S \cdot d = L^2 d$$

Application numérique :

$$T' = 30 \text{ }^\circ\text{C} ; \quad T = 25 \text{ }^\circ\text{C} ; \quad \rho = 1 \text{ kg/l} ; \quad L = 1 \text{ m} ; \quad d = 20 \text{ cm} ; \quad c = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Ce qui donne

$$\boxed{Q_{O_2} = 3023,2112 \text{ Joules}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q_{H_2O} = 4,18 \times 10^6 \text{ Joules}}$$

b. Travail des forces de pression.

c. Afin de calculer la variation d'entropie du gaz, on imagine un chemin fictif, réversible et isobare, entre les mêmes états précédents. Montrer que la variation d'entropie au cours d'une étape infinitésimale de cette transformation est donnée par $dS = \frac{7}{2}n \cdot R \frac{dT}{T}$.

En déduire la variation d'entropie du gaz.

EXERCICE 04 : (Travail personnel)

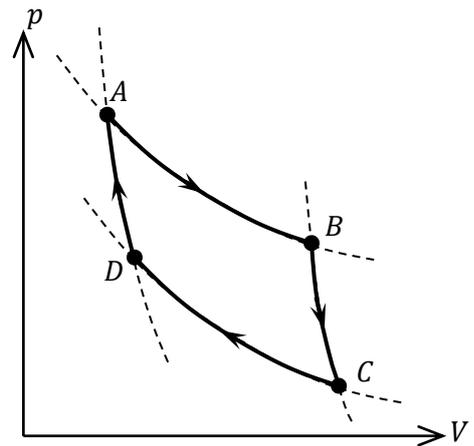
1.

$A \rightarrow B$: transformation isotherme de température T_1 .

$B \rightarrow C$: transformation adiabatique.

$C \rightarrow D$: transformation isotherme de température $T_2 < T_1$.

$D \rightarrow A$: transformation adiabatique.



2. Plan (T, S) :

Isotherme : Température constante.

Adiabatique : $\delta Q = 0 \Rightarrow dS = \delta Q/T = 0$

Donc l'entropie est constante (Isentropique).

3. Echange de chaleur durant les parties isothermes du cycle :

$A \rightarrow B$: transformation isotherme de température T_1 .

Gaz parfait monoatomique : $p.V = n.R.T$ et $U(T)$ est fonction uniquement de la température.

$$\boxed{\Delta U = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{W_A^B = -Q_A^B}$$

Pour calculer le travail entre deux état A et B , on utilise l'équation d'état

$$pV = nRT$$

D'où

$$W_A^B = - \int_A^B p \cdot dV = -n \cdot R \cdot T_1 \int_A^B \frac{1}{V} dV$$

Finalement

$$\boxed{Q_A^B = -W_A^B = n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}$$

$$(V_B > V_A) \Rightarrow (Q_A^B > 0)$$

La chaleur est absorbée.

$C \rightarrow D$: transformation isotherme de température $T_2 < T_1$.

De la même manière

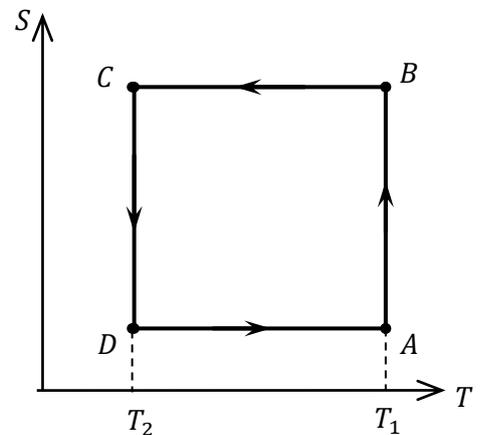
$$W_C^D = - \int_C^D p \cdot dV = -n \cdot R \cdot T_2 \int_C^D \frac{1}{V} dV$$

Finalement

$$\boxed{Q_C^D = -W_C^D = n \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)}$$

$$(V_C > V_D) \Rightarrow (Q_C^D < 0)$$

La chaleur est cédée



4. Entropie sur un cycle est nulle (variable d'état)

$$S_{\text{cycle}} = \Delta S_{A \rightarrow B} + \Delta S_{B \rightarrow C} + \Delta S_{C \rightarrow D} + \Delta S_{D \rightarrow A} = \Delta S_{A \rightarrow B} + \Delta S_{C \rightarrow D} = 0$$

$$\Delta S_{B \rightarrow C} = \Delta S_{D \rightarrow A} = 0 \quad (\text{Adiabatiques})$$

Donc

$$\Delta S_{A \rightarrow B} = -\Delta S_{C \rightarrow D}$$

Et

$$\frac{Q_A^B}{T_1} = -\frac{Q_C^D}{T_2} \quad \Rightarrow \quad nR \cdot \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -nR \cdot \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$$

Finalement

$$\boxed{\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}}$$

5. Travail sur un cycle :

Comme U est une variable d'état, donc

$$\Delta U_{\text{cycle}} = Q_{\text{cycle}} + W_{\text{cycle}} = 0$$

Et

$$W_{\text{cycle}} = -Q_{\text{cycle}}$$

Comme

$$Q_B^C = Q_D^A = 0 \quad (\text{Adiabatiques})$$

Alors

$$Q_{\text{cycle}} = Q_A^B + Q_B^C + Q_C^D + Q_D^A = Q_A^B + Q_C^D$$

D'où

$$W_{\text{cycle}} = -Q_{\text{cycle}} = -nR \cdot \left[T_1 \cdot \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + T_2 \cdot \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) \right]$$

$$\boxed{W_{\text{cycle}} = -nR \cdot (T_1 - T_2) \cdot \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}$$

Comme

$$(V_B > V_A) \quad \Rightarrow \quad (W_{\text{cycle}} < 0)$$

Le travail est cédé, c'est **un moteur thermique**.

6. Rendement moteur

$$\eta = \left| \frac{W_{\text{cycle}}}{Q_A^B} \right| = \frac{nR(T_1 - T_2) \cdot \ln(V_B/V_A)}{nRT_1 \cdot \ln(V_B/V_A)}$$

Donc

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}}$$

EXERCICE 05 :

6. Echange de chaleur.

Transformation 1 → 2 : compression adiabatique ($Q_1^2 = 0$).

Transformation 2 → 3 : chauffage isochore ($Q_2^3 \neq 0$).

Transformation 3 → 4 : détente adiabatique ($Q_3^4 = 0$).

Transformation 4 → 1 : refroidissement isochore ($Q_4^1 \neq 0$).

7. Transformation isochore dans le cas d'un gaz parfait.

$$dU = n \cdot C_V \cdot dT \quad ; \quad \delta Q = n \cdot C_V \cdot dT \quad ; \quad \delta W = 0$$

Transformation 2 → 3 : En intégrant, on a :

$$Q_2^3 = C_V \cdot \Delta T = \frac{3}{2} R \cdot (T_3 - T_2)$$

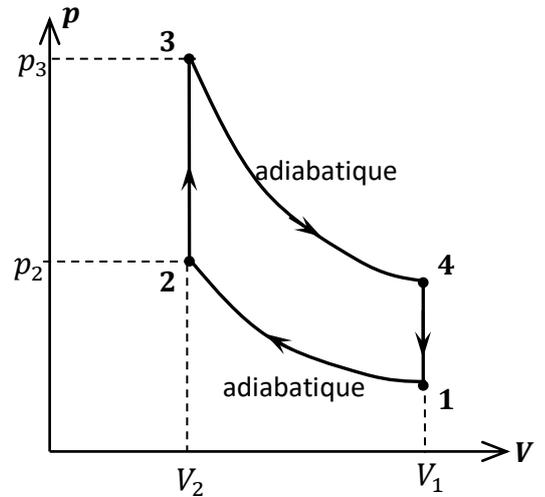
$Q_2^3 > 0$: Chaleur absorbée par le gaz.

Transformation 4 → 1 : En intégrant, on a :

$$Q_4^1 = C_V \cdot \Delta T = \frac{3}{2} R \cdot (T_1 - T_4)$$

$Q_4^1 < 0$: Chaleur cédée par le gaz.

Pour une mole ($n = 1$) de gaz parfait monoatomique ($C_V = 3R/2$).



8. Travail.

Transformation 1 → 2 : compression adiabatique ($W_1^2 \neq 0$).

Transformation 2 → 3 : chauffage isochore ($W_2^3 = 0$).

Transformation 3 → 4 : détente adiabatique ($W_3^4 \neq 0$).

Transformation 4 → 1 : refroidissement isochore ($W_4^1 = 0$).

Transformation adiabatique dans le cas d'un gaz parfait.

$$dU = n \cdot C_V \cdot dT \quad ; \quad \delta Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta W = n \cdot C_V \cdot dT$$

Transformation 1 → 2 : En intégrant, on a :

$$W_1^2 = C_V \cdot \Delta T = \frac{3}{2} R \cdot (T_2 - T_1)$$

Transformation 3 → 4 : En intégrant, on a :

$$W_3^4 = C_V \cdot \Delta T = \frac{3}{2} R \cdot (T_4 - T_3)$$

Pour une mole ($n = 1$) de gaz parfait monoatomique ($C_V = 3R/2$).

9. Rendement travail.

$$\eta = \frac{\text{travail fourni par le moteur}}{\text{chaleur absorbée}}$$

La transformation 1 → 2 est adiabatique ⇒ $p_1 \cdot V_1^\gamma = p_2 \cdot V_2^\gamma$

Et d'après l'équation d'état $p = RT/V$ (pour une mole)

Donc

$$T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_2^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \text{ avec } \gamma - 1 = \frac{C_p}{C_v} - 1 = \frac{2}{3}$$

Comme

$$V_2 < V_1 \Rightarrow T_1 < T_2 \quad \text{et} \quad W_1^2 > 0$$

Dans ce cas le gaz reçoit de l'énergie sous forme d'un travail du milieu extérieur.

De la même manière

$$T_3 \cdot V_3^{\gamma-1} = T_4 \cdot V_4^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma-1} \text{ avec } \gamma - 1 = \frac{C_p}{C_v} - 1 = \frac{2}{3}$$

Comme

$$V_3 = V_2 < V_4 = V_1 \Rightarrow T_3 > T_4 \quad \text{et} \quad W_3^4 < 0$$

Dans ce cas le gaz cède de l'énergie sous forme d'un travail au milieu extérieur.

D'où le travail fournis par le moteur en valeur absolue :

$$W = |W_1^2 + W_3^4| = -W_1^2 - W_3^4$$

$$\eta = \frac{-W_1^2 - W_3^4}{Q_2^3} = \frac{-T_2 + T_1 - T_4 + T_3}{T_3 - T_2} \Rightarrow \boxed{\eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}}$$

Comme

$$\begin{cases} T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_2^{\gamma-1} \\ T_4 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_3 \cdot V_2^{\gamma-1} \end{cases} \Rightarrow (T_1 - T_4) \cdot V_1^{\gamma-1} = (T_2 - T_3) \cdot V_2^{\gamma-1}$$

D'où

$$\boxed{\eta = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}}$$

Pour un rendement de 90%

$$\eta = 0,9 \Rightarrow \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = 0,1 \quad \text{et} \quad V_2 = 0,1^{1/\gamma-1} \cdot V_1 = 0,1^{3/2} \cdot V_1$$

Donc

$$\boxed{V_2 = 0,0316 \cdot V_1} \quad \text{ou} \quad \boxed{V_1 = 31,623 \cdot V_2}$$

Ce qui n'est pas possible pour une voiture réelle.

EXERCICE 06 : (Travail personnel)

Un cylindre fermé par un piston mobile sans frottement, contient $n = 0,05 \text{ mole}$ d'un gaz parfait monoatomique. Le cylindre étant un très bon conducteur thermique, le gaz est en contact thermique avec le milieu ambiant qui joue le rôle d'un thermostat de température T_0 . On fait alors décrire au gaz un cycle constitué des transformations suivantes :

- i. Une compression adiabatique réversible au cours de laquelle le contact thermique avec le milieu est supprimé ; le gaz passe de l'état A ($p_A = 10^5 \text{ Pa}$, $V_A = 1,2 \text{ l}$, $T_A = T_0$) à un état B caractérisé par une température $T_B = 410,6 \text{ K}$.
 - ii. Un refroidissement isochore au contact du milieu ambiant afin de revenir à la température T_0 dans l'état C .
 - iii. Une détente isotherme réversible au contact du milieu ambiant qui me fait revenir à l'état initial.
1. Calculer la température T_0 .
 2. Déterminer les valeurs du volume, puis de la pression en B et C .
 3. Quelle est la quantité de chaleur Q_A^B échangée lors de la transformation $A \rightarrow B$? En déduire le travail échangé W_A^B .
 4. Quel est le travail W_B^C correspondant à la transformation $B \rightarrow C$? En déduire la quantité de chaleur échangée Q_B^C .
 5. Au cours de la transformation $C \rightarrow A$, montrer que la travail échangé dans une étape élémentaire est donné par $\delta W = -n.R.T_0 \frac{dV}{V}$. Calculer alors, le travail total échangé W_C^A et la quantité de chaleur Q_C^A .
 6. Préciser les variations d'entropie $\Delta S_{A \rightarrow B}$ et $\Delta S_{C \rightarrow A}$ qui accompagnent les transformations $A \rightarrow B$ et $C \rightarrow A$. quelle est la variation d'entropie sur l'ensemble du cycle ? En déduire la variation d'entropie $\Delta S_{B \rightarrow C}$ lors de l'étape $B \rightarrow C$ du cycle. Le cycle peut-il être décrit en sens inverse ?