SÉRIE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 03
THÉORIE CINÉTIQUE DES GAZ

EXERCICE 01 : (Travail personnel)

On définit l'enthalpie d'un système par $H = U + p.V$.

1. Calculer H dans le cas d'un gaz parfait.
2. Calculer la différentielle de H en fonction de dS et de dp pour une transformation réversible. (S étant l'entropie du système).

L'énergie libre est donnée par $F = U - T.S$ et l'enthalpie libre par $G = H - T.S$.

3. Calculer les différentielles dF et dG. (Transformation réversible).

EXERCICE 02 :

Un tube cylindrique contient, sous une pression égale à la pression atmosphérique $p = 10^5\ Pa$ et à la température ambiante $T = 300\ K$, n moles d'argon de masse molaire $M = 39{,}9\ g.mol^{-1}$. On assimilera l'Argon à un gaz parfait monoatomique.

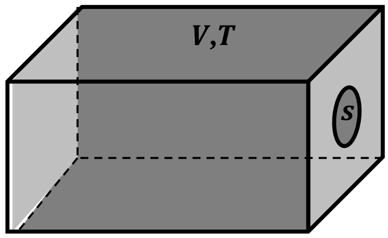
1. Calculer numériquement la masse d'un atome d'Argon.
2. Rappeler l'expression de la vitesse quadratique moyenne v^* d'un atome en fonction de sa masse et de la température. Calculer la valeur numérique de v^*.
3. Calculer le nombre d'atomes d'Argon par unité de volume. En déduire un ordre de grandeur de la distance moyenne séparant deux atomes voisins.
4. On souhaite déterminer un ordre de grandeur du nombre de chocs par unité de surface et de temps sur le piston qui ferme le tube. On se place alors dans une approche simplifiée en considérant que :
   - Tous les atomes d'hélium ont une vitesse identique à la vitesse quadratique moyenne v^*.
   - Seulement $1/6$ des atomes ont une vitesse dont la direction et le sens permettent le contact avec le piston.

   Dans quel volume se trouve les atomes qui vont frapper, pendant une durée infinitésimale dt, un petit élément de surface ds du piston ? En déduire une estimation du nombre de chocs considérés.

EXERCICE 03 :

Une enceinte rigide de volume V contient un gaz parfait monoatomique maintenu à une température T. Cette enceinte est percée par un petit trou de surface s donnant sur du vide, de telle manière qu'une quantité du gaz peut s'échapper à travers ce trou.

1. En utilisant la distribution des vitesses de Maxwell-Boltzmann, trouver le nombre de particules dN_s qui s'échappe à travers la surface s durant un temps dt.
2. En déduire la loi donnant le nombre de particules N contenus dans l'enceinte.
3. En considérant que le trou est assez petit pour que la transformation soit très lente et que le système soit en équilibre à tout instant t, trouver l'expression de la pression p et l'énergie du système U en fonction du temps.

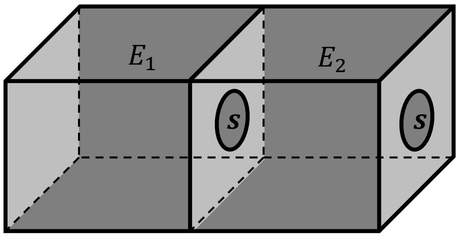


EXERCICE 04 :

Une mole de gaz parfait monoatomique est initialement contenue dans une enceinte rigide E_1 de volume V. Par l'intermédiaire d'un petit trou de section s, l'enceinte E_1 communique avec une autre enceinte E_2 de même volume V et initialement vide. Cette dernière est elle-même ouverte sur le vide grâce à un trou identique. L'ensemble est maintenu à la température T.

Pour simplifier on suppose que :

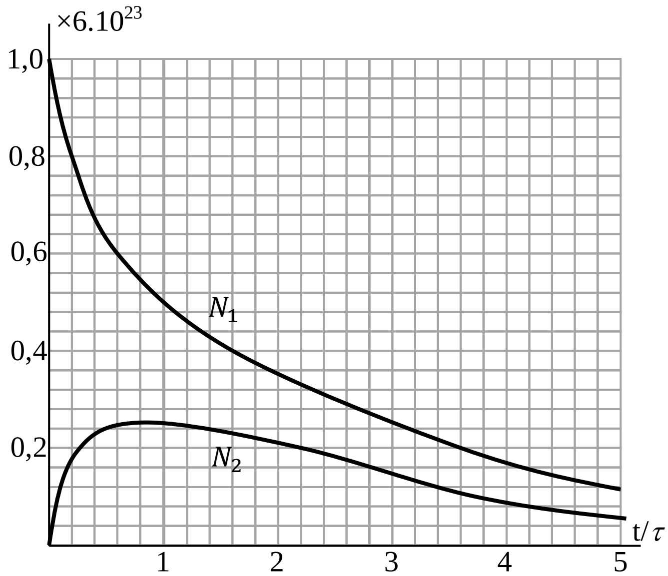
- Tous les atomes du gaz ont une vitesse identique à la vitesse quadratique moyenne v^*.
- Seulement 1/6 des atomes de chaque enceinte ont une vitesse dont la direction et le sens permettent le passage dans le trou.



1. Donner l'expression de la vitesse quadratique moyenne v^* d'un atome en fonction de la température T, de la masse molaire M du gaz et de la constante R des gaz parfaits.
2. Dans quel volume se trouvent les atomes qui passent de E_1 vers E_2 pendant une durée infinitésimale dt ? En déduire que leur nombre est donné par $\frac{N_1.s.v^*}{6V}dt$ où N_1 est le nombre total d'atomes présent dans l'enceinte E_1.
   Soit N_2 le nombre d'atomes de l'enceinte E_2. Donner le nombre de particules qui pendant dt passent de E_2 vers E_1 ainsi que le nombre d'atomes qui vont dans le vide.
3. Justifier alors que les nombres N_1 et N_2 évoluent au cours du temps selon les équations différentielles suivantes :

$$\frac{dN_1}{dt} + \frac{N_1 - N_2}{\tau} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dN_2}{dt} + \frac{2N_2 - N_1}{\tau} = 0$$

   Où τ est une constante que l'on déterminera. Calculer τ dans le cas de l'Argon de masse molaire $M = 39{,}9\ g.mol^{-1}$ à la température $T = 300\ K$ dans un volume $V = 1\ l$, la section des trous étant $s = 10\ cm^2$.
4. Les 2 courbes suivantes représentent les nombres N_1 et N_2 de particules dans chaque enceinte au cours du temps :



a. Expliquer qualitativement l'allure des courbes.
b. Pourquoi les pentes à l'origine de N_1 et N_2 sont elles opposées ?
c. Déterminer graphiquement la valeur du rapport N_1/N_2 lorsque le nombre N_2 d'atomes dans E_2 est maximum ? Comparer à la valeur exacte attendue qu'on déduira de la question 3.

5. On imagine que le gaz est un mélange de deux isotopes (a) et (b) de masse molaire respective M_a et $M_b > M_a$. En s'aidant du graphe précédent, que peut-on dire du rapport $r = \frac{N_1(\text{isotope } a)}{N_1(\text{isotope } b)}$. Quelle peut être l'utilité du dispositif ?

EXERCICE 05 : (Travail personnel)

On veut calculer la pression p exercée par un gaz parfait monoatomique contenu dans une enceinte de volume V et maintenu à une température T sur les parois de l'enceinte. Dans ce cas, on considère que la pression du gaz est due aux chocs élastiques des molécules du gaz sur la surface de la paroi.

Soit une surface plane dS de la paroi, perpendiculaire à l'axe (Ox).

1. Quelle est la force exercée par une seule molécule de masse m et de vecteur vitesse $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ lors du choc ? la durée du choc étant notée Δt.
2. Quelle est la condition que doit vérifier la vitesse $\vec{v}$ pour que la molécule puisse percuter la paroi ?
3. Quel est le nombre de molécules dN ayant la même vitesse $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$, incident sur la surface dS durant le temps Δt ? (la densité volumique des molécules est notée $n = N/V$)
4. En déduire la force $d\vec{F}$ appliquée par toutes le molécules ayant une vitesse $\vec{v}$.
5. La proportion de molécules ayant une vitesse $\vec{v}$ est donnée par la fonction de distribution de Maxwell–Boltzmann
$$f(\vec{v}) = A.e^{-\frac{m}{2.k_B T}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}$$
Calculer A pour que $f(\vec{v})$ soit normée.
6. Calculer la force totale $\vec{F}$ appliquée par toutes les molécules du gaz quelque soit leur vitesse sur la surface dS.
7. En déduire la pression p. Conclure.

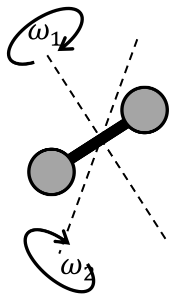
On donne : $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\,.dx = \sqrt{\pi}$

EXERCICE 06 : (Travail personnel)

1. A partir de la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann des gaz parfait, calculer la fonction de distribution $\tilde{f}(v)$ du module de la vitesse. Tracer qualitativement la courbe $\tilde{f}(v)$.
2. Pour quelle valeur de la vitesse, notée v_m, cette fonction est elle maximale. (Cette vitesse est aussi appelée vitesse thermique $v_{th} = v_m$).
3. Retrouver la vitesse quadratique moyenne $v^* = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$.
4. Calculer la valeur moyenne du module de la vitesse $\langle v \rangle = \bar{v}$.
5. Montrer qu'à une température donnée, on a $v_m \leq \langle v \rangle \leq v^*$.

EXERCICE 07 :

Dans le cas d'un gaz parfait diatomique l'énergie cinétique d'une particule s'écrit :



$$E_C = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{1}{2}I(\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

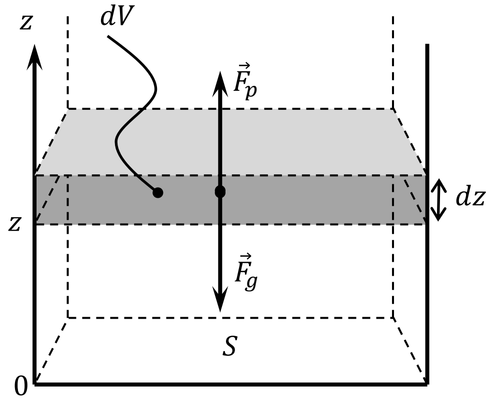
$E_{CT} = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$: énergie cinétique de translation.

$E_{CR} = \frac{1}{2}I(\omega_1^2 + \omega_2^2)$: énergie cinétique de rotation suivant deux axes (figure ci-contre).

En écrivant la fonction de distribution sous la forme $f(v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2) = A.e^{-e^{-E_C/k_B T}}$.

1. Calculer A pour que cette fonction soit normée.
2. Trouver la relation donnant l'énergie interne $U(T)$ en fonction de la température.
3. En déduire la capacité calorifique à volume constant C_V.

EXERCICE 08 :



Nous considérons l'atmosphère terrestre comme étant un gaz parfait à température constante. Ce gaz est constitué de particules de masse m chacune subissant l'attraction gravitationnelle uniforme de la terre $(\vec{g} = -g.\vec{e}_z)$.
Nous subdivisons une colonne de base S de l'atmosphère en couches d'épaisseur dz, l'axe (Oz) étant l'axe vertical (figure ci-contre). Une couche d'épaisseur dz se trouvant à une hauteur z reste en équilibre sous l'effet de deux forces opposées : la force d'attraction de la terre $\vec{F}_g$ et la force $\vec{F}_p$ due à la différence de pression entre la couche qui lui est inférieure et la couche qui lui est supérieure.

1. En notant $n(z)$ la densité de particules à une hauteur z, Ecrire le nombre de particules dN_z se trouvant le volume dV compris entre z et $z + dz$.
2. En déduire l'expression du poids $\vec{F}_g$ de la couche d'épaisseur dz se trouvant à une hauteur z.
3. Ecrire la force $\vec{F}_p$, due à la différence de pression $p(z)$ exercée sur cette couche.
4. En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits et en écrivant l'équilibre des deux forces, trouver alors l'expression $n(z)$ de la densité du gaz (atmosphère) en fonction de la hauteur z. On note $n(z = 0) = n_0$ la densité atmosphérique à $z = 0$.
5. Comparer le résultat trouvé avec la loi de distribution de Maxwell-Boltzmann (énergie potentielle non nulle).

EXERCICE 09 :

Parmi les différents types de pompe à fixation, on trouve les pompes à condensation. Par abaissement de la température d'une partie de la paroi de l'enceinte à vider, on condense le gaz ou la vapeur. Le produit condensé est ensuite éliminé.
Soit une enceinte cylindrique dont le diamètre de la base est $D = 20\ cm$ et la hauteur $H = 20\ cm$, maintenue à une température constante $T = 273\ K$ sauf au niveau d'un élément de surface plane s représentant $0{,}1\%$ de la surface totale, maintenu à une température T_s inférieure à T et permettant la condensation de l'Hélium. Cette enceinte est initialement remplie d'Helium dans les conditions normales de température et de pression $0°C, 1\ atm$.

1. En utilisant la distribution des vitesses de Maxwell-Boltzmann, trouver le nombre de particules dN_s incident sur la surface s durant un temps dt.
2. En admettant que les molécules d'Hélium qui frappent la surface y restent collées, montrer que le nombre de molécules de ce gaz contenues dans l'enceinte à l'instant t est

$$N(t) = N(0).\exp(-t/\tau)$$

   et exprimer τ en fonction de D, H, k_B, T et m la masse d'une molécule d'Hélium.
3. Calculer le temps Δt nécessaire pour diminuer d'un facteur 3 la pression dans l'enceinte.
4. Application : Calculer τ et Δt.
   On donne la masse molaire de l'Hélium $M = 4{,}0\ g.mol^{-1}$ le nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6{,}022 \times 10^{23}$ et la constante de Boltzmann $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}\ J/K$.

EXERCICE 10 : (Travail personnel)

Montrer que l'intégrale $I_n(a) = \int_0^{+\infty} x^n.e^{-a.x^2}dx$ $(a > 0)$ est égale à :

$$I_n(a) = \frac{(2k)!.\sqrt{\pi}}{k!.2^{2k+1}.a^{k+\frac{1}{2}}} \quad \text{pour} \quad n = 2k \quad \text{et} \quad k = 0,1,2,3 \ldots$$

$$I_n(a) = \frac{k!}{2.a^{k+1}} \quad \text{pour} \quad n = 2k+1 \quad \text{et} \quad k = 0,1,2,3 \ldots$$