SOLUTIONS DE LA SÉRIE DE TD N° 03
THÉORIE CINÉTIQUE DES GAZ

EXERCICE 02 :

1. Masse d'un atome d'Argon.

$$M = m.\mathcal{N}_A \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = \frac{M}{\mathcal{N}_A}} \qquad \text{A.N.} \qquad \boxed{m = 6{,}624 \times 10^{-26}\ kg}$$

2. Vitesse quadratique moyenne.

$$\boxed{v^* = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \left(3\frac{k_B T}{m}\right)^{1/2}} \qquad \text{A.N.} \qquad \boxed{v^* = 432{,}947\ m/s}$$

3. Nombre d'atomes d'Argon par unité de volume.

L'Argon étant considéré comme un gaz parfait, nous utilisons l'équation d'état

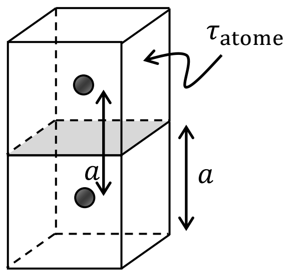
$$pV = Nk_BT$$

Donc

$$\boxed{\frac{N}{V} = \frac{p}{k_BT}} \qquad \text{A.N.} \qquad \boxed{\frac{N}{V} = 2{,}4154 \times 10^{+25}\ m^{-3}}$$

Et le volume par atome est donne par l'inverse de cette valeur

$$\tau_{\text{atome}} = \frac{V}{N} = 4{,}14 \times 10^{-26}\ m^3$$



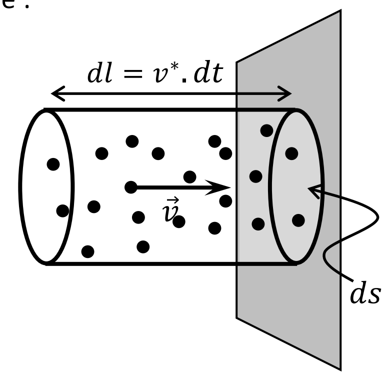
D'où l'ordre de grandeur de la distance moyenne séparant deux atomes voisins est obtenu en considérant chaque atome au centre d'un cube de volume τ_{atome} (figure ci-contre). Dans ce cas, la distance entre deux atomes situés aux centres de deux cubes adjacents est égale à la longueur du côté du cube

$$a = \sqrt[3]{\tau_{\text{atome}}} \approx 6{,}43 \times 10^{-9}\ m$$

Cette distance est de l'ordre de $6\ nm$.

4. On se place alors dans une approche simplifiée en considérant que :

- ➢ Tous les atomes d'hélium ont une vitesse identique à la vitesse quadratique moyenne v^*.
- ➢ Seulement $1/6$ des atomes ont une vitesse dont la direction et le sens permettent le contact avec le piston.



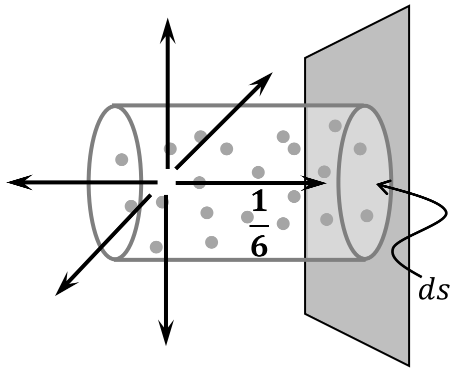
D'après la figure ci-contre les particules ayant une vitesse v^* qui frappent la surface ds durant un intervalle de temps dt, sont contenues dans le cylindre de base s et de hauteur v^*dt. D'où les molécules incidentes sont contenues dans un volume

$$d\tau = ds.dl = v^*ds.dt$$

Le nombre de molécules contenues dans ce volume est obtenu en multipliant la densité volumique, considérée uniforme, par le volume

$$dN = \frac{N}{V} d\tau$$

Mais Seulement 1/6 des atomes ont une vitesse dont la direction et le sens permettent le contact avec la surface s (figure ci-contre). Alors :

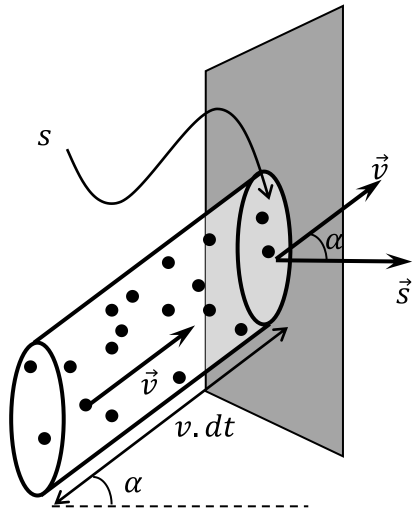


$$dN_s = \frac{1}{6}\frac{N}{V}\left(3\frac{k_B T}{m}\right)^{1/2} ds.dt = \frac{1}{6}\frac{N}{V} v^* ds.dt$$

Et le nombre de particules (atomes d'Argon) incidentes sur la surface par unité de temps et de surface est donné par :

$$\boxed{\frac{dN_s}{ds.dt} = \frac{1}{6}\frac{N}{V}\left(3\frac{k_B T}{m}\right)^{1/2} = \frac{1}{6}\frac{N}{V} v^*} \qquad \text{A. N.} \qquad \boxed{\frac{dN_s}{ds.dt} = 1{,}7429 \times 10^{+27}\ m^{-2} s^{-1}}$$

EXERCICE 03 :



1. D'après la figure ci-contre les particules ayant une vitesse $\vec{v}$ qui arrivent à la surface s du trou durant un intervalle de temps dt, sont contenues dans le prisme cylindrique de base s et de hauteur $v.\Delta t.\cos\alpha$, avec α est l'angle entre $\vec{s}$ et $\vec{v}$. D'où les molécules incidentes sont contenues dans un volume

$$d\tau = v.dt.\cos\alpha\,.s$$

Comme

$$v.\cos\alpha = \vec{v} \bullet \vec{e}_x = v_x$$

Alors

$$d\tau = v_x.dt.s$$

Le nombre de molécules contenues dans ce volume est obtenu en multipliant la densité volumique, considérée uniforme, par le volume

$$dN = \frac{N}{V}d\tau.f(\vec{v}).dv_x dv_y dv_z = \frac{N}{V}v_x.dt.s.f(\vec{v}).dv_x dv_y dv_z$$

La proportion de molécules ayant une vitesse $\vec{v}$ est donnée par le facteur de Maxwell–Boltzmann

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi.k_B T}\right)^{3/2}.e^{-\frac{m}{2.k_B T}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}$$

Pour obtenir *le nombre de molécules du gaz qui traversent la surface s quelque soit leur vitesse* (à condition que $v_x > 0$) on intègre sur toutes les vitesses en respectant la condition précédente. Il vient que :

$$dN_s = \iiint \frac{N}{V}v_x.dt.s.\left(\frac{m}{2\pi.k_B T}\right)^{3/2}.e^{-\frac{m}{2.k_B T}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}dv_x dv_y dv_z$$

Et

$$dN_s = \frac{N}{V}dt.s\left\{\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x.\left(\frac{m}{2\pi.k_B T}\right)^{3/2}.e^{-\frac{m}{2.k_B T}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}dv_x dv_y dv_z\right\}$$

Comme

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x.\left(\frac{m}{2\pi.k_B T}\right)^{3/2}.e^{-\frac{m}{2.k_B T}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}dv_x dv_y dv_z = \int_0^{+\infty} v_x.\left(\frac{m}{2\pi.k_B T}\right)^{1/2}.e^{-\frac{m}{2.k_B T}(v_x^2)}dv_x$$

Et

$$\int_0^{+\infty} v_x.\left(\frac{m}{2\pi.k_B T}\right)^{1/2}.e^{-\frac{m}{2.k_B T}(v_x^2)}dv_x = \left(\frac{m}{2\pi.k_B T}\right)^{1/2}\left[-\frac{k_B T}{m}e^{-\frac{m}{2.k_B T}(v_x^2)}\right]_0^{+\infty} = \left(\frac{k_B T}{2\pi.m}\right)^{1/2}$$

Alors :

$$\boxed{dN_s = \frac{N}{V}dt.s\left(\frac{k_B T}{2\pi.m}\right)^{1/2}}$$

2. La variation du nombre de particules dans l'enceinte :

$$dN = -dN_s = -\frac{N}{V}dt.s\left(\frac{k_B T}{2\pi.m}\right)^{1/2} = -\lambda.N.dt$$

Avec

$$\boxed{\lambda = \frac{s}{V}\left(\frac{k_B T}{2\pi.m}\right)^{1/2} = \frac{s}{V}\left(\frac{R.T}{2\pi.M}\right)^{1/2}}$$

Donc

$$\frac{dN}{N} = -\lambda . dt$$

En intégrant

$$\ln(N) = -\lambda . t + \text{constante}$$

Et

$$\boxed{N(t) = N_0 . \exp(-\lambda . t)}$$

N_0 est le nombre de particule initial dans l'enceinte $(t = 0)$.

3. Dans le cas d'un gaz parfait monoatomique .

$$pV = n.R.T \quad \text{ou} \quad pV = N.k_B.T$$

Comme V et T sont constant

$$p(t) = \frac{k_B T}{V} N(t) = \frac{k_B T}{V} N_0 . \exp(-\lambda . t)$$

Ou

$$\boxed{p(t) = p_0 . \exp(-\lambda . t)}$$

Avec

$$\boxed{p_0 = \frac{k_B T}{V} N_0}$$

Est la pression initiale dans l'enceinte $(t = 0)$.

L'énergie

$$U = nC_V T = \frac{3}{2} nRT \qquad \text{ou} \qquad U(t) = \frac{3}{2} k_B T . N(t)$$

Donc

$$\boxed{U(t) = U_0 . \exp(-\lambda . t)}$$

Avec

$$\boxed{U_0 = \frac{3}{2} k_B T . N_0}$$

Est l'énergie interne initiale dans l'enceinte $(t = 0)$.

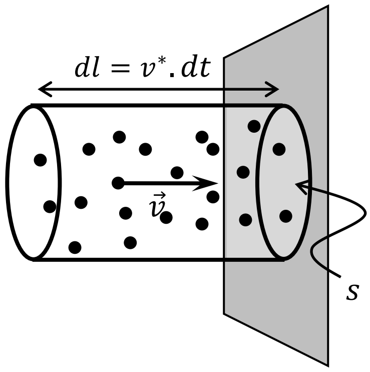
EXERCICE 04 :

1. Vitesse quadratique moyenne.

$$\boxed{v^* = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3}.\sqrt{\frac{k_B T}{m}} = \sqrt{3}.\sqrt{\frac{RT}{M}}}$$

Avec $R = k_B.\mathcal{N}_A$ et $M = m.\mathcal{N}_A$
($\mathcal{N}_A$ est le nombre d'Avogadro et M la masse molaire).

2. D'après la figure ci-contre les particules ayant une vitesse v^* qui frappent la surface s durant un intervalle de temps dt, sont contenues dans le cylindre de base s et de hauteur $v^* dt$. D'où les molécules incidentes sont contenues dans un volume



$$d\tau = s.dl = v^* s.dt$$

Le nombre de molécules contenues dans ce volume est obtenu en multipliant la densité volumique, considérée uniforme, par le volume

$$dN = \frac{N_1}{V} d\tau$$

Mais Seulement 1/6 des atomes ont une vitesse dont la direction et le sens permettent le contact avec la surface s. Alors :

$$\boxed{dN_{1\to 2} = \frac{1}{6}\frac{N_1}{V}\left(3\frac{k_B T}{m}\right)^{1/2} s.dt = \frac{1}{6}\frac{N_1}{V} v^* s.dt}$$

3. De même que précédemment :
Puisque les deux enceintes sont identiques en volume et que le trou est le même (en considérant que les molécules n'interagissent pas entre elles en entrant et en sortant du trou).

$$\boxed{dN_{2\to 1} = \frac{1}{6}\frac{N_2}{V} v^* s.dt} \qquad \text{et} \qquad \boxed{dN_{2\to \text{vide}} = \frac{1}{6}\frac{N_2}{V} v^* s.dt}$$

4. La variation du nombre de molécules dans l'enceinte E_1.

$$dN_1 = -dN_{1\to 2} + dN_{2\to 1}$$

Et

$$\frac{dN_1}{dt} + \frac{N_1 - N_2}{\tau} = 0$$

La variation du nombre de molécules dans l'enceinte E_2.

$$dN_2 = -dN_{2\to 1} - dN_{2\to \text{vide}} + dN_{1\to 2}$$

D'où

$$dN_2 = +\lambda.N_1.dt - 2\lambda.N_2.dt$$

Et

$$\frac{dN_2}{dt} + \frac{2N_2 - N_1}{\tau} = 0$$

Avec

$$\boxed{\tau = \frac{6V}{sv^*}} \qquad \text{A.N.} \qquad \boxed{\tau = 0{,}01385\ sec}$$

5.

a. L'enceinte (1) se vide directement dans l'enceinte (2) qui est initialement vide, donc N_1 diminue. L'enceinte (2) commence d'abord par se remplir de gaz à partir de l'enceinte (1), donc N_2 augmente dans un premier temps, après cela elle commence à se vider vers l'extérieur et N_2 diminue.

b. La pente exprime la dérivée donc la variation du nombre de molécules dans l'enceinte, puisque N_1 au départ diminue sa variation est négative et la pente est négative, et puisque N_2 augmente au départ sa variation est positive et la pente est positive.
N_1 commence à partir de $1{,}0$ car il y avait au départ 01 mole de gaz parfait dans l'enceinte (1).
N_2 commence à partir de 0 car l'enceinte (2) était vide au départ.

c. Pour N_2 maximum nous avons :

$$\frac{dN_2}{dt} = 0$$

En remplaçant dans la seconde équation, on obtient :

$$(2N_2 - N_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{N_1}{N_2} = 2}$$

D'après le graphe on remarque que le nombre de molécules dans l'enceinte (1) est lié au temps τ.
Plus τ est grand plus le nombre de molécules dans l'enceinte pour t donné est important.
Donc si nous avons deux gaz d'isotopes différents $M_b > M_a \quad \Rightarrow \quad \tau_b > \tau_a$, d'où à t donné le nombre de molécules de l'isotope b sera plus important que le nombre de molécules de l'isotope a (en considérant qu'ils étaient égaux au départ), et le rapport

$$r = \frac{N_1(\text{isotope } a)}{N_1(\text{isotope } b)} < 1$$

Ce dispositif sert à augmenter la proportion d'un isotope donné dans un gaz : enrichissement.

EXERCICE 05 : (Travail personnel)

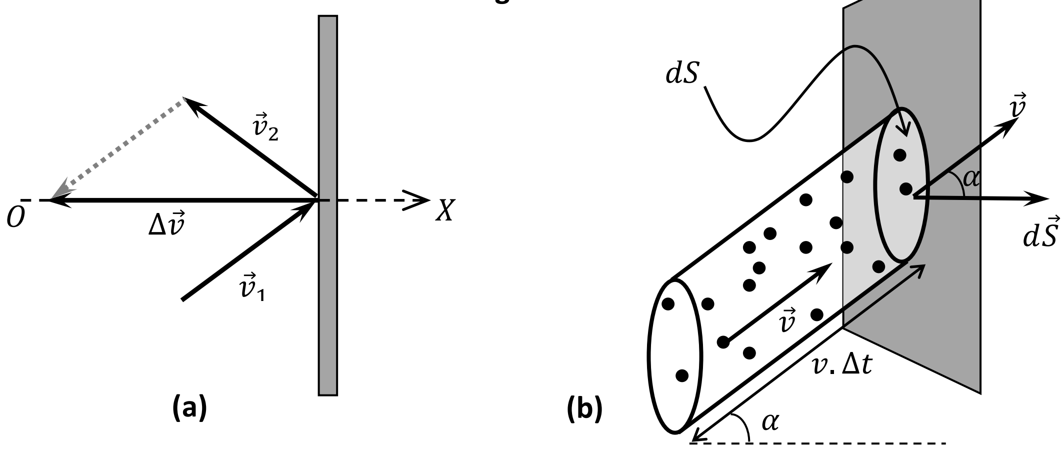
1. La variation de la quantité de mouvement de la molécule est égale à (figure 01.a.)

$$\Delta\vec{p} = m.\Delta\vec{v} = m.(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

Donc

$$\Delta\vec{p} = m.(v_{2x} - v_{1x}).\vec{e}_x = -2m.v_x.\vec{e}_x$$

Figure 01



Et la force appliquée par la paroi sur la molécule

$$\vec{f}_{\text{paroi/molécule}} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = -\frac{2m.v_x}{\Delta t}\vec{e}_x$$

En utilisant le principe de l'action et de la réaction, la force appliquée par la molécule sur la paroi est donnée par

$$\boxed{\vec{f}_{\text{molécule/paroi}} = \vec{f} = \frac{2m.v_x}{\Delta t}\vec{e}_x}$$

2. Condition que doit vérifier la vitesse : $\boxed{v_x > 0}$

3. D'après la figure 01.b. les particules ayant une vitesse $\vec{v}$ qui frappent la surface dS durant un intervalle de temps Δt, sont contenues dans le prisme cylindrique de base dS et de hauteur $v.\Delta t.\cos\alpha$, avec α est l'angle entre $d\vec{S}$ et $\vec{v}$. D'où les molécules incidentes sont contenues dans un volume

$$d\tau = v.\Delta t.\cos\alpha\,.dS$$

Comme

$$v.\cos\alpha = \vec{v} \bullet \vec{e}_x = v_x$$

Alors

$$d\tau = v_x.\Delta t.dS$$

Le nombre de molécules contenues dans ce volume est obtenu en multipliant la densité volumique, considérée uniforme, par le volume

$$\boxed{dN = \frac{N}{V}d\tau.f(\vec{v}).dv_x dv_y dv_z = n.v_x.\Delta t.dS.f(\vec{v}).dv_x dv_y dv_z}$$

4. Et la force appliquée par toutes les molécules ayant une vitesse $\vec{v}$ est donnée par :

$$\boxed{d\vec{F} = dN.\vec{f} = \frac{2m.N}{V}dS.v_x^2.f(\vec{v}).dv_x dv_y dv_z.\vec{e}_x}$$

5. La proportion de molécules ayant une vitesse $\vec{v}$ est donnée par le facteur de Maxwell–Boltzmann

$$f(\vec{v}) = A.e^{-\frac{m}{2.k_BT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}$$

Normalisation :

$$\int dP(\vec{v}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{v}).dv_xdv_ydv_z = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A.e^{-\frac{m}{2.k_BT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}dv_xdv_ydv_z = 1$$

D'où

$$A.\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m.v_x^2}{2.k_BT}}dv_x\right).\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m.v_x^2}{2.k_BT}}dv_x\right).\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m.v_x^2}{2.k_BT}}dv_x\right) = 1$$

Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m.v_x^2}{2.k_BT}}dv_x = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}} \times \sqrt{\pi}$$

Alors

$$\boxed{A = \left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}}$$

6. Pour obtenir *la force totale appliquée par toutes les molécules du gaz quelque soit leur vitesse* (à condition que $v_x > 0$) on intègre sur toutes les vitesses en respectant la condition précédente. Il vient que :

$$\vec{F} = \iiint d\vec{F}.\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}.e^{-\frac{m}{2.k_BT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}dv_xdv_ydv_z$$

Et

$$\vec{F} = \frac{2m.N}{V}dS\left\{\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2.\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}.e^{-\frac{m}{2.k_BT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}dv_xdv_ydv_z\right\}.\vec{e}_x$$

Comme

$$\langle v_x^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2.\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}.e^{-\frac{m}{2.k_BT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}dv_xdv_ydv_z = \frac{k_BT}{m}$$

Et que la fonction à intégrer est paire. Alors :

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2.\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}.e^{-\frac{m}{2.k_BT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}dv_xdv_ydv_z = \frac{k_BT}{2m}$$

Donc

$$\boxed{\vec{F} = \frac{N}{V}k_BT.dS.\vec{e}_x}$$

7. La pression du gaz appliquée sur la paroi est donnée par

$$p = \frac{F}{dS} = \frac{N}{V}k_BT$$

On obtient finalement :

$$\boxed{pV = Nk_BT} \quad \text{ou} \quad \boxed{pV = nRT}$$

Avec

$$N = n\mathcal{N}_A \quad \text{et} \quad R = \mathcal{N}_A k_B$$

$\mathcal{N}_A$ étant le nombre d'Avogadro.

Conclusion : C'est ***l'équation d'état des gaz parfaits***.

EXERCICE 06 : (Travail personnel)

1. La fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann pour les gaz parfaits.

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi.k_B T}\right)^{3/2}.\exp\left(-\frac{m}{2.k_B T}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)\right)$$

La fonction de distribution $\tilde{f}(v)$ du module de la vitesse est donnée par la probabilité d'avoir un module de vitesse compris entre v et $v + dv$, c'est-à-dire :

$$dP(v) = \tilde{f}(v).dv$$

Pour obtenir cette probabilité nous intégrons $dP(\vec{v})$ sur toutes les valeurs possibles de θ et de φ en coordonnées sphériques.

$$dP(v) = \int_{\theta,\varphi} dP(\vec{v}) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\vec{v}).v^2.\sin\theta\,.dvd\theta d\varphi \quad \text{avec} \quad d^3v = v^2.\sin\theta\,.dvd\theta d\varphi$$

D'où

$$\boxed{\tilde{f}(v) = 4\pi.v^2.f(\vec{v}) = 4\pi.v^2.\left(\frac{m}{2\pi.k_B T}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m.v^2}{2.k_B T}\right)}$$

2. Calcul de v_m.

$$\tilde{f}(v_m) = \left[\tilde{f}(v)\right]_{\max} \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{d\tilde{f}(v)}{dv}\right|_{v=v_m} = 0$$

Donc

$$4\pi.\left(\frac{m}{2\pi.k_B T}\right)^{3/2}\left\{2v.\exp\left(-\frac{m.v^2}{2.k_B T}\right) - \frac{m}{k_B T}v^3\exp\left(-\frac{m.v^2}{2.k_B T}\right)\right\} = 0$$

Et

$$\boxed{v_m = \sqrt{2}.\sqrt{\frac{k_B T}{m}}}$$

3. Calcul de la vitesse quadratique moyenne $v^* = \sqrt{\langle v^2\rangle}$.

$$\langle v^2\rangle = \int_0^{+\infty} v^2.\tilde{f}(v).dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi.k_B T}\right)^{3/2}\int_0^{+\infty} v^4.e^{-\frac{m.v^2}{2.k_B T}}dv$$

En intégrant par parties ; $\left(g = v^3, h' = v.e^{-\frac{m.v^2}{2.k_B T}}\right)$ et $\left(g' = 3v^2, h = -\frac{k_B T}{m}.e^{-\frac{m.v^2}{2.k_B T}}\right)$ on trouve :

$$\langle v^2\rangle = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi.k_B T}\right)^{3/2}\left\{\left[-\frac{k_B T}{m}.v^3 e^{-\frac{m.v^2}{2.k_B T}}\right]_0^{+\infty} + \frac{3k_B T}{m}\int_0^{+\infty} v^2.e^{-\frac{m.v^2}{2.k_B T}}dv\right\}$$

Le premier terme étant nul en 0 à cause de v^3 et nul à l'infini à cause de $e^{-\frac{m.v^2}{2.k_B T}}$, on a :

$$\langle v^2\rangle = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi.k_B T}\right)^{3/2}\frac{3k_B T}{m}\int_0^{+\infty} v^2.e^{-\frac{m.v^2}{2.k_B T}}dv$$

Comme la distribution est normée $4\pi\left(\frac{m}{2\pi.k_B T}\right)^{3/2}\int_0^{+\infty} v^2.e^{-\frac{m.v^2}{2.k_B T}}dv = 1$, alors :

$$\langle v^2\rangle = \frac{3.k_B T}{m} \quad \text{et} \quad \boxed{v^* = \sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{3}.\sqrt{\frac{k_B T}{m}}}$$

4. Calcul de la valeur moyenne du module de la vitesse $\langle v \rangle = \bar{v}$.

$$\langle v \rangle = \int_0^{+\infty} v.\tilde{f}(v).dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2} \int_0^{+\infty} v^3.e^{-\frac{m.v^2}{2.k_BT}}dv$$

En intégrant par parties ; $\left(g = v^2, h' = v.e^{-\frac{m.v^2}{2.k_BT}}\right)$ et $\left(g' = 2v, h = -\frac{k_BT}{m}.e^{-\frac{m.v^2}{2.k_BT}}\right)$ on trouve :

$$\langle v^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2} \left\{\left[-\frac{k_BT}{m}.v^2e^{-\frac{m.v^2}{2.k_BT}}\right]_0^{+\infty} + \frac{2k_BT}{m}\int_0^{+\infty} v.e^{-\frac{m.v^2}{2.k_BT}}dv\right\}$$

Le premier terme étant nul en 0 à cause de v^2 et nul à l'infini à cause de $e^{-\frac{m.v^2}{2.k_BT}}$, on a :

$$\langle v^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2} \frac{2k_BT}{m}\int_0^{+\infty} v.e^{-\frac{m.v^2}{2.k_BT}}dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2} \frac{2k_BT}{m}\left[-\frac{k_BT}{m}e^{-\frac{m.v^2}{2.k_BT}}\right]_0^{+\infty}$$

Finalement :

$$\boxed{\bar{v} = \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi}}.\sqrt{\frac{k_BT}{m}}}$$

5.

$$\begin{cases} v_m = \sqrt{2}.\sqrt{k_BT/m} = 1{,}41\sqrt{k_BT/m} \\ v^* = \sqrt{3}.\sqrt{k_BT/m} = 1{,}72\sqrt{k_BT/m} \\ \bar{v} = \sqrt{8/\pi}.\sqrt{k_BT/m} = 1{,}59\sqrt{k_BT/m} \end{cases}$$

Donc à T donné

$$\boxed{v_m \le \bar{v} \le v^*}$$

L'égalité étant obtenue pour $T = 0$.

EXERCICE 07 :

1. Normalisation de $f(v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2)$.

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty}\iint_{-\infty}^{+\infty} f(v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2) \times dv_x dv_y dv_z d\omega_1 d\omega_2 = 1$$

Donc

$$A\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_i^2} dv_i\right)^3 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_i^2} d\omega_i\right)^2 = 1 \qquad \text{avec} \qquad \beta = \frac{1}{2k_B T}$$

En utilisant $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$.

$$A\left(\sqrt{\frac{2}{\beta m}}\sqrt{\pi}\right)^3 \left(\sqrt{\frac{2}{\beta I}}\sqrt{\pi}\right)^2 = 1$$

Donc

$$\boxed{A = \left(\frac{m}{2\pi . k_B T}\right)^{3/2} \left(\frac{I}{2\pi . k_B T}\right)}$$

2.

Calculons $\langle v_x^2 \rangle$:

$$\langle v_x^2 \rangle = \left\{\left(\frac{m}{2\pi . k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 . e^{-\frac{\beta m}{2}v_x^2} dv_x\right\} \times \left\{\left(\frac{m}{2\pi . k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_y^2} dv_y\right\}$$
$$\times \left\{\left(\frac{m}{2\pi . k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_z^2} dv_z\right\} \times \left\{\left(\frac{I}{2\pi . k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_1^2} d\omega_1\right\}$$
$$\times \left\{\left(\frac{I}{2\pi . k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_2^2} d\omega_2\right\}$$

Donc

$$\langle v_x^2 \rangle = \left(\frac{m}{2\pi . k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 . e^{-\frac{\beta m}{2}v_x^2} dv_x = \left(\frac{m}{2\pi . k_B T}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{\beta m}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^2 . e^{-\tau^2} d\tau$$

Comme on a calculé (par parties) $\int_{-\infty}^{+\infty} \tau^2 . e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Donc

$$\boxed{\langle v_x^2 \rangle = \left(\frac{m}{2\pi . k_B T}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{\beta m}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{k_B T}{m}}$$

De la même manière :

$$\boxed{\langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{k_B T}{m}}$$

Calculons $\langle \omega_1^2 \rangle$:

$$\langle \omega_1^2 \rangle = \left\{\left(\frac{m}{2\pi . k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_x^2} dv_x\right\} \times \left\{\left(\frac{m}{2\pi . k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_y^2} dv_y\right\}$$
$$\times \left\{\left(\frac{m}{2\pi . k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_z^2} dv_z\right\} \times \left\{\left(\frac{I}{2\pi . k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1^2 . e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_1^2} d\omega_1\right\}$$
$$\times \left\{\left(\frac{I}{2\pi . k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_2^2} d\omega_2\right\}$$

Donc

$$\langle \omega_1^2 \rangle = \left(\frac{I}{2\pi . k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1^2 . e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_1^2} d\omega_1 = \left(\frac{I}{2\pi . k_B T}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{\beta I}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^2 . e^{-\tau^2} d\tau$$

Comme on a calculé (par parties) $\int_{-\infty}^{+\infty} \tau^2 . e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Donc

$$\boxed{\langle \omega_1^2 \rangle = \left(\frac{I}{2\pi . k_B T}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{\beta I}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{k_B T}{I}}$$

De la même manière :

$$\boxed{\langle \omega_2^2 \rangle = \frac{k_B T}{I}}$$

L'énergie moyenne d'une particule est égale à son énergie cinétique moyenne. L'énergie interne de N particules est égale à :

$$U = N\langle E_c \rangle = N\frac{1}{2}m\left\{\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle\right\} + N\frac{1}{2}I\{\langle \omega_1^2 \rangle + \langle \omega_2^2 \rangle\}$$

Donc

$$\boxed{U = N\langle E_c \rangle = \frac{5}{2}Nk_B T}$$

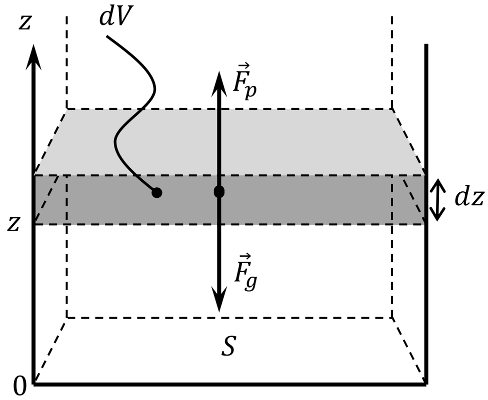
3. Capacité calorifique à volume constant.

$$\boxed{C_V = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V = \frac{5}{2}Nk_B}$$

Pour une mole de particules $N = \mathcal{N}_A$ la capacité calorifique molaire

$$\boxed{C_V = \frac{5}{2}R}$$

EXERCICE 08 :



1. Le volume de la couche est égal à

$$dV = S.dz$$

Et

$$\boxed{dN_z = n(z).dV = n(z).S.dz}$$

2. La force de gravité est donnée par

$$F_g = dM.g = \rho.dV.g$$

Donc

$$F_g = n(z).m.S.dz.g$$

Avec $n(z) = dN/dV$ est la densité de molécules à une hauteur z.

3. La force due à la différence de pression

$$F_p = S.\left(p(z) - p(z+dz)\right) = -S\frac{dp}{dz}dz$$

Le signe $(-)$ est dû au fait que la pression diminue quand z augmente $\frac{dp}{dz} < 0$.

4. En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits

$$p.V = N.k_BT$$

On a donc

$$p(z) = \frac{N}{V}k_BT = n(z).k_BT$$

Et

$$\frac{dp}{dz} = \frac{dn}{dz}k_BT$$

La condition d'équilibre dynamique de la couche $F_g = F_p$ s'écrit :

$$n(z).m.g = -\frac{dn(z)}{dz}k_BT$$

D'où

$$\frac{dn(z)}{n(z)} = -\frac{mg}{k_BT}dz$$

En intégrant, nous trouvons :

$$\boxed{n(z) = n_0.\exp\left(-\frac{mg.z}{k_BT}\right)}$$

Et

$$p(z) = p_0.\exp\left(-\frac{mg.z}{k_BT}\right) \qquad \text{avec} \qquad p_0 = n_0.k_BT$$

n_0 et p_0 sont respectivement la densité de molécules et la pressions à une altitude $z = 0$.

5. Dans la statistique de Maxwell-Boltzmann.

Le nombre de particules ayant chacune une position $\vec{r}(x,y,z)$ à $d^3r = dxdydz$ près, ayant une vitesse $\vec{v}\left(v_x, v_y, v_z\right)$ à $d^3v = dv_xdv_ydv_z$ près est donnée par :

$$dN(\vec{r},\vec{v}) = N.F(\vec{r},\vec{v}).d^3r.d^3v = NA.\exp\left(-\frac{E(\vec{r},\vec{v})}{k_BT}\right).d^3r.d^3v$$

Tel que :

$$E(\vec{r},\vec{v}) = E_C(\vec{v}) + E_P(\vec{r})$$

Est l'énergie mécanique totale d'une particule (toutes les particules étant identiques).

Le nombre de particules ayant une position donnée $\vec{r}(x,y,z)$ à $d^3r = dxdydz$ près, quelque soit leurs vitesse est obtenue en faisant la somme (intégrale) sur les vitesses (terme comprenant l'énergie cinétique). Donc

$$dN(\vec{r}) = N.A'.\exp\left(-\frac{E_P(\vec{r})}{k_BT}\right).d^3r$$

Dans le cas d'un gaz parfait qui ne subit que le champ gravitationnel terrestre

$$E_P(\vec{r}) = E_P(h) = mgh$$

En comparant avec la réponse en 1

$$dN_z = n(z).dV = n(z).d^3r$$

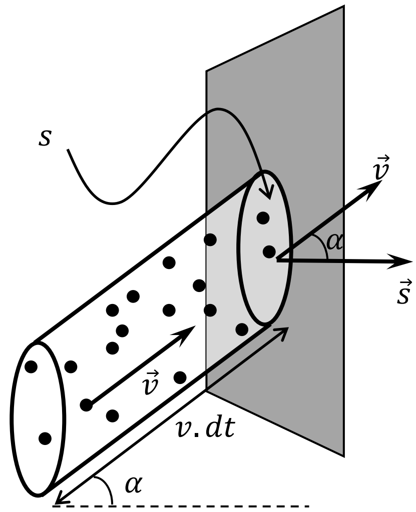
On retrouve

$$n(z) = B.\exp\left(-\frac{E_P(z)}{k_BT}\right) = B.\exp\left(-\frac{mgz}{k_BT}\right)$$

B est une constante.

EXERCICE 09 :

1. D'après la figure ci-contre les particules ayant une vitesse $\vec{v}$ qui arrivent à la surface s du trou durant un intervalle de temps dt, sont contenues dans le prisme cylindrique de base s et de hauteur $v.\Delta t.\cos\alpha$, avec α est l'angle entre $\vec{s}$ et $\vec{v}$. D'où les molécules incidentes sont contenues dans un volume



$$d\tau = v.dt.\cos\alpha.s$$

Comme

$$v.\cos\alpha = \vec{v}\bullet\vec{e}_x = v_x$$

Alors

$$d\tau = v_x.dt.s$$

Le nombre de molécules contenues dans ce volume est obtenu en multipliant la densité volumique, considérée uniforme, par le volume

$$dN = \frac{N}{V}d\tau.f(\vec{v}).dv_x dv_y dv_z = \frac{N}{V}v_x.dt.s.f(\vec{v}).dv_x dv_y dv_z$$

La proportion de molécules ayant une vitesse $\vec{v}$ est donnée par le facteur de Maxwell–Boltzmann

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}.e^{-\frac{m}{2.k_BT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}$$

Pour obtenir *le nombre de molécules du gaz qui traversent la surface s quelque soit leur vitesse* (à condition que $v_x > 0$) on intègre sur toutes les vitesses en respectant la condition précédente. Il vient que :

$$dN_s = \iiint \frac{N}{V}v_x.dt.s.\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}.e^{-\frac{m}{2.k_BT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}dv_x dv_y dv_z$$

Et

$$dN_s = \frac{N}{V}dt.s\left\{\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x.\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}.e^{-\frac{m}{2.k_BT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}dv_x dv_y dv_z\right\}$$

Comme

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x.\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}.e^{-\frac{m}{2.k_BT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}dv_x dv_y dv_z = \int_0^{+\infty} v_x.\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}.e^{-\frac{m}{2.k_BT}(v_x^2)}dv_x$$

Et

$$\int_0^{+\infty} v_x.\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}.e^{-\frac{m}{2.k_BT}(v_x^2)}dv_x = \left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\left[-\frac{k_BT}{m}e^{-\frac{m}{2.k_BT}(v_x^2)}\right]_0^{+\infty} = \left(\frac{k_BT}{2\pi.m}\right)^{1/2}$$

Alors :

$$\boxed{dN_s = \frac{N}{V}dt.s\left(\frac{k_BT}{2\pi.m}\right)^{1/2}}$$

Volume du cylindre : $V = \pi R^2 H = \pi D^2\, H/4$
Surface du cylindre : $S = 2\pi RH = \pi DH$
Surface de condensation : $s = 0{,}1\%.S = \pi DH \times 10^{-3}$

$$\boxed{dN_s = N\frac{4\times 10^{-3}}{D}\left(\frac{k_BT}{2\pi.m}\right)^{1/2}dt}$$

2. La variation du nombre de particules dans l'enceinte :

$$dN = -dN_s = -\frac{N}{V}dt.s\left(\frac{k_BT}{2\pi.m}\right)^{1/2} = -N\frac{1}{\tau}dt$$

Avec

$$\boxed{\tau = \frac{V}{s}\left(\frac{2\pi.m}{k_BT}\right)^{1/2} = \frac{D}{4\times 10^{-3}}\left(\frac{2\pi.m}{k_BT}\right)^{1/2}}$$

Donc

$$\frac{dN}{N} = -\frac{1}{\tau}dt$$

En intégrant

$$\ln(N) = -\frac{t}{\tau} + \text{constante}$$

Et

$$\boxed{N(t) = N(0).\exp(-t/\tau)}$$

$N(0)$ est le nombre de particule initial dans l'enceinte $(t = 0)$.

3. Dans le cas d'un gaz parfait.

$$pV = nRT \quad \text{ou} \quad pV = Nk_BT$$

Comme V et T sont constant

$$p(t) = \frac{k_B.T}{V}N(t) = \frac{k_B.T}{V}N_0.\exp(-\lambda.t)$$

Ou

$$\boxed{p(t) = p(0).\exp(-t/\tau) = \frac{k_B.T}{V}N(0).\exp(-t/\tau)}$$

$p(0)$ est la pression initiale dans l'enceinte $(t = 0)$.

La pression dans l'enceinte est diminuée d'un facteur 3.

$$\frac{p(t)}{p(0)} = \frac{1}{3} = \exp(-\Delta t/\tau)$$

D'où

$$\boxed{\Delta t = \ln 3 \times \tau = \frac{\ln 3}{4\times 10^{-3}}D\left(\frac{2\pi.m}{k_BT}\right)^{1/2}}$$

4. Application numérique :

$$\boxed{\tau = 0{,}1664 \ \text{secondes}} \quad ; \quad \boxed{\Delta t = 0{,}1828 \ \text{secondes}}$$

EXERCICE 10 : (Travail personnel)

Montrons par récurrence que

$$\boxed{I_{2k}(a) = \int_0^{+\infty} x^{2k}.e^{-a.x^2}dx = \frac{(2k)!.\sqrt{\pi}}{k!.2^{2k+1}.a^{k+\frac{1}{2}}}} \qquad ; \qquad k \in \mathbb{N}$$

Vérifions cette égalité pour $k = 0$

$$I_0(a) = \int_0^{+\infty} e^{-a.x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

On considère que l'égalité est vérifiée pour k, puis calculons l'intégrale pour $(k+1)$.

$$I_{2(k+1)}(a) = \int_0^{+\infty} x^{2k+2}.e^{-a.x^2}dx = \int_0^{+\infty} x^{2k+1}.x.e^{-a.x^2}dx$$

En utilisant l'intégration par parties et la valeur de l'intégrale I_{2k}, nous avons :

$$I_{2(k+1)}(a) = \int_0^{+\infty} x^{2k+1}.x.e^{-a.x^2}dx = \left[x^{2k+1}\frac{e^{-a.x^2}}{-2a}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}(2k+1)x^{2k}\frac{e^{-a.x^2}}{-2a}dx$$

Comme

$$\left[x^{2k+1}\frac{e^{-a.x^2}}{-2a}\right]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2a}\frac{x^{2k+1}}{e^{a.x^2}}\right) - 0 = 0$$

Donc

$$I_{2(k+1)}(a) = \frac{2k+1}{2a}\int_0^{+\infty} x^{2k}.e^{-a.x^2}dx = \frac{2k+1}{2a}I_{2k}(a)$$

$$I_{2(k+1)}(a) = \frac{2k+1}{2a}\frac{(2k)!.\sqrt{\pi}}{k!.2^{2k+1}.a^{k+\frac{1}{2}}} = \frac{(2k+1)!.\sqrt{\pi}}{k!.2^{2k+1+1}.a^{(k+1)+\frac{1}{2}}}$$

En multipliant et en divisant par $(2k+2)$

$$I_{2(k+1)}(a) = \frac{(2k+2)(2k+1)!.\sqrt{\pi}}{2(k+1).k!.2^{2k+1+1}.a^{(k+1)+\frac{1}{2}}}$$

$$I_{2(k+1)}(a) = \frac{(2k+2)!.\sqrt{\pi}}{(k+1)!.2^{2(k+1)+1}.a^{(k+1)+\frac{1}{2}}}$$

Donc cette égalité est vérifiée pour $(k+1)$.

Montrons par récurrence que

$$\boxed{I_{2k+1}(a) = \int_0^{+\infty} x^{2k+1}.e^{-a.x^2}dx = \frac{k!}{2.a^{k+1}}} \qquad ; \qquad k \in \mathbb{N}$$

Vérifions cette égalité pour $k = 0$

$$I_1(a) = \int_0^{+\infty} x.e^{-a.x^2}dx = \left[\frac{e^{-a.x^2}}{-2a}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2a} \qquad (\text{avec} \quad 0! = 1)$$

On considère que l'égalité est vérifiée pour k, puis calculons l'intégrale pour $(k+1)$.

$$I_{2(k+1)+1}(a) = \int_0^{+\infty} x^{2k+3}.e^{-a.x^2}dx = \int_0^{+\infty} x^{2k+2}.x.e^{-a.x^2}dx$$

En utilisant l'intégration par parties et la valeur de l'intégrale I_{2k}, nous avons :

$$I_{2(k+1)+1}(a) = \left[x^{2k+2}\frac{e^{-a.x^2}}{-2a}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (2k+2)x^{2k+1}\frac{e^{-a.x^2}}{-2a}dx$$

Comme

$$\left[x^{2k+2}\frac{e^{-a.x^2}}{-2a}\right]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2a}\frac{x^{2k+2}}{e^{a.x^2}}\right) - 0 = 0$$

Donc

$$I_{2(k+1)+1}(a) = \frac{2k+2}{2a}\int_0^{+\infty} x^{2k+1}.e^{-a.x^2}dx = \frac{k+1}{a}I_{2k+1}(a)$$

$$I_{2(k+1)}(a) = \frac{k+1}{a}\frac{k!}{2.a^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{2.a^{(k+1)+1}}$$

Donc cette égalité est vérifiée pour $(k+1)$.