CHAPITRE III

Resolution des équations non linéaires:

On se propose dans ce chapitre d'étudier les équations de la forme : $F(x) = 0$ (1) ou $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

On désigne par $\alpha = \bar{x}$ une solution de l'équation (1)

I/ Généralité sur les méthodes itératives:

Ce sont les méthodes basées sur la construction d'une suite (x_n) destinée à tendre vers une solution exacte $\bar{x}$

On distingue deux types de méthodes itératives.

1/ Méthodes itératives récurrentes:

Ce sont les méthodes dont le terme général de la suite est défini à partir du terme précédent.

$$\begin{cases} x_0 \text{ donnée.} \\ x_{n+1} = \phi(x_n) \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$ ϕ est une fonction réelle

Exemple: - Méthode des itérations

- Méthode de Newton

2/ Méthodes non récurrentes:

Ce sont les méthodes dont le terme général est défini à partir de plusieurs termes précédents.

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{n+1} = \phi(x_0, x_1, \dots, x_n) \quad \forall n \end{cases}$$ ϕ une f réelle à plusieurs variables

Exemples : Méthode de dichotomie

- Méthode des interpolations.

3/ Définition:

On dit que une méthode itérative est convergente si: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \bar{x}$ $\quad (F(\bar{x}) = 0)$

II/ Méthode des Itérations

Elle s'applique aux équations de la forme (E) $x = f(x)$

($\bar{x}$ une solution de (E) $\bar{x} = f(\bar{x})$)

1/ Déscription de la Méthode:

La méthode est définie par:

1/ $f : [a.b] \longrightarrow [a.b]$

2/ $x_0 \in [a.b]$ quelconque (point initial)

3/ $x_{n+1} = f(x_n)$ $\forall n \geq 0$ ($\varphi \equiv f$) (une suite de calculs)

2 Convergence du procédé itératif:

Définition:

* Soit f une fct continue sur $[a.b]$. f est une fct de Lipschitz s'il $\exists$ $0<K<1$ tq $\forall x_1, x_2 \in [a.b]$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|$$

* On dit que f est contractante dans $[a.b]$ s'il existe $0<L<1$ tellque: $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$

Remarques:

(1) Si f est Lipschitzienne alors f est continue

(2) f est Lipschitzienne $\not\Rightarrow$ f dérivable

Théoreme: 1.1 [point fixe]

si g est fonction de Lipschitz alors:

(i) L'equation $x = g(x)$ à une seul racine.

(ii) La suite $\{x_n\}$ definie par $x_{n+1} = g(x_n)$ avec x_0 quelconque converge vers cette unique racine de $x = g(x)$ donc de $f(\alpha) = \alpha$ et on a:

$$\boxed{|\alpha - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|}$$

Théorème 1.2

Soit la fonction $g(x)$ définie et dérivable sur $[a,b]$ s'il existe un nombre q telle que :

$$|g'(x)| < q < 1 \quad \forall x \in [a,b] \quad \text{alors}$$

(i) Le processus itératif $x_n = g(x_{n-1})$ converge indépendant du pt x_0

(ii) La valeur limite $\alpha = \lim_{n \to \infty} x_n$ est l'unique racine de $x = g(x)$ sur $[a,b]$.

Remarque:

- Le théorème 1.2 donne une condition suffisante c.a.d pour que la méthode de pF converge il suffit que:

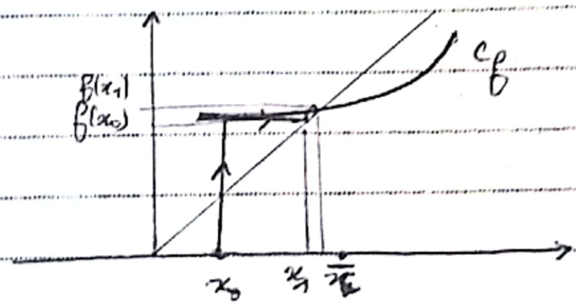
$$|g'(x)| < 1 \quad \text{sur } [a,b]$$

- Le théorème reste valable sur $]-\infty, +\infty[$ il suffit que

$$|g'(x)| < 1 \quad \text{si } x \in \mathbb{R}$$

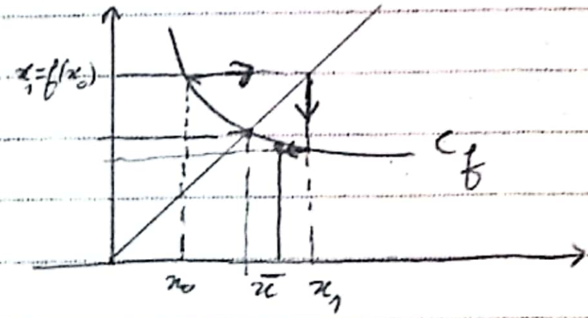
Interprétation géométrique de la méthode:

$0 < f' < 1$



Convergence en escalier

$-1 < f' < 0$



Converge en spirale

Exemple : L'équation $f(x) = x^2 - 3$ $x_0 = 2$

① $x^2 + x - 3 = x \rightsquigarrow g_1(x) = x^2 + x - 3$

② $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{x} \rightsquigarrow g_2(x) = \frac{3}{x}$

③ $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{x} \Rightarrow 2x = \frac{3}{x} + x \rightsquigarrow g_3(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x} + x\right)$

n	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$
1	3	1.5	1.75
2	9	2	1.73214
3	87	1.5	1.732004
4	7653	2	1.73200028
5	⋮	⋮	⋮
	divergence	divergence	converge

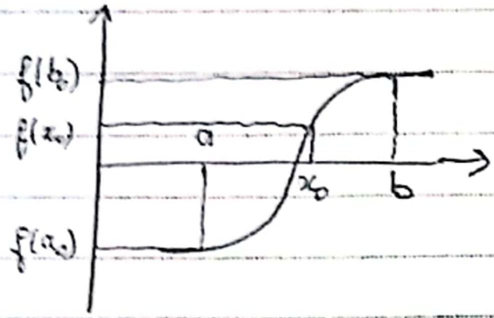
La méthode de dichotomie:

est une méthode basée sur le théorème des valeurs intermediaires pour trouver une solution approchée α à une équation

$$f(x) = 0.$$

supposon que f est une fonction continue sur $[a.b]$ avec: $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$

il existe un racine réel c ds $[a.b]$ tq: $f(c) = 0$



L'idée est alors d'évaluer ce que vaut f au milieu de $[a.b]$ et de distingue les deux cas suivante:

* si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 0 \rightarrow$ une racine ds $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$
* si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq 0 \rightarrow$ une racine ds $\left[a. \frac{a+b}{2}\right]$

ainsi ds les deux cas on a trouve un intervalle de longeur moitié ds lequel est situé une racine α.
la moitié de l'intervalle qui contient la racine sert de nouvelle pour l'interaction suivante.
La méthode de dichotomie consiste a determiner une suite d'intervalles $[a_n, b_n]$ contenant α, la longeur de chaque intervalles étant la moitié de précedent

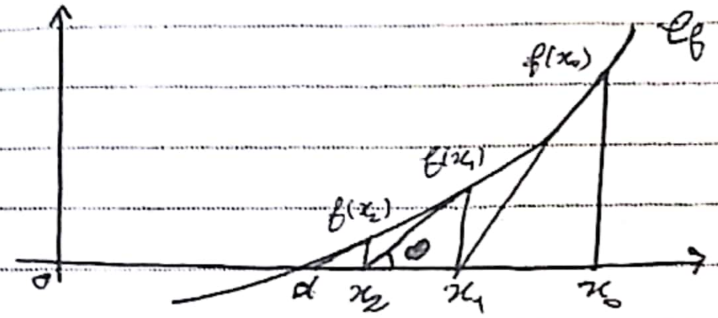
* $a_0 = a$ et $b_0 = b$
* si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq 0$ alors $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = b_n$
* si non $\longrightarrow$ $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$

on a toujours une solution de $f(x) = 0$ ds l'intervalle $[a_n, b_n]$ qui de la longeur $\frac{b_n - a_n}{2^n}$

3/ La Méthode de Newton :

La méthode de Newton consiste à introduire une suite (x_n) d'approximations successives de l'équation $f(x) = 0$

* On part d'un x_0 proche de la solution.
* A partir de x_0, on calcule un nouveau terme x_1 de la manière suivante : on trace la tangente à C_f en x_0. Cette tangente coupe l'axe des abscisses en x_1 comme indiqué sur la figure ci-dessous.
* On réitère ce procédé en calculant x_2 en remplaçant x_0 par x_1, puis x_3 en remplaçant x_1 par x_2 et ainsi de suite.



$$tg\,\theta = f'(x_n) = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}}$$

$$\Rightarrow f(x_n) = f'(x_n)(x_n - x_{n+1})$$

La formule de Newton :

$$\Rightarrow \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

La convergence de la méthode :

Théorème :

Soit $[a, b]$ un intervalle tq

i) $f(a) f(b) < 0$

ii) $\forall x \in [a, b]$ $\left.\begin{array}{l} f'(x) \neq 0 \\ f''(x) \neq 0 \end{array}\right\}$ gardant des même signes sur $[a, b]$

iii) x_0 est choisi tq : $f(x_0) f''(x_0) > 0$

Alors la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 0, 1, \ldots$$

converge vers l'unique solution de $f(x) = 0$