Ex 1 — Solution TD 2

On écrit le système sous la forme matricielle suivante :

$[A]X = [B]$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \\ -9 \end{bmatrix}$$

On forme la matrice augmentée $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & -3 & -9 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 = L_2 - \frac{1}{2} L_1 \\ L_3 = L_3 - \frac{1}{4} L_1 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 7/2 & -2 & -19/2 \\ 0 & 3/4 & -7/2 & -45/2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \end{array}$$

$$L_3 = L_3 - \frac{3}{14} L_2$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 7/2 & -2 & -19/2 \\ 0 & 0 & -43/14 & -129/14 \end{array}\right]$$

La résolution du système à matrice triangulaire supérieure résultant donne :

$$\begin{cases} -\frac{43}{14} x_3 = \frac{-129}{14} & \Rightarrow x_3 = 3 \\ \frac{7}{2} x_2 - 2(3) = -\frac{19}{2} & \Rightarrow x_2 = -1 \\ 4x_1 + (-1) + 2(3) = 9 & \Rightarrow x_1 = 1 \end{cases}$$

Donc la solution est : $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exo2 le système : $\begin{cases} -2x_1 + 10x_3 = 7 \\ 10x_1 - x_2 = 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 10 \end{cases}$

① le système est diagonale dominante lorsque la condition suivante est satisfaite : $\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{3} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i = \overline{1,n}$

On a : $\begin{cases} -2x_1 + 10x_3 = 7 & \rightarrow |0| + |10| > |-2| \quad \times \\ 10x_1 - x_2 = 9 & \rightarrow |10| + |0| > |-1| \quad \times \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 10 & \rightarrow |-1| + |10| > |-2| \quad \times \end{cases}$

donc la condition est non satisfaite, il faut changer les lignes : $\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 9 & \rightarrow |-1| + |0| < |10| \quad \checkmark \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 10 & \rightarrow |-1| + |-2| < |+10| \quad \checkmark \\ -2x_1 + 10x_3 = 7 & \rightarrow |-2| + |0| < |+10| \quad \checkmark \end{cases}$

Alors le système mnt est diagonale dominante

② a/ La méthode de Jacobi :

le système récursif pour la méthode de Jacobi s'écrit :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{10}(x_2^k + 9) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{10}(x_1^k + 2x_3^k + 10) \\ x_3^{k+1} = \frac{1}{10}(2x_1^k + 7) \end{cases}$$

à partir de $x^{(0)} = (0,0,0)^T$, on trouve :

k	0	1	2	3
x_1	0,0000	0,9000	1,0000	1,0230
x_2	0,0000	1,0000	1,2300	1,2760
x_3	0,0000	0,7000	0,8800	0,9000

La solution approchée est

$$X = \begin{pmatrix} 1,0230 \\ 1,2760 \\ 0,9000 \end{pmatrix}$$

b/ La méthode de Gauss-Seidel :

Le système récursif pour la méthode de Gauss-Seidel.

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{10}(x_2^k + 8) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{10}(x_1^{k+1} + 2x_3^k + 10) \\ x_3^{k+1} = \frac{1}{10}(2x^{k+1} + 7) \end{cases}$$

à partir de $X^{(0)} = (0,0,0)^T$, on trouve :

k	0	1	2	3
x_1	0,0000	0,8000	1,0090	1,0277
x_2	0,0000	1,0800	1,2769	1,2831
x_3	0,0000	0,8800	0,9018	0,9055

La solution approchée est : $x = \begin{pmatrix} 1,0277 \\ 1,2831 \\ 0,9055 \end{pmatrix}$

Ex 03

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -18 \end{cases}$$

$\sum |a_{ij}| < |a_{ii}|$

$|1| + |1| < |3|$ ✓

$|1| + |2| < |5|$ ✓

$|2| + |-1| < |-6|$ ✓

donc le système est diagonal dominante.

1. La méthode de Jacobi :

Le système récursif pour la méthode de Jacobi s'écrit :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{3}(-2x_2^k + x_3^k + 2) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{5}(-x_1^k - 2x_3^k + 17) \\ x_3^{k+1} = \frac{1}{6}(2x_1^k - x_2^k + 18) \end{cases}$$

à partir de $x^{(0)} = (0,0,0)^T$, on trouve :

k	0	1	2	3	4	5
x_1	0,000	0,6667	0,5333	0,8630	0,8674	0,9406
x_2	0,000	3,4000	2,0667	2,2311	2,0941	2,0602
x_3	0,000	3,0000	2,6556	2,8333	2,9158	2,9401

La solution approchée est : $X = \begin{pmatrix} 0,9406 \\ 2,0602 \\ 2,9401 \end{pmatrix}$

b/ Méthode de Gauss-Seidel

Le système récursif pour la méthode de Gauss-Seidel :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{3}\left(-x_2^k + x_3^k + 2\right) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{5}\left(-x_1^{k+1} - 2x_3^k + 17\right) \\ x_3^{k+1} = \frac{1}{6}\left(2x_1^{k+1} - x_2^{k+1} + 18\right) \end{cases}$$

à partir de $x^{(0)} = (0,0,0)^T$, on trouve :

k	0	1	2	3	4	5
x_1	0,000	0,6667	0,4704	0,8498	0,9381	0,9775
x_2	0,000	3,0667	2,2348	2,1163	2,0402	2,0154
x_3	0,000	2,6778	2,7843	2,9305	2,9727	2,9899

La solution approchée est : $x = \begin{pmatrix} 0,9775 \\ 2,0154 \\ 2,9899 \end{pmatrix}$

Conclusion :

On constate que, pour un même nombre d'itérations, la solution approximative obtenue par la méthode de Gauss-Seidel est plus précise. La méthode de Gauss-Seidel converge généralement plus vite que la méthode de Jacobi mais pas toujours.