Solution de TD03

Exo 1

1) Méthode de point fixe :

- x_0 pt initial donnée
- $x_{n+1} = g(x_n)$ $\quad n = 0, 1, \dots, n$
- $f(x) = 0 \iff x = g(x)$

Condition suffisante de convergence de $\{x_1, x_2, \dots\}$

$$|g'(x)| \leq q < 1 \qquad \forall x \in [a, b]$$

donc $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \alpha$ pt fixe de $g(x)$

2) $x^2 - 100x + 1 = 0$

Considerons la suite definie par :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 1}{100}, \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Soit $g(x) = \dfrac{x^2 + 1}{100}$ $\qquad I = [0, 1]$

$$g'(x) = \frac{1}{100}(2x) = \frac{x}{50}$$

$$g''(x) = \frac{1}{50} > 0$$

Alors $g'(x)$ est croisante $\forall x \in I$

$$|g'(x)| = \frac{x}{50} \leq \frac{1}{50} = q < 1 \qquad \forall x \in I$$

donc Il converge vers l'unique solution α

n	0	1	2
x_n	0	0,01	0,010001

Test d'arrêt : $\varepsilon = 10^{-6}$

$$|x_2 - x_1| = |0{,}010001 - 0{,}01| = 0{,}000001$$

la solution est $\alpha = 0{,}010001 = x_2$

Exo 2

Soit la fonction :

$$f(x) = 1 - 3e^{-x} \qquad x \in [1,2] \,, \quad \varepsilon = 10^{-3}$$

① **La Méthode de Newton :**

* Théorème de convergence

i) $f(a)\,f(b) < 0$

ii) $\forall x \in [a,b]$ $\left.\begin{array}{l} f'(x) \neq 0 \\ f''(x) \neq 0 \end{array}\right|$ gardant le même signe sur $]a,b[$

iii) x_0 est choisi tel que $f(x_0)\,f''(x_0) > 0$

alors la suite (x_n)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 0, 1, \dots$$

converge vers l'unique solution α de $f(x) = 0$

* Test d'arrêt : $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$

Donc

i) $f(1)\,f(2) = (1 - 3e^{-1})(1 - 3e^{-2}) < 0$

ii) $f'(x) = 3e^{-x} \neq 0$ sur $]1,2[$ gardant le même

$f''(x) = -3e^{-x} \neq 0$ sur $]1,2[$ signe sur $]a,b[$

iii) x_0 est choisi tel que : $f(x_0)\,f''(x_0) > 0$

$$f(1)\,f''(1) = (1 - 3e^{-1})\left(\frac{-3}{e}\right) = (-0{,}1036)(-1{,}1) > 0$$

donc $x_0 = 1$ $\Rightarrow$ la méthode de Newton converge.

Calcule de la racine α $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{cases}$ $k = 0, 1, \dots$

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{1 - 3e^{-x_k}}{3e^{-x_k}} = x_k - \dfrac{1}{3}e^{x_k} + 1 \end{cases}$$

Test d'arrêt : $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon = 10^{-3}$

n	1	2	3
x_k	1,093906057	1,098601232	1,0986012289

$|x_3 - x_2| = 0{,}00001 = 10^{-5} < 10^{-3}$ donc $\alpha \simeq x_3 = 1{,}0986012289$

② $f(x) = 1 - 3e^{-x}$

$1 - 3e^{-x} = 0 \Rightarrow x - x + 1 - 3e^{-x} = 0$

$\Rightarrow x = x - 1 + 3e^{-x}$

donc $g(x) = x \Rightarrow g(x) = x - 1 + 3e^{-x}$

$g'(x) = 1 - 3e^{-x}$

$g''(x) = 3e^{-x} > 0$ croissante sur $]1,2[$

Alors $g'(x) < g'(2) = 0,593 < 1 \quad \forall x \in]1,2[$

$x_{n+1} = g(x_n)$ avec $g(x) = x - 1 + 3e^{-x}$

③ Méthode de Point fixe : $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n - 1 + 3e^{-x_n} \end{cases}$

Test d'arrêt : $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon = 10^{-3}$

$g(x) = x = x - 1 + 3e^{-x}$

n	1	2	3
x_n	1,103638326	1,098624898	1,098612289

$|x_3 - x_2| = 10^{-5} < 10^{-3}$

donc : $\boxed{\alpha = x_3 = 1,098612289}$

④ la Méthode de Dichotomie : $f(x) = 1 - 3e^{-x} = 0$

1/ $f(1) = 1 - 3e^{-1} = 1 - \frac{3}{e} < 0$, $f(2) = 1 - 3e^{-2} = 1 - \frac{3}{e^2} > 0$

donc $f(1)\, f(2) < 0$

n	a_n	b_n	$c = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(c)$
0	1	2	1,5	+
1	1	1,5	1,25	+
2	1	1,25	1,125	+
3	1	1,125	1,0625	−
4	1,0625	1,125	1,09375	−
5	1,09375	1,125	⋮	+
6	1,09375	1,109375	⋮	
7	⋮	⋮	⋮	
8	⋮			
9	1,09765625	1,09960935		−
10	1,09765625	1,098144531	1,098144531	

③

$|(c_9 - c_8)| = 0,00103 > 10^{-3}$

$|c_{10} - c_9| = 0,00048 < 10^{-3}$

$\boxed{\alpha = c_{10} = 1,0981445311}$

Exo 3

① $\sqrt[P]{Q} = x \Rightarrow x^P = Q \Rightarrow x^P - Q = 0$

donc $f(x) = x^P - Q = 0$

$f'(x) = px^{P-1}$

Alors : $\boxed{x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \dfrac{x_k^P - Q}{p x_k^{P-1}}}$

Application : $P = 3 \qquad Q = 2$

$\sqrt[3]{2} = x \Rightarrow x^3 = 2 \Rightarrow x^3 - 2 = 0$

donc $\begin{cases} f(x) = x^3 - 2 \\ f'(x) = 3x^2 \end{cases}$

Avec : $\boxed{x_{n+1} = x_n - \dfrac{x^3 - 2}{3x^2}}$

1- Théorème de convergence

i) $f(1) = -1 < 0$

$f(2) = 6 > 0 \qquad f(1)\,f(2) < 0 \Rightarrow$

ii) $f'(x) = 3x^2 > 0$ sur $]1,2[$ $\qquad f'(x) \neq 0,\ f''(x) \neq 0$ gardant le même signe

$f''(x) = 6x > 0$ sur $]1,2[$ $\qquad$ sur $]1,2[$

iii) Choix de x_0 puisque f est une forme polynominale donc le choix de x_0 est arbitraire.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2} = \frac{3x_n^3 - x_n^3 - 2}{3x_n^2}$$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 - 2}{3x_n^2} = \frac{2}{3}\left(x_n - \frac{1}{x_n^2}\right)$$

$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{2}{3}\left(x_n - \frac{1}{x_n^2}\right) \end{cases}$ converge vers l'unique solution α avec $\varepsilon = 10^{-5}$

n	0	1	2	3	4	5
x_n	1	1,333377			1,25992105	1,25992105

$\alpha = 1,25992105 = \sqrt[3]{2}$ pour $\varepsilon = 10^{-5}$

$|x_{n+1} - x_n| < 10^{-5}$

Ex 04

(1) $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} = x \Rightarrow x^{-1} - a = 0$

$$\begin{cases} f(x) = x^{-1} - a \\ f'(x) = -x^{-2} \end{cases}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{-1} - a}{-x_n^{-2}}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n + x_n^2 \left(\frac{1}{x_n} - a\right)$$

$$x_{n+1} = x_n + (x_n - a x_n^2)$$

$$\boxed{x_{n+1} = 2x_n - a x_n^2}$$

Application : $a = 7 \Rightarrow x_{n+1} = 2x_n - 7x_n^2$

$$f(x_n) = x_n^{-1} - 7 = 0$$

*) $f(0,1) = 10 - 7 = 3 > 0$

$f(1) = 1 - 7 = -6 < 0$ $\quad f(1)\, f(0,1) < 0$

**) $f'(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2} \neq 0 \quad \forall x \;]0,1, 1[$

$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3} \neq 0 \quad \forall x \;]0,1\; 1[$

gardant le même signe sur $]0,1.\,1[$

***) x_0 est choisi telque : $f(x_0)\, f''(x_0) > 0$

$f(0,1)\, f''(0,1) = 3 \; \frac{2}{(0,1)^3} > 0 \qquad x_0 = 0,1$

Alors la suite x_n définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 0,1 \\ x_{n+1} = 2x_n - 7x_n^2 \qquad n = 0, 1 \ldots \end{cases}$$

Test d'arrêt : $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \qquad \varepsilon = 10^{-5}$

converge vers l'unique solution α :

n	0	1	2	3	4
x_n	0,1	0,13	0,1417	0,14284777	0,142857142

$|x_4 - x_3| < \varepsilon = 10^{-5} \Rightarrow \alpha = x_4 = 0,142857142$