Polycopié de cours

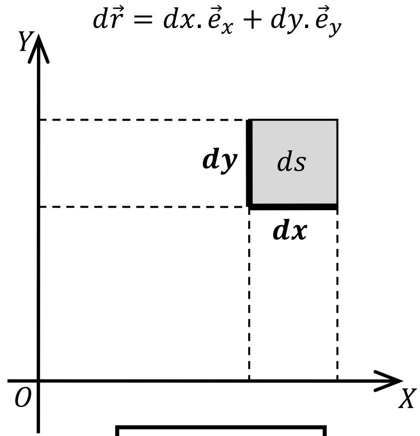
ÉLECTROMAGNÉTISME CLASSIQUE DU VIDE

Socle Commun Deuxième Année Licence Physique

Université Ziane Achour – Djelfa

COORDONNÉES CARTÉSIENNES PLAN

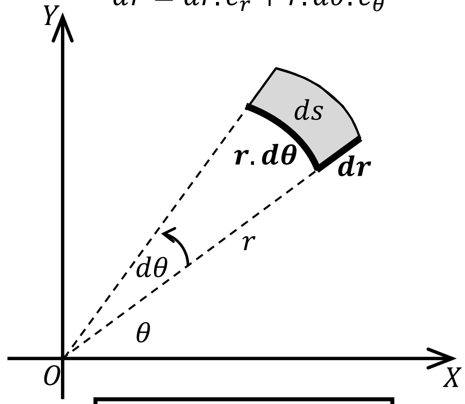
$$d\vec{r} = dx.\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y$$



$$\boxed{ds = dx.dy}$$

COORDONNÉES POLAIRES PLAN

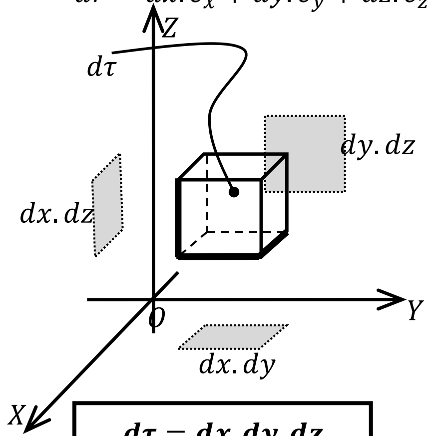
$$d\vec{r} = dr.\vec{e}_r + r.d\theta.\vec{e}_\theta$$



$$\boxed{ds = r.dr.d\theta}$$

COORDONNÉES CARTÉSIENNES ESPACE

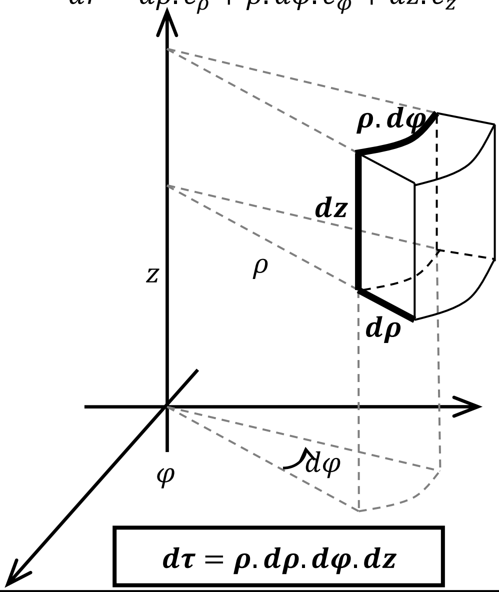
$$d\vec{r} = dx.\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y + dz.\vec{e}_z$$



$$\boxed{d\tau = dx.dy.dz}$$

COORDONNÉES CYLINDRIQUES

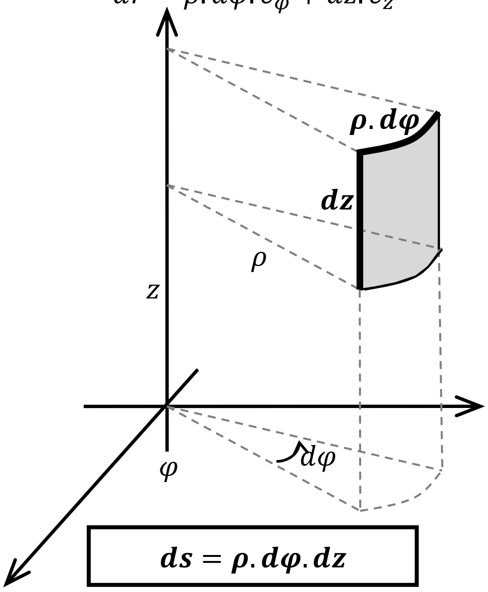
$$d\vec{r} = d\rho.\vec{e}_\rho + \rho.d\varphi.\vec{e}_\varphi + dz.\vec{e}_z$$



$$\boxed{d\tau = \rho.d\rho.d\varphi.dz}$$

COORDONNÉES CYLINDRIQUES

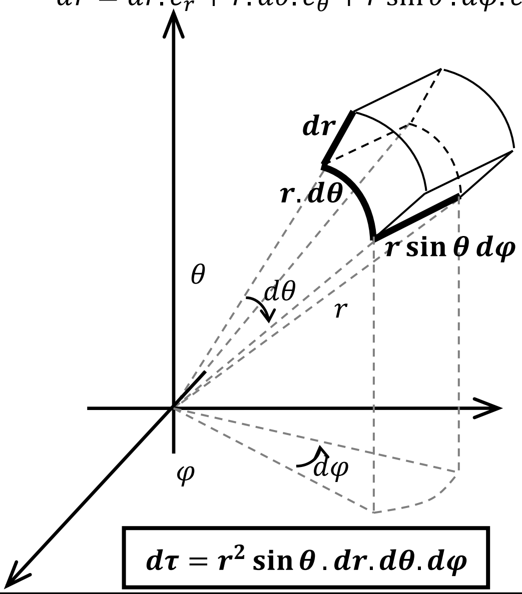
$$d\vec{r} = \rho.d\varphi.\vec{e}_\varphi + dz.\vec{e}_z$$



$$\boxed{ds = \rho.d\varphi.dz}$$

COORDONNÉES SPHÉRIQUES

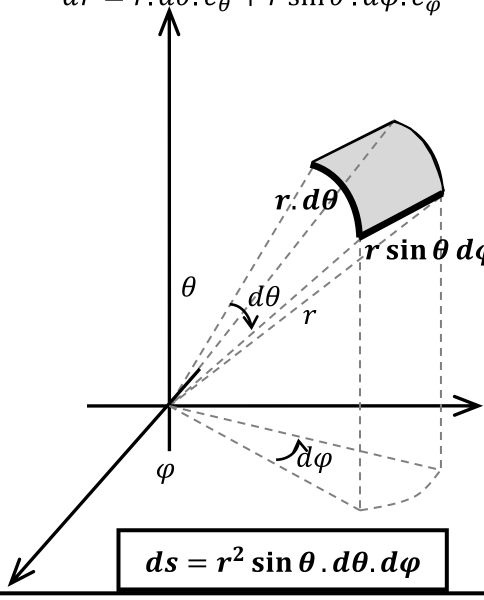
$$d\vec{r} = dr.\vec{e}_r + r.d\theta.\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,.d\varphi.\vec{e}_\varphi$$



$$\boxed{d\tau = r^2\sin\theta\,.dr.d\theta.d\varphi}$$

COORDONNÉES SPHÉRIQUES

$$d\vec{r} = r.d\theta.\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,.d\varphi.\vec{e}_\varphi$$



$$\boxed{ds = r^2\sin\theta\,.d\theta.d\varphi}$$

ANALYSE VECTORIELLE

COORDONNÉES	NOTATION	CARTÉSIENNES	CYLINDRIQUES	SPHÉRIQUES
OPÉRATEUR NABLA	$\vec{\nabla}$	$\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$	$\frac{\partial}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$	$\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$
GRADIENT	$\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla}.f$	$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$	$\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$
DIVERGENCE	$div(\vec{A}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}A_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{2}{r}A_r + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r.\tan\theta}A_\theta + \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$
ROTATIONNEL	$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$	$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$	$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho - \left(\frac{\partial A_z}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial z}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}A_\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z$	$\frac{1}{r.\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} + A_\varphi.\cos\theta - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}A_\varphi - \frac{\partial A_\varphi}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(r\frac{\partial A_\theta}{\partial r} + A_\theta - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi$
LAPLACIEN	$\Delta f = div(\overrightarrow{grad}\, f)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2.\tan\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2.\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

IDENTITÉS

$div(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}) = \vec{\nabla} \bullet (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$	$div(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \bullet \overrightarrow{rot}(\vec{A}) - \vec{A} \bullet \overrightarrow{rot}(\vec{B})$	$\overrightarrow{rot}(f.\vec{A}) = \overrightarrow{grad}\, f \times \vec{A} + f.\overrightarrow{rot}(\vec{A})$
$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\, f) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}.f) = \vec{0}$	$div(f.\vec{A}) = \overrightarrow{grad} f \bullet \vec{A} + f.div(\vec{A})$	$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{A})\right) - \Delta\vec{A}$

THÉORÈMES DE L'ANALYSE VECTORIELLE

Théorème de Stockes

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{B}) \bullet d\vec{s}$$

(S est une surface délimitée par la courbe fermée C)

Théorème d'Ostrogradski

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \iiint_\tau div(\vec{E}).d\tau$$

(τ est le volume délimité par la surface fermée S)

CHAPITRE I

RAPPELS MATHÉMATIQUES

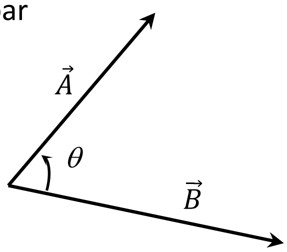
RAPPELS MATHÉMATIQUES

I. PRODUIT SCALAIRE ET PRODUIT VECTORIEL

I.1. PRODUIT SCALAIRE

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ et on note $\vec{A} \bullet \vec{B}$ le produit des modules de $\vec{A}$ et de $\vec{B}$ et du cosinus de l'angle aigu formé par les deux vecteurs.

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A.B.cos(\theta) \quad \text{avec} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$



Propriétés :

- Si $\vec{A} \bullet \vec{B} = 0$ alors $\vec{A} = \vec{0}$ ou $\vec{B} = \vec{0}$ ou $\vec{A} \perp \vec{B}$
- $\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = \delta_{ij}$ avec $i\,;\, j = x\,;\, y\,;\, z$

  δ_{ij} est le symbole de Kronecker-Dirac $(\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j)$.

- Il en résulte que

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_x.B_x + A_y.B_y + A_z.B_z \quad \text{et} \quad \vec{A} \bullet \vec{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

- $\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{B} \bullet \vec{A}$
- $\vec{A} \bullet (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \bullet \vec{B} + \vec{A} \bullet \vec{C}$
- $p.(\vec{A} \bullet \vec{B}) = (p.\vec{A}) \bullet \vec{B} = \vec{A} \bullet (p.\vec{B}) = (\vec{A} \bullet \vec{B}).p$

I.2. PRODUIT VECTORIEL

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un vecteur $\vec{C}$, noté $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, dont le module est donné par $C = A.B.sin(\theta)$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$, et de direction $\vec{u}$ perpendiculaire au plan sous tendu par $\vec{A}$ et $\vec{B}$ tel que $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ est un trièdre direct, donc :

$$\vec{C} = A.B.\sin\theta\,.\vec{u} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Propriétés :

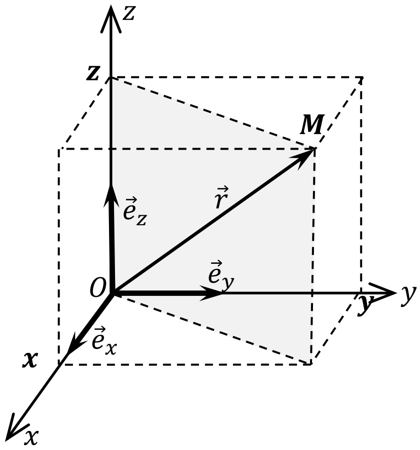
- Si $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$ alors $\vec{A} = \vec{0}$ ou $\vec{B} = \vec{0}$ ou $\vec{A} \parallel \vec{B}$ $\Rightarrow$ $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$ toujours.
- $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$; $\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$; $\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x$; $\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}$.

Donc
$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

- $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
- $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$
- $p.(\vec{A} \times \vec{B}) = (p.\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (p.\vec{B}) = (\vec{A} \times \vec{B}).p$
- $|\vec{A} \times \vec{B}|$ est égal à la surface du parallélogramme de coté $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

II. SYSTÈMES DE COORDONNÉES

II.1. COORDONNÉES CARTÉSIENNES

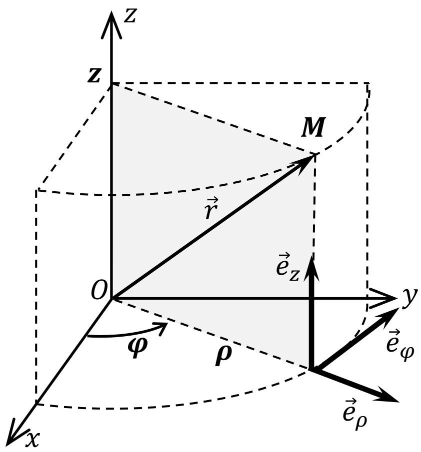


$$\begin{cases} \vec{r} = x(t).\vec{e}_x + y(t).\vec{e}_y + z(t).\vec{e}_z \\ \vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = x^{\bullet}(t).\vec{e}_x + y^{\bullet}(t).\vec{e}_y + z^{\bullet}(t).\vec{e}_z \\ \vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = x^{\bullet\bullet}(t).\vec{e}_x + y^{\bullet\bullet}(t).\vec{e}_y + z^{\bullet\bullet}(t).\vec{e}_z \end{cases}$$

Et

$$d\vec{r} = dx.\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y + dz.\vec{e}_z$$

II.2. COORDONNÉES CYLINDRIQUES



Relation entre les coordonnées cylindriques et les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = \rho.\cos\varphi \\ y = \rho.\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Vecteurs unitaires des coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi\,.\vec{e}_x + \sin\varphi\,.\vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,.\vec{e}_x + \cos\varphi\,.\vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

Dérivées partielles des vecteurs unitaires :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\rho} = \vec{0} & \dfrac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\varphi} = \vec{e}_\varphi & \dfrac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial z} = \vec{0} \\ \dfrac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\rho} = \vec{0} & \dfrac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -\vec{e}_\rho & \dfrac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial z} = \vec{0} \\ \dfrac{\partial\vec{e}_z}{\partial\rho} = \vec{0} & \dfrac{\partial\vec{e}_z}{\partial\varphi} = \vec{0} & \dfrac{\partial\vec{e}_z}{\partial z} = \vec{0} \end{cases}$$

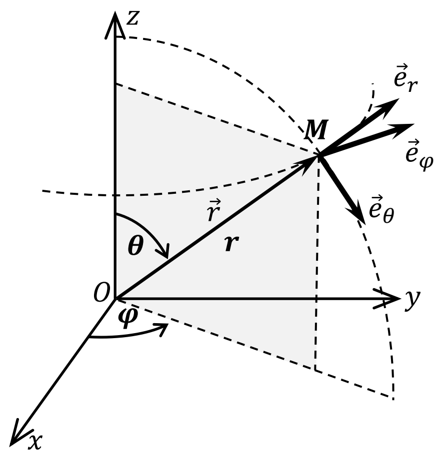
Donc

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \rho.\vec{e}_\rho + z.\vec{e}_z \\ \vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \rho^{\bullet}.\vec{e}_\rho + \rho.\varphi^{\bullet}.\vec{e}_\varphi + z^{\bullet}.\vec{e}_z \\ \vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \left(\rho^{\bullet\bullet} - \rho.\varphi^{\bullet 2}\right).\vec{e}_\rho + \left(2\rho^{\bullet}.\varphi^{\bullet} + \rho.\varphi^{\bullet\bullet}\right).\vec{e}_\varphi + z^{\bullet\bullet}.\vec{e}_z \end{cases}$$

Et

$$d\vec{r} = d\rho.\vec{e}_\rho + \rho.d\varphi.\vec{e}_\varphi + dz.\vec{e}_z$$

II.3. COORDONNÉES SPHÉRIQUES



Relation entre les coordonnées sphériques et les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = r.\sin\theta\,.\cos\varphi \\ y = r.\sin\theta\,.\sin\varphi \\ z = r.\cos\theta \end{cases}$$

Vecteurs unitaires des coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin\theta\,.\cos\varphi\,.\vec{e}_x + \sin\theta\,.\sin\varphi\,.\vec{e}_y + \cos\theta\,.\vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta\,.\cos\varphi\,.\vec{e}_x + \cos\theta\,.\sin\varphi\,.\vec{e}_y - \sin\theta\,.\vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,.\vec{e}_x + \cos\varphi\,.\vec{e}_y \end{cases}$$

Dérivées partielles des vecteurs unitaires :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\vec{e}_r}{\partial r} = \vec{0} & \dfrac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta} = \vec{e}_\theta & \dfrac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi} = \sin\theta\,.\vec{e}_\varphi \\ \dfrac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial r} = \vec{0} & \dfrac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta} = -\vec{e}_r & \dfrac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\varphi} = \cos\theta\,.\vec{e}_\varphi \\ \dfrac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial r} = \vec{0} & \dfrac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\theta} = \vec{0} & \dfrac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -(\sin\theta\,.\vec{e}_r + \cos\theta\,.\vec{e}_\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = r.\vec{e}_r \\ \vec{v}(t) = r^{\bullet}.\vec{e}_r + r.\theta^{\bullet}.\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,.\varphi^{\bullet}.\vec{e}_\varphi \\ \vec{a}(t) = \left(r^{\bullet\bullet} - r.\theta^{\bullet 2} - r\sin^2\theta\,.\varphi^{\bullet 2}\right).\vec{e}_r + \left(2r^{\bullet}.\theta^{\bullet} + r.\theta^{\bullet\bullet} - r\sin\theta\,.\cos\theta\,.\varphi^{\bullet 2}\right).\vec{e}_\theta + \\ (2\sin\theta\,.r^{\bullet}\varphi^{\bullet} + 2r.\cos\theta\,.\theta^{\bullet}\varphi^{\bullet} + r\sin\theta\,.\varphi^{\bullet\bullet}).\vec{e}_\varphi \end{cases}$$

Et

$$d\vec{r} = dr.\vec{e}_r + r.d\theta.\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,.d\varphi.\vec{e}_\varphi$$

III. GRADIENT ET OPÉRATEUR NABLA

Coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{grad}(f)=\vec{\nabla}.f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

D'autre part la différentielle totale d'une fonction à plusieurs variables est donnée par

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

D'où la relation entre la différentielle totale et le gradient

$$df=\overrightarrow{grad}(f)\bullet d\vec{r}=\vec{\nabla}(f)\bullet d\vec{r}$$

C'est cette relation que nous allons utiliser pour trouver le gradient et l'opérateur Nabla dans les autres systèmes de coordonnées.

Coordonnées cylindriques :

La différentielle totale en coordonnées cylindriques est donnée par

$$df=\frac{\partial f}{\partial \rho}d\rho+\frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

En utilisant le fait que

$$df=\overrightarrow{grad}(f)\bullet d\vec{r}=\vec{\nabla}(f)\bullet d\vec{r}$$

Alors, le gradient et l'opérateur nabla en coordonnées cylindriques sont :

$$\overrightarrow{grad}(f)=\vec{\nabla}.f(\rho,\varphi,z)=\frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

et

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial \rho}\vec{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$$

Coordonnées sphériques :

La différentielle totale en coordonnées sphériques est donnée par

$$df=\frac{\partial f}{\partial r}dr+\frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta+\frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi$$

En utilisant le fait que

$$df=\overrightarrow{grad}(f)\bullet d\vec{r}=\vec{\nabla}(f)\bullet d\vec{r}$$

Alors, le gradient et l'opérateur nabla en coordonnées cylindriques sont :

$$\overrightarrow{grad}(f)=\vec{\nabla}.f(r,\theta,\varphi)=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta+\frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

Et

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta+\frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

IV. DIVERGENCE

Coordonnées cartésiennes :

$$div(\vec{A}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{A}(x,y,z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Coordonnées cylindriques :

On utilise les expressions de Nabla et du vecteur $\vec{A}$ en coordonnées cylindriques.

$$div(\vec{A}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right) \bullet \left(A_\rho.\vec{e}_\rho + A_\varphi.\vec{e}_\varphi + A_z.\vec{e}_z\right)$$

$$div(\vec{A}) = \vec{e}_\rho \bullet \frac{\partial\left(A_\rho.\vec{e}_\rho + A_\varphi.\vec{e}_\varphi + A_z.\vec{e}_z\right)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\vec{e}_\varphi \bullet \frac{\partial\left(A_\rho.\vec{e}_\rho + A_\varphi.\vec{e}_\varphi + A_z.\vec{e}_z\right)}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \bullet \frac{\partial\left(A_\rho.\vec{e}_\rho + A_\varphi.\vec{e}_\varphi + A_z.\vec{e}_z\right)}{\partial z}$$

En dérivant les composantes de $\vec{A}$ et les vecteurs unitaires

$$div(\vec{A}) = \vec{e}_\rho \bullet \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\vec{e}_z\right) + \frac{1}{\rho}\vec{e}_\varphi \bullet \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\vec{e}_\rho + A_\rho.\vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi - A_\varphi.\vec{e}_\rho + \frac{\partial A_z}{\partial \varphi}\vec{e}_z\right) + \vec{e}_z \bullet \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}\vec{e}_\rho + \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_z}{\partial z}\vec{e}_z\right)$$

En faisant le produit scalaire

$$div(\vec{A}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{A} = \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}A_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Coordonnées sphériques :

On utilise les expressions de Nabla et du vecteur $\vec{A}$ en coordonnées sphériques.

$$div(\vec{A}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi\right) \bullet \left(A_r.\vec{e}_r + A_\theta.\vec{e}_\theta + A_\varphi.\vec{e}_\varphi\right)$$

$$div(\vec{A}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{A} = \vec{e}_r \bullet \frac{\partial}{\partial r}\left(A_r.\vec{e}_r + A_\theta.\vec{e}_\theta + A_\varphi.\vec{e}_\varphi\right) + \frac{1}{r}\vec{e}_\theta \bullet \frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_r.\vec{e}_r + A_\theta.\vec{e}_\theta + A_\varphi.\vec{e}_\varphi\right) + \frac{1}{r.\sin\theta}\vec{e}_\varphi \bullet \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(A_r.\vec{e}_r + A_\theta.\vec{e}_\theta + A_\varphi.\vec{e}_\varphi\right)$$

En dérivant les composantes de $\vec{A}$ et les vecteurs unitaires

$$div(\vec{A}) = \vec{e}_r \bullet \left(\frac{\partial A_r}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{\partial A_\theta}{\partial r}\vec{e}_\theta + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r}\vec{e}_\varphi\right) + \frac{1}{r}\vec{e}_\theta \bullet \left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\vec{e}_r + A_r.\vec{e}_\theta + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}\vec{e}_\theta - A_\theta.\vec{e}_r + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta}\vec{e}_\varphi\right) + \frac{1}{r.\sin\theta}\vec{e}_\varphi \bullet \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\vec{e}_r + A_r.\sin\theta\,.\vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\vec{e}_\theta + A_\theta.\cos\theta\,.\vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi - A_\varphi.(\sin\theta\,.\vec{e}_r + \cos\theta\,.\vec{e}_\theta)\right)$$

En faisant le produit scalaire

$$div(\vec{A}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{2}{r}A_r + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r.\tan\theta}A_\theta + \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

V. ROTATIONNEL

Coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(x,y,z) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

Coordonnées cylindriques :

On utilise les expressions de Nabla et du vecteur $\vec{A}$ en coordonnées cylindriques.

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right) \times \left(A_\rho.\vec{e}_\rho + A_\varphi.\vec{e}_\varphi + A_z.\vec{e}_z\right)$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{e}_\rho \times \frac{\partial\left(A_\rho.\vec{e}_\rho + A_\varphi.\vec{e}_\varphi + A_z.\vec{e}_z\right)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\vec{e}_\varphi \times \frac{\partial\left(A_\rho.\vec{e}_\rho + A_\varphi.\vec{e}_\varphi + A_z.\vec{e}_z\right)}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \times \frac{\partial\left(A_\rho.\vec{e}_\rho + A_\varphi.\vec{e}_\varphi + A_z.\vec{e}_z\right)}{\partial z}$$

En dérivant les composantes de $\vec{A}$ et les vecteurs unitaires

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{e}_\rho \times \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\vec{e}_z\right) + \frac{1}{\rho}\vec{e}_\varphi \times \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\vec{e}_\rho + A_\rho.\vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi - A_\varphi.\vec{e}_\rho + \frac{\partial A_z}{\partial \varphi}\vec{e}_z\right)$$
$$+ \vec{e}_z \times \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}\vec{e}_\rho + \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_z}{\partial z}\vec{e}_z\right)$$

En faisant le produit vectoriel

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho}\vec{e}_z - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\vec{e}_\varphi\right) + \frac{1}{\rho}\left(-\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\vec{e}_z + A_\varphi.\vec{e}_z + \frac{\partial A_z}{\partial \varphi}\vec{e}_\rho\right) + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}\vec{e}_\varphi - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\vec{e}_\rho\right)$$

Finalement

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho - \left(\frac{\partial A_z}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial z}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}A_\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z$$

Coordonnées sphériques :

On utilise les expressions de Nabla et du vecteur $\vec{A}$ en coordonnées sphériques.

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi\right) \times \left(A_r.\vec{e}_r + A_\theta.\vec{e}_\theta + A_\varphi.\vec{e}_\varphi\right)$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{e}_r \times \frac{\partial}{\partial r}\left(A_r.\vec{e}_r + A_\theta.\vec{e}_\theta + A_\varphi.\vec{e}_\varphi\right) + \frac{1}{r}\vec{e}_\theta \times \frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_r.\vec{e}_r + A_\theta.\vec{e}_\theta + A_\varphi.\vec{e}_\varphi\right)$$
$$+ \frac{1}{r.\sin\theta}\vec{e}_\varphi \times \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(A_r.\vec{e}_r + A_\theta.\vec{e}_\theta + A_\varphi.\vec{e}_\varphi\right)$$

En dérivant les composantes de $\vec{A}$ et les vecteurs unitaires

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{e}_r \times \left(\frac{\partial A_r}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{\partial A_\theta}{\partial r}\vec{e}_\theta + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r}\vec{e}_\varphi\right) + \frac{1}{r}\vec{e}_\theta \times \left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\vec{e}_r + A_r.\vec{e}_\theta + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}\vec{e}_\theta - A_\theta.\vec{e}_r + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta}\vec{e}_\varphi\right) + \frac{1}{r.\sin\theta}\vec{e}_\varphi$$
$$\times \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\vec{e}_r + A_r.\sin\theta\,.\vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\vec{e}_\theta + A_\theta.\cos\theta\,.\vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi - A_\varphi.(\sin\theta\,.\vec{e}_r + \cos\theta\,.\vec{e}_\theta)\right)$$

En faisant le produit vectoriel

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r}\vec{e}_\varphi - \frac{\partial A_\varphi}{\partial r}\vec{e}_\theta\right) + \frac{1}{r}\left(-\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\vec{e}_\varphi + A_\theta.\vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta}\vec{e}_r\right)$$
$$+ \frac{1}{r.\sin\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\vec{e}_\theta - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\vec{e}_r - A_\varphi.(\sin\theta\,.\vec{e}_\theta - \cos\theta\,.\vec{e}_r)\right)$$

Finalement

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \frac{1}{r.\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} + A_\varphi.\cos\theta - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}A_\varphi - \frac{\partial A_\varphi}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(r\frac{\partial A_\theta}{\partial r} + A_\theta - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi$$

Ou

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \frac{1}{r.\sin\theta}\left(\frac{\partial(A_\varphi.\sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r.A_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r.A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi$$

VI. LAPLACIEN

L'opérateur Laplacien est défini par :

$$\text{Laplacien}(f) = div\left(\overrightarrow{grad}\,f\right) \quad \text{ou} \quad \Delta f = \vec{\nabla} \bullet \left(\vec{\nabla}.f\right)$$

Coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla}.f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$div\left(\vec{A}\right) = \vec{\nabla} \bullet \vec{A}(x,y,z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Avec

$$A_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad ; \quad A_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad ; \quad A_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

D'où

$$div\left(\overrightarrow{grad}\,f\right) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordonnées cylindriques :

On utilise les expressions de Nabla et de $\overrightarrow{grad}(f)$ en coordonnées cylindriques.

$$\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla}.f(\rho,\varphi,z) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$div(\vec{A}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{A}(x,y,z) = \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}A_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Avec

$$A_\rho = \frac{\partial f}{\partial \rho} \quad ; \quad A_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \quad ; \quad A_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

D'où

$$div(\overrightarrow{grad}\, f) = \Delta f = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Finalement

$$div(\overrightarrow{grad}\, f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordonnées sphériques :

On utilise les expressions de Nabla et de $\overrightarrow{grad}(f)$ en coordonnées sphériques.

$$\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla}.f(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$div(\vec{A}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{A}(x,y,z) = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{2}{r}A_r + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r.\tan\theta}A_\theta + \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

Avec

$$A_r = \frac{\partial f}{\partial r} \quad ; \quad A_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \quad ; \quad A_\varphi = \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

D'où

$$div(\overrightarrow{grad}\, f) = \Delta f = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r.\tan\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)$$

Finalement

$$div(\overrightarrow{grad}\, f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2.\tan\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2.\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

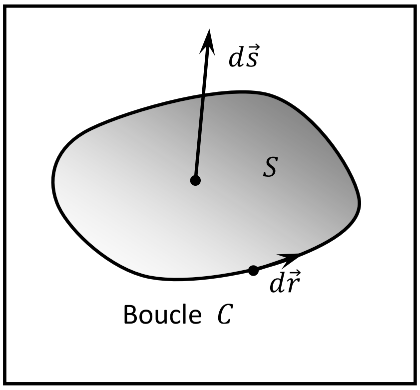
VII. THÉORÈMES DE L'ANALYSE VECTORIELLE

THÉORÈME DE STOCKES

La circulation d'un champ vectoriel sur une boucle fermée est égale au flux du rotationnel de ce champ vectoriel à travers une surface quelconque délimitée par cette boucle.

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{B}) \bullet d\vec{s}$$

- S est une surface délimitée par la courbe fermée C.
- $d\vec{s}$ est obtenue en appliquant la règle de la main droite en suivant le sens de $d\vec{r}$.

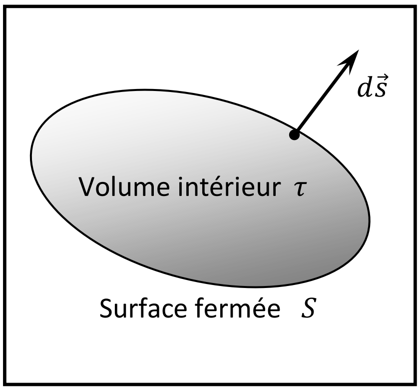


THÉORÈME D'OSTROGRADSKI

Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence de ce champ vectoriel sur tout le volume intérieur à la surface.

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \iiint_\tau div(\vec{E}).d\tau$$

- τ est le volume délimité par la surface fermée S.



<u>TRAVAIL À FAIRE</u>

Démontrez les identités suivantes (en utilisant les coordonnées cartésiennes).

$$div(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}) = \vec{\nabla} \bullet (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\,f) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}.f) = \vec{0}$$

$$div(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \bullet \overrightarrow{rot}(\vec{A}) - \vec{A} \bullet \overrightarrow{rot}(\vec{B})$$

$$div(f.\vec{A}) = \overrightarrow{grad}f \bullet \vec{A} + f.div(\vec{A})$$

$$\overrightarrow{rot}(f.\vec{A}) = \overrightarrow{grad}\,f \times \vec{A} + f.\overrightarrow{rot}(\vec{A})$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{A})\right) - \Delta\vec{A}$$