Polycopié de cours

ÉLECTROMAGNÉTISME CLASSIQUE DU VIDE

Socle Commun Deuxième Année Licence Physique

Université Ziane Achour – Djelfa

CHAPITRE II

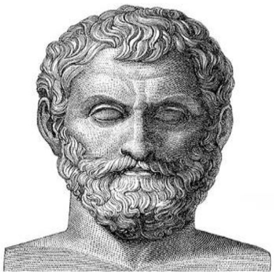
ÉLECTROSTATIQUE

I. GÉNÉRALITÉS 2
II. INTÉRACTION ÉLECTROSTATIQUE – LOI DE COULOMB 3
III. CHAMP ET POTENTIEL ÉLECROSTATIQUES 4
IV. PROPRIÉTÉS DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE 8
V. DIPÔLE ÉLECTROSTATIQUE 15

ÉLECTROSTATIQUE

I. GÉNÉRALITÉS

On adopte l'approche historique dans l'ordre chronologique qui est une approche expérimentale, sauf pour expliquer les phénomènes à l'échelle atomique, où il nous faut faire un bond en avant dans l'histoire pour connaître la structure de l'atome.



Origine de l'appellation

Vers 600 ans avant J.-C., Thales de Milet avait noté qu'un morceau d'ambre jaune frotté avec de la laine avait la propriété d'attirer de petits fétus de paille. Par la suite, on dira de tout corps ayant acquis cette propriété qu'il est « électrisé » du nom grec de l'ambre jaune « *êlektron* ».

Phénomène d'électrisation

Historiquement (à partir du XVIème siècle) on électrisait les corps par frottement, par contact ou par influence. On peut aussi les électriser par action chimique (piles) ou par radiation. On dit alors que ces corps portent une « charge électrique ».
Dans la figure ci-contre la fillette est électrisée par contact avec un générateur Van de Graff utilisant le frottement.

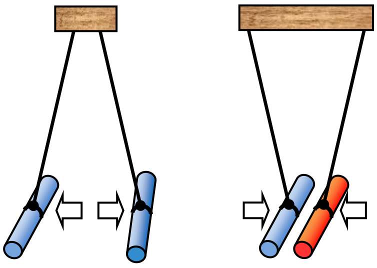
Les deux types de matériaux

- ***Les isolants ou diélectriques :*** Pour ce type matériaux l'électrisation reste localisée à l'endroit où on l'a créée.
- ***Les conducteurs :*** Pour ce type matériaux l'électrisation se répand dans tout le corps. Le corps humain est conducteur (figure ci-contre).

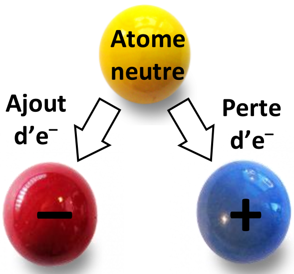
Les deux types de charges électriques

- ***Positive*** ou « vitreuse » : elle est obtenue en frottant, par exemple, du verre avec un tissu en laine.
- ***Négative*** ou « résineuse » : elle est obtenue en frottant, par exemple, de l'ambre jaune avec un tissu en laine.
- Un corps non électrisé est dit ***neutre***.

Deux corps portant le même type de charges se repoussent.
Deux corps portant des types opposés de charges s'attirent.



verre–verre verre–résine



Transfert d'électrons

Chaque atome est constitué d'un noyau dense fait de neutrons (électriquement neutres) et de protons (de charge positive), autour du noyau se trouve un « nuage » d'électrons légers (de charge négative) constituant le volume de l'atome.
En ajoutant un électron à l'atome, on le charge négativement (anion).
En ôtant un électron à l'atome, on le charge positivement (cation).

L'électrisation des corps se fait (en général) par transfert d'électrons.

Affinité électronique :
Au niveau atomique, certains atomes ont plus tendance à accepter un électron, tandis que d'autres ont tendance à s'en séparer. Comme exemple, le chlore (Cl) possède une affinité électronique élevée comparée à celle du sodium (Na). En formant le chlorure de sodium (Na^+Cl^-) le chlore prend l'électron cédé par le sodium, il en résulte deux ions : le (Na^+) chargé positivement et le (Cl^-) chargé négativement.
Cette préférence à prendre des électrons existe aussi au niveau macroscopique, et les matériaux sont classés en séries triboélectriques allant du moins attractif au plus attractif électroniquement. Par exemple : poil de lapin – verre – mica – laine – poil de chat – soie – bois – ambre – résine – soufre – ébonite – celluloïd. Ainsi, en frottant un morceau de verre avec de la laine, les électrons sont transférés du verre vers la laine (le verre est chargé positivement), et en frottant de l'ambre jaune avec de la laine, les électrons sont transférés de la laine vers l'ambre jaune (l'ambre est chargé négativement).

Principe de la conservation de la charge électrique :
« La charge électrique totale contenue dans un système isolé, autrement dit, la somme algébrique des charges positive et négative présentent à chaque instant dans le système reste constante ».

Charge ponctuelle : (en réalité elle n'existe pas)
« On considérera qu'une charge est ponctuelle si les dimensions du corps qui la porte sont petites par rapport aux distances considérées dans le problème étudié ».

II. INTÉRACTION ÉLECTROSTATIQUE – LOI DE COULOMB

II.1. LOI DE COULOMB

(Voir expérience de Coulomb 1785).

La force électrique exercée par la charge q_1 sur la charge q_2 placées toutes les deux dans le vide est donnée par la loi :

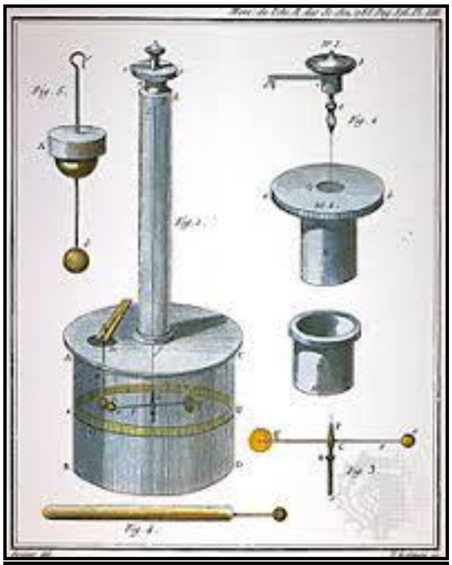
$$\vec{F}_{1/2} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_{12}$$

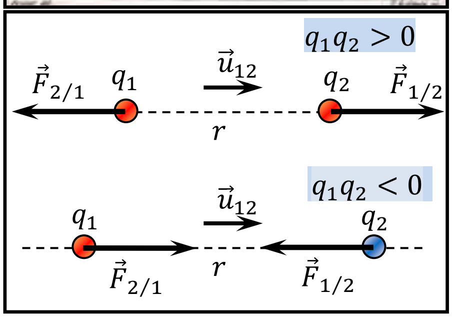
Avec

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 [\mathrm{MKSA}]$$

r étant la distance entre les deux charges.
K est une constante.
ε_0 est appelée la permittivité du vide.
$\vec{u}_{12}$ est un vecteur unitaire dirigé suivant r et orienté de q_1 vers q_2.

Ainsi deux charges de la même nature $(q_1 q_2 > 0)$ *se repoussent* ($\vec{F}_{1/2}$ *dans le sens de* $\vec{u}_{12}$) *et deux charges de natures opposées* $(q_1 q_2 < 0)$ *s'attirent* ($\vec{F}_{1/2}$ *opposé à* $\vec{u}_{12}$).





Remarque sur la constante K : La constante K est déterminée suivant le système d'unités que nous choisissons. Dans le système $\mathrm{c.g.s.}$ la valeur de K est égale à l'unité, ce qui peut paraître plus simple, mais plus loin dans l'étude de l'électromagnétisme elle s'avère être plutôt encombrante.
Dans le système $[\mathrm{MKSA}]$ cette valeur est de 9×10^9 nous pourrons vérifier par la suite (champ électromagnétique) qu'elle donne des résultats numériques plus faciles à manier.

Remarque sur l'ordre de grandeur des charges : Dans le système $[\mathrm{MKSA}]$ le Coulomb est une très grande charge (deux charges opposées de 01 Coulomb chacune et distante de $1\,m$ l'une de l'autre, s'attirent avec une force de $9 \times 10^9\,N$ ce qui est l'équivalent du poids d'un immeuble de $900\,000$ tonnes) ce qui nous mène à introduire des sous multiples du Coulomb, micro Coulomb (μC), nano Coulomb (nC) ou pico Coulomb (pC).

Remarque sur l'ordre de grandeurs des forces électrostatiques et gravitationnelles.

Au niveau microscopique :
Exemple de l'atome d'Hydrogène : un électron et un proton séparés par une distance a_0.
$e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,C$; $m_{e^-} = 9{,}1 \times 10^{-31}\,kg$; $m_p = 1{,}672 \times 10^{-27}\,kg$; $g = 9{,}81\,ms^{-2}$
$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,N.m^2.kg^{-2}$; $a_0 = 0{,}53 \times 10^{-10}\,m$; $K = 9 \times 10^{-9}\,N.m^2.C^{-2}$
Force coulombienne $F_C \approx 10^{-7}\,N$ Force gravitationnelle $F_G \approx 4 \times 10^{-47}\,N$
Poids de l'électron $P_e \approx 9 \times 10^{-30}\,N$ Poids du proton $P_p \approx 1{,}6 \times 10^{-26}\,N$
Au niveau macroscopique : les forces gravitationnelles sont plus grandes en générale que les forces électrostatiques (charges faibles, et distances grandes).

Remarque sur la validité de la loi de Coulomb :
Cette loi n'est valable que pour des charges fixes ou en mouvement lent, elle est correcte au milliardième sur des distances allant jusqu'au centimètre ou quelques mètres.

II.2. ÉNERGIE POTENTIELLE ÉLECTROSTATIQUE

L'énergie potentielle électrostatique de l'ensemble constitué de deux charges q_1 et q_2 séparées d'une distance r est égale à :

$$U = K\frac{q_1 q_2}{r}$$

Remarque :
U est l'énergie potentielle de l'ensemble des deux charges (q_1, q_2). Si une des charges est fixée (par exemple q_1), l'énergie potentielle peut être assimilée à l'énergie potentielle de la charge non fixe (q_2), car elle seule peut transformer cette énergie potentielle en énergie cinétique (mouvement).

III. CHAMP ET POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUES

III.1. CHAMP ET POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUES CRÉÉS PAR UNE CHARGE PONCTUELLE

Prenons la relation précédente

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_{12}$$

Nous pouvons écrire la force électrostatique sous la forme

$$\vec{F}_{1/2} = q_2.\vec{E}_1(\vec{r})$$

On dit que $\vec{F}_{1/2}$ est la force appliquée à une charge q_2 placée en $\vec{r}$, et $\vec{E}_1(\vec{r})$ est le champ créé par la charge q_1 au point $\vec{r} = r.\vec{u}_{12}$.

Donc ***le champ créé par une charge*** $\boldsymbol{q_1}$ en un point $\vec{r} = r.\vec{u}_{12}$ est donné par :

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\vec{u}_{12}$$

- Le champ créé par une charge positive est donc sortant (dans le sens de $\vec{u}_{12}$)
- Le champ créé par une charge négative est entrant (sens opposé à $\vec{u}_{12}$)

On définit ***le Potentiel créé par la charge*** $\boldsymbol{q_1}$ au point $\vec{r} = r.\vec{u}_{12}$ par :

$$V_1(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}$$

L'énergie potentielle électrique d'une charge q_2 placée en $\vec{r}$ est donnée par

$$U(r) = K\frac{q_1 q_2}{r}$$

Donc

$$U = q_2.V_1(r)$$

Notations :

Pour une charge q, Le champ et le potentiel créés en un point $\vec{r} = r.\vec{u}_r$ sont donnés par :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r} \qquad V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

- Les ***Lignes de champs*** sont les lignes en tout point parallèles au champ électrique.
- Les ***Surfaces équipotentielles*** sont des surfaces où en tout point le potentiel est le même.
- Les lignes de champs sont, en tout point, perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.
- L'ensemble des lignes de champs et des surfaces équipotentielles constitue le ***Spectre du champ électrique***.

Pour une charge ponctuelle, les lignes de champs sont des droites passant par la charge et les surfaces équipotentielles sont des sphères centrées sur la charge.

III.2. RELATION ENTRE LE CHAMP ET LE POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUES

D'après les équations précédentes on peut démontrer que :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\overrightarrow{grad}(V(r)) \qquad \vec{F}(\vec{r}) = -\overrightarrow{grad}(U(r))$$

Nous définissons la différentielle totale d'une fonction $V(r)$ à trois variables par

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Comme

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z\right) \quad \text{et} \quad d\vec{r} = dx.\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y + dz.\vec{e}_z$$

Il en résulte que

$$dV = -\vec{E} \bullet d\vec{r}$$

Remarques :

1. Pour une surface équipotentielle $V = \text{Constante} \Rightarrow dV = -\vec{E} \bullet d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{r}$. Donc *le champ est bien perpendiculaire à toute surface équipotentielle*.
2. Calculons la différence de potentiel entre deux points très proches (qui n'appartiennent pas à la même surface équipotentielle).
   $V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{r} = -\vec{E} \bullet \overrightarrow{AB}$ ($\vec{E}$ étant considéré constant entre les points A et B)
   D'où si $\vec{E}$ est dirigé dans le même sens que $\overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{E} \bullet \overrightarrow{AB} > 0$ et $V(A) > V(B)$.
   Donc *le champ est toujours dirigé du potentiel le plus élevé (Haut) vers le potentiel le moins élevé (Bas)*.

III.3. <u>CHAMP ET POTENTIEL CRÉÉS PAR UNE DISTRIBUTION DE CHARGES</u>

<u>CHAMP ET POTENTIEL CRÉÉS PAR UNE DISTRIBUTION DISCRÈTE DE CHARGES :</u>

Le champ et le potentiel électrostatiques créés par un ensemble de charges ponctuelles q_i $(i = 1,2,\ldots,N)$ au point M est donné par :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^3}\vec{r}_i \qquad V(r) = \sum_{i=1}^{N} V_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i}$$

Tel que r_i est la distance entre la charge q_i et le point M situé dans une direction $\vec{u}_i$ de la charge $(\vec{r}_i = r_i.\vec{u}_i)$. $\vec{u}_i$ est toujours dirigé de q_i vers le point M.

<u>Energie électrique interne d'un ensemble de charges ponctuelles.</u>

U_{syst} est la somme de toutes les énergies potentielles entre charges prises deux à deux (sans répéter la même énergie potentielle deux fois), donc :

$$U_{\text{syst}} = \sum_i \sum_j U_{ij} = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} \qquad (i \neq j)$$

On peut écrire l'énergie potentielle en fonction du potentiel

$$V(i) = \sum_j \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{ij}} \qquad (i \neq j)$$

$V(i)$ est le potentiel créé au point où se trouve la charge q_i par le reste des charges. Donc :

$$U_{\text{syst}} = \frac{1}{2}\sum_i q_i.V(i)$$

CHAMP ET POTENTIEL CRÉÉS PAR UNE DISTRIBUTION CONTINUE DE CHARGES :

Dans le cas d'une distribution continue, on subdivise le corps chargé en charges infinitésimales dq considérées comme étant des charges ponctuelles. Le champ $d\vec{E}$ et le potentiel dV créés par une charge dq en un point M à une distance r de la charge dans une direction $\vec{u}_r$ sont donnés par :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^3}\vec{r} \qquad \text{et} \qquad dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

Le champ total créé par le corps chargé est la somme vectorielle (intégrale) des champs infinitésimaux $d\vec{E}$.

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^3}\vec{r}$$

Et le potentiel total créé par le corps chargé est la somme scalaire (intégrale) des potentiels infinitésimaux dV.

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}$$

Cas d'une distribution linéique :

λ est la densité linéique de charges $(C.m^{-1})$:

$\lambda = \frac{dq}{dl}$	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\int \frac{dl}{r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}\lambda\int \frac{dl}{r^3}\vec{r}$	$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\int \frac{1}{r}dl$

- Dans le cas d'une distribution uniforme $\lambda = Q/L = \text{Constante}.$
- Dans le cas d'une distribution non uniforme $\lambda \neq \text{Constante}.$

Cas d'une distribution surfacique :

σ est la densité surfacique de charge $(C.m^{-2})$:

$\sigma = \frac{dq}{ds}$	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma\iint \frac{ds}{r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}\sigma\iint \frac{ds}{r^3}\vec{r}$	$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma\iint \frac{1}{r}ds$

- Dans le cas d'une distribution uniforme $\sigma = Q/S = \text{Constante}.$
- Dans le cas d'une distribution non uniforme $\sigma \neq \text{Constante}.$

Cas d'une distribution volumique :

ρ est la densité volumique de charge $(C.m^{-3})$:

$\rho = \frac{dq}{d\tau}$	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho\iiint \frac{d\tau}{r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}\rho\iiint \frac{d\tau}{r^3}\vec{r}$	$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho\iiint \frac{1}{r}d\tau$

- Dans le cas d'une distribution uniforme $\rho = Q/\tau = \text{Constante}.$
- Dans le cas d'une distribution non uniforme $\rho \neq \text{Constante}.$

IV. PROPRIÉTÉS DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

IV.1. CIRCULATION DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

On appelle ***circulation du champ vectoriel*** $\vec{E}$ sur la courbe C l'intégrale de chemin.

$$\int_{\text{courbe } C} \vec{E} \bullet d\vec{r} = \int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{r}$$

La circulation du champ électrostatique est indépendante du chemin suivi.

$$\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{r} = -\int_A^B dV = -V_B + V_A$$

En particulier, ***la circulation du champ électrostatique sur une courbe fermée est nulle***.

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{r} = -\oint dV = V(A) - V(A) = 0$$

En utilisant le théorème de Stockes nous avons :

$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{r} = \oiint_S \overrightarrow{rot}(\vec{E}) \bullet d\vec{s} = 0$$

L'intégrale étant nulle quelque soit la surface S délimitée par la courbe C. Donc :

$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$$

Remarque

Nous aurions pu utiliser

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}(V)\right) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$$

Remarque

Le travail d'une force entre deux points est aussi défini par la circulation de la force.

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

D'où le travail de la force électrique subi par une charge q' qui se déplace dans un champ électrostatique $\vec{E}$ suivant une courbe C est égal à :

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r} = q' \int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{r} = -q' \int_A^B dV$$

Donc

$$W_A^B = -q'.V(B) + q'.V(A) = -U(B) + U(A)$$

D'où, le travail de cette force ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des positions initiale et finale de la charge q'.

IV.2. FLUX DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

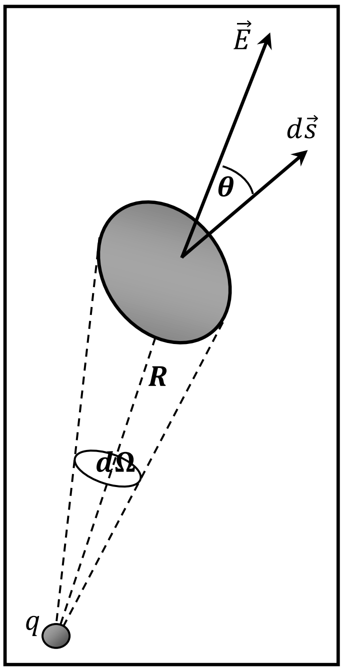
On définit le flux du champ électrique $\vec{E}$ à travers une surface élémentaire $d\vec{s}$ par la grandeur scalaire :

$$d\Phi = \vec{E} \bullet d\vec{s}$$

Le flux Φ à travers une surface S est donné par l'intégrale :

$$\Phi = \int d\Phi = \iint_S \vec{E} \bullet d\vec{s}$$

$\vec{E}$ est la valeur du champ en tout point ds de la surface S.



Cas d'une charge ponctuelle :

D'après la figure on voit que l'angle entre $\vec{E}$ et $d\vec{s}$ est le même que l'angle entre la surface ds et la surface de la sphère de rayon R centrée en q. D'où :

$$d\Phi = \vec{E} \bullet d\vec{s} = E.ds.\cos\theta$$

Mais puisque

$$ds.\cos\theta = R^2.d\Omega \quad \text{et} \quad E = K\,q/r^2$$

Alors

$$d\Phi = K.q.d\Omega$$

$d\Omega$ est l'angle solide qui délimite la surface ds à partir du point où se trouve la charge ponctuelle q.

En intégrant, nous trouvons le flux du champ électrostatique, créé par la charge ponctuelle, à travers une surface S.

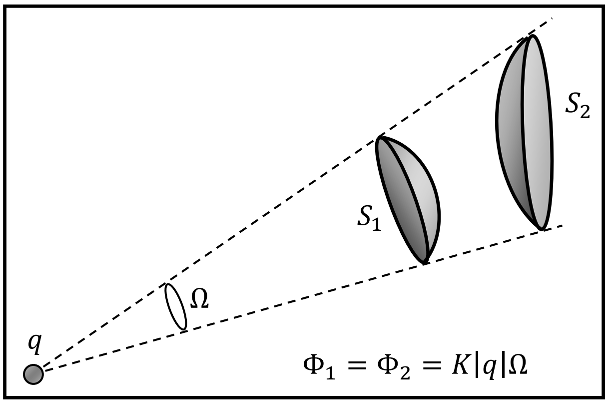
$$\Phi = K.q.\Omega$$

Tel que Ω est l'angle solide sous lequel on voit la surface S à partir de la charge q.

Remarque :

D'après la relation précédente, on remarque que le flux du champ créé par une charge ponctuelle à travers une surface est indépendant de la distance de celle-ci par rapport à la charge, et dépend uniquement de l'angle solide sous lequel on voit cette surface.

Le flux pour deux surfaces observées sous le même angle solide est identique en valeur absolue.



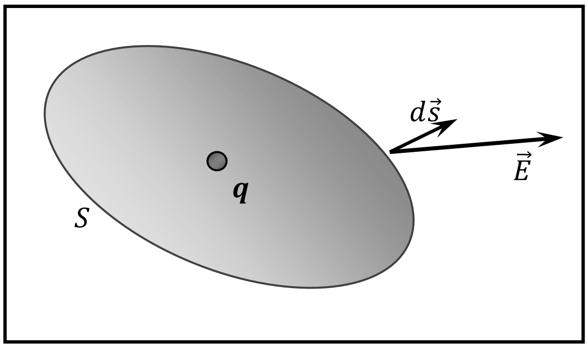
IV.3. THÉORÈME DE GAUSS

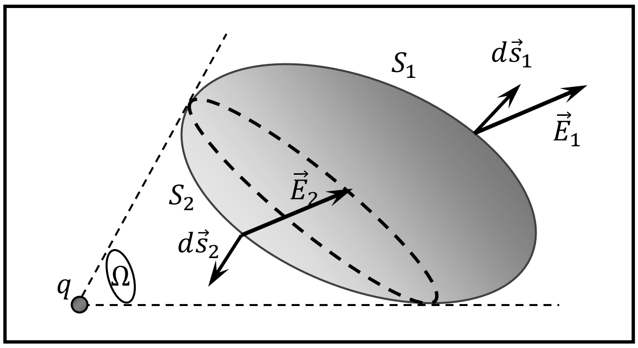
Le théorème de Gauss concerne le flux du champ électrique à travers une ***surface fermée****.*

Charge à l'intérieur de la surface :

Pour une charge qui se trouve à l'intérieur d'une surface fermée (figure ci-dessous à gauche), l'angle sous lequel on peut voir toute la surface est $\Omega = 4\pi\ stéradian$. D'où :

$$\Phi = q/\varepsilon_0$$





Charge à l'extérieur de la surface :

Si une charge est située à l'extérieur de S (figure ci-dessus à droite), le flux total du champ électrique créé par cette charge à travers S est nul.

- A chaque élément de surface ds on peut associer un élément ds' vu sous le même angle solide $d\Omega$. Les flux $d\Phi$ et $d\Phi'$ sont égaux en valeur absolue et de signes opposés ($d\vec{s}$ orienté vers l'extérieur).
- Ceci est général quelque soit la forme de la surface.
- En intégrant on peut diviser la surface S en deux parties :
  S_1 où le champ $\vec{E}$ est dirigé suivant $d\vec{s}$ $\Rightarrow$ le flux est positif $\Phi_1 = +Kq.\Omega$
  S_2 où le champ $\vec{E}$ est dirigé dans le sens opposé à $d\vec{s}$ $\Rightarrow$ le flux est négatif $\Phi_2 = -Kq.\Omega$

Et le flux total est donné par

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 0$$

Cas général :

En présence de plusieurs charges à l'intérieur et à l'extérieur de la surface S. Le flux total est la somme des flux de chaque charge.

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \oiint_S \left(\sum_i \vec{E}_i\right) \bullet d\vec{s} = \sum_i \left(\oiint_S \vec{E}_i \bullet d\vec{s}\right) = \sum_i \Phi_i$$

Puisque le flux des charges se trouvant à l'extérieur de la surface est nul, alors, le flux total est égal au flux des charges à l'intérieur de la surface. D'où, ***le théorème de Gauss*** *:*

$$\boxed{\Phi = \oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{\sum q_{\text{intérieures}}}{\varepsilon_0}}$$

Remarques :

- Le flux du champ électrostatique est nul, s'il n'y a pas de charges à l'intérieur de la surface de Gauss, ou si la somme algébrique de ces charges est nulle.
- « Le flux du champ créé par les charges extérieures est nul » ne veut pas dire que le champ créé par ces charges est nul sur la surface.

COMMENT APPLIQUER LE THEORÈME DE GAUSS POUR CALCULER LE CHAMP ÉLECTROSTATIQUE ?

1. Ecrire la relation

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

2. Choisir la surface de Gauss qui respecte la symétrie de la distribution :
   - Soit $\vec{E}$ est parallèle à la surface $(\vec{E} \perp d\vec{s}) \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \bullet d\vec{s} = 0$
   - Soit $\vec{E}$ est perpendiculaire à la surface $(\vec{E} \parallel d\vec{s})$ **et** $E = \text{Cte} \;\Rightarrow\; \iint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = E.S$
3. Calculer les charges q_{int} à l'intérieur de la surface de Gauss.

IV.4. <u>DIVERGENCE DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE ET ÉQUATION DE POISSON</u>

On sait maintenant que le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée S est donné par le théorème de Gauss.

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{\sum q_{\text{intérieures}}}{\varepsilon_0}$$

Si on prend le cas général d'une distribution volumique de charge dont la densité est notée ρ, la charge intérieure totale est calculée par :

$$\sum q_{\text{intérieures}} = \iiint_\tau \rho . d\tau$$

En utilisant le théorème d'Ostrogradski, on a :

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \iiint_\tau div(\vec{E}) . d\tau$$

Où τ est le volume délimité par la surface fermée S.

En comparant les deux équations précédentes, on trouve *la forme locale du théorème de Gauss* :

$$\boxed{div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Et puisque $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$, on a l'***équation de Poisson*** sous la forme :

$$\boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$$

Dans le vide et en absence de charges : $\rho = 0$ et $\Delta V = 0$ (***équation de Laplace***).

IV.5. ÉNERGIE D'UNE DISTRIBUTION DE CHARGES

En utilisant la relation de l'énergie potentielle d'une distribution discrète de charges.

$$U_{\text{syst}} = \frac{1}{2}\sum_i q_i.V(i)$$

D'où en divisant une distribution continue en charges élémentaires dq considérées comme ponctuelles. L'énergie potentielle électrostatique d'une distribution volumique de charges est donnée par l'intégrale

$$U_{\text{élec}} = \frac{1}{2}\int_Q V.dq = \frac{1}{2}\iiint_\tau \rho.V.d\tau$$

L'intégrale ici porte sur tout le volume occupé par les charges
Calculons cette énergie en fonction du champ électrique. Nous savons que :

$$div(V.\vec{E}) = \overrightarrow{grad}(V) \bullet \vec{E} + V.div(\vec{E}) = -E^2 + V\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \rho.V = \varepsilon_0.div(V.\vec{E}) + \varepsilon_0.E^2$$

En remplaçant dans l'expression de l'énergie potentielle :

$$U_{\text{élec}} = \frac{1}{2}\iiint_{\text{espace}} \rho.V.d\tau = \frac{1}{2}\left(\iiint_{\text{espace}} \varepsilon_0.div(V.\vec{E}).d\tau + \iiint_{\text{espace}} \varepsilon_0.E^2.d\tau\right)$$

Tel que l'intégrale sur le volume (τ) est remplacée par une intégrale sur tout l'espace, ρ étant nulle pour les positions où il n'existe pas de charges (vide).
En utilisant le théorème d'Ostrogradski.

$$\iiint_{\text{espace}} \varepsilon_0.div(V.\vec{E}).d\tau = \varepsilon_0 \oiint_S (V.\vec{E}) \bullet d\vec{s}$$

S étant une surface fermée qui entoure tout l'espace (tend vers l'infini).

Pour une distribution de charges finie, cette dernière intégrale tend vers zéro. En effet, à très grande distance, une distribution finie peut être assimilée à une charge ponctuelle, le champ sur la surface S est proportionnel à r^{-2} et le potentiel sur S est proportionnel à r^{-1}.

Pour S infiniment grand $(r \to +\infty)$: $E \to 0$ et $V \to 0$. Donc :

$$\iiint_{\text{espace}} \varepsilon_0.div(V.\vec{E}).d\tau = \varepsilon_0 \oiint_S (V.\vec{E}) \bullet d\vec{s} = 0$$

Et l'énergie potentielle électrostatique s'écrit en fonction du champ électrostatique sous la forme :

$$\boxed{U_{\text{élec}} = \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2}\varepsilon_0.E^2.d\tau}$$

Cette intégrale porte sur tout l'espace.

On appelle « ***densité d'énergie potentielle électrostatique*** », et on note $\mathcal{E}_{\text{élec}}$, la valeur :

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{élec}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0.E^2}$$

IV.6. CONTINUITÉ DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

***Dans le cas d'une distribution surfacique*.**

Composante normale :

Calculons le flux du champ électrique à travers une surface fermée au voisinage d'une surface portant une densité de charge surfacique σ.

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \bullet d\vec{s}_1 + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \bullet d\vec{s}_2 + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \bullet d\vec{s}_3 = \frac{\sum q_{\text{intérieures}}}{\varepsilon_0}$$

D'une part plus on se rapproche de la surface chargée plus la surface S_3 devient négligeable, donc :

$$\iint_{S_3} \vec{E}_3 \bullet d\vec{s}_3 \rightarrow 0$$

D'autre part on peut décomposer les vecteurs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ en deux composantes chacun ; une composante normale à leurs surfaces respectives et une composante tangentielle. (Voir la Figure 3.)

$$\vec{E}_1 \bullet d\vec{s}_1 = E_{1\perp}.ds_1 \qquad \text{et} \qquad \vec{E}_2 \bullet d\vec{s}_2 = -E_{2\perp}.ds_2$$

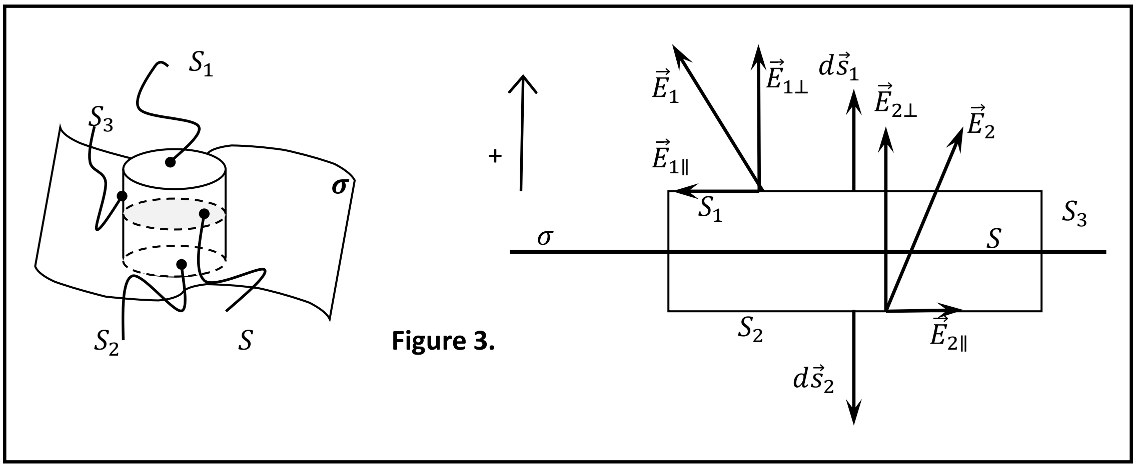


Figure 3.

En plus on considère les surfaces S_1 et S_2 assez petites pour que les champs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ restent constants, on a alors :

$$E_{1\perp}.S_1 - E_{2\perp}.S_2 = \frac{\sigma.S}{\varepsilon_0}$$

Comme $S_1 = S_2 = S$ on trouve :

$$\boxed{E_{1\perp} - E_{2\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Donc, *la composante normale du champ électrique n'est pas continue au voisinage (de part et d'autre) d'une distribution surfacique.*

Composante tangentielle :

Calculons la circulation du champ électrique le long d'une courbe fermée $A_1B_1B_2A_2$ au voisinage d'une surface portant une densité de charge surfacique σ.(Figure 4.)

$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{r} = \int_{A_1}^{B_1} \vec{E}_1 \bullet d\vec{r}_1 + \int_{B_1}^{B_2} \vec{E}_3 \bullet d\vec{r}_3 + \int_{B_2}^{A_2} \vec{E}_2 \bullet d\vec{r}_2 + \int_{A_2}^{A_1} \vec{E}_4 \bullet d\vec{r}_4 = 0$$

D'une part plus on se rapproche de la surface chargée plus les longueurs A_1A_2 et B_1B_2 deviennent négligeables, donc :

$$\int_{B_1}^{B_2} \vec{E}_3 \bullet d\vec{r}_3 \to 0 \quad \text{et} \quad \int_{A_2}^{A_1} \vec{E}_4 \bullet d\vec{r}_4 \to 0$$

D'autre part on peut décomposer les vecteurs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ en deux composantes chacun ; une composante normale et une composante tangentielle. (Voir figure 4.)

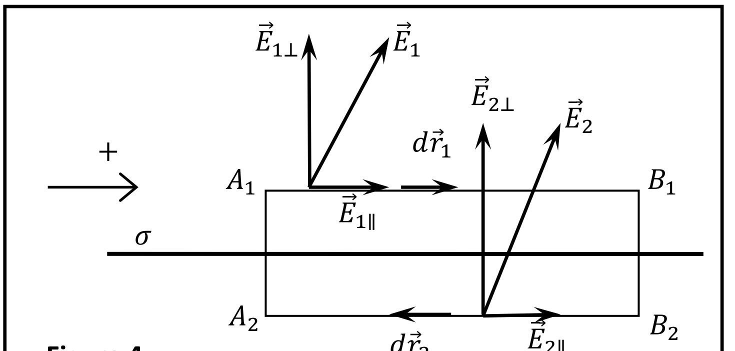


Figure 4.

$$\vec{E}_1 \bullet d\vec{r}_1 = E_{1\parallel}.dr_1 \qquad \text{et} \qquad \vec{E}_2 \bullet d\vec{r}_2 = -E_{2\parallel}.dr_2$$

En plus on considère les segments A_1B_1 et A_2B_2 assez petits pour que les champs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ restent constants, on a alors :

$$E_{1\parallel}.r_1 - E_{2\parallel}.r_2 = 0$$

Comme $r_1 = r_2 = r$ on trouve :

$$E_{1\parallel} - E_{2\parallel} = 0$$

Donc, *la composante tangentielle du champ électrique est continue au voisinage (de part et d'autre) d'une distribution surfacique.*

Remarque :

Le champ électrostatique n'est discontinu (sa composante normale) qu'au voisinage d'une distribution surfacique – comme nous venons de le voir – mais dans la réalité une telle distribution n'est qu'une approximation d'une distribution volumique d'épaisseur négligeable. Dans le cas, plus réaliste, d'une distribution volumique toutes les composantes du champ électrostatique sont continues (y compris la composante normale).

V. DIPÔLE ÉLECTROSTATIQUE

Définition

Le dipôle électrostatique est constitué de deux charges de même valeur q et de signes opposés, séparés par une distance a très petite (de l'ordre d'une distance interatomique). Le moment dipolaire d'un dipôle électrostatique est un vecteur dirigé de la charge négative vers la charge positive et sa valeur est donnée par :

$$\vec{p} = q.\vec{a}$$

- On trouve le dipôle électrostatique dans des molécules dites « polaires » tel que : CO, H_2O. Par opposition les molécules ne portant pas de dipôle (moment dipolaire nul) sont appelées molécules « apolaires » comme : (CO_2, CH_4, O_2, H_2, gaz rares)
- L'étude des propriétés liées au dipôle électrostatique est très importante pour la compréhension de la composition, des structures et des propriétés physiques et chimiques des matériaux (polarisation des diélectriques, ferroélectricité, analyse des matériaux …)
- En physique-électronique, le dipôle électrique produit, quand il oscille, un champ électromagnétique pouvant se propager (antennes).
- Applications pratiques : Fours à micro-ondes, détecteurs de pression et de chaleur, transducteurs ...

Potentiel créé par un dipôle

$$V(r) = V_1 + V_2 = Kq\frac{r_2 - r_1}{r_2.r_1}$$

Approximation dipolaire :

$$\begin{cases} r_2 - r_1 = a.\cos\theta \\ r_2.r_1 = r^2 \end{cases}$$

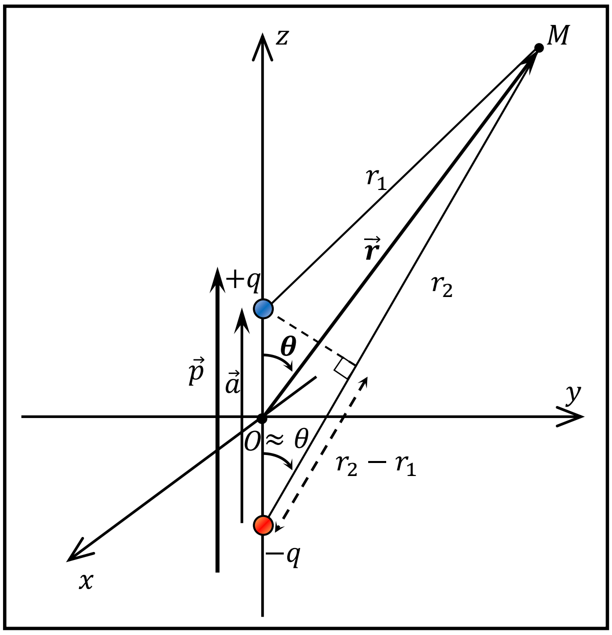
Donc

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p.\cos\theta}{r^2}$$

Tel que θ est l'angle entre $\vec{p}$ et $\vec{r}$.

Nous pouvons aussi écrire

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\bullet\vec{r}}{r^3}$$



Champ créé par un dipôle

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\overrightarrow{grad}(V)$$

En coordonnées sphériques

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p.\cos\theta}{r^3}\vec{e}_r + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p.\sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta$$

Dipôle dans un champ électrique uniforme : $\vec{E}_0 = \text{constante}$

Moment de couple agissant sur le dipôle (⊥ au plan de rotation)

$$\vec{C} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$\vec{C} = +q.\vec{r}_1 \times \vec{E}_0 - q.\vec{r}_2 \times \vec{E}_0 = q.(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{E}_0 = q.\vec{a} \times \vec{E}_0$$

Donc

$$\vec{C} = \vec{p} \times \vec{E}_0$$

Les Positions d'équilibre sont données par : $\vec{C} = \vec{0}$

- Positions d'équilibre stable : ($\vec{E}_0 \parallel \vec{p}$ et dans le même sens) $\theta = 0\, rad.$
- Positions d'équilibre instable : ($\vec{E}_0 \parallel \vec{p}$ et dans des sens opposés) $\theta = \pi\, rad.$

Energie potentielle du dipôle

$$U = +q.V_1 - q.V_2 = -q(V_2 - V_1)$$

Or

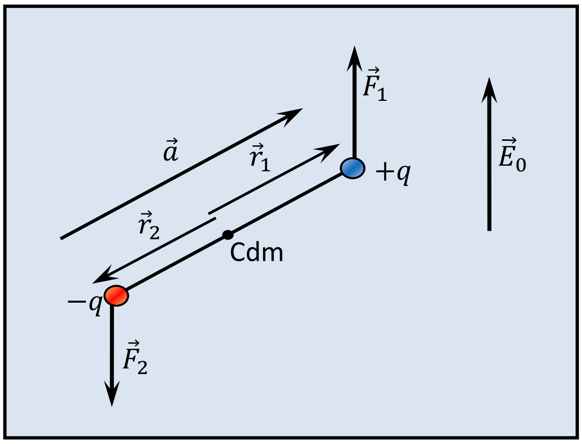
$$V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{E}_0 \bullet d\vec{r}$$

Comme le champ est uniforme $(\vec{E}_0 = \text{constante})$

$$U = +q\vec{E}_0 \bullet \int_1^2 d\vec{r} = +q\vec{E}_0 \bullet (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -q\vec{E}_0 \bullet \vec{a}$$

Finalement

$$U = -\vec{p} \bullet \vec{E}_0$$



On peut retrouver les positions d'équilibre $\left(U = -pE_0.\cos\theta \quad \text{avec} \quad \vec{E}_0 = E_0.\vec{e}_z\right)$:

- Positions d'équilibre stable : (U est minimale) $\theta = 0\, rad.$
- Positions d'équilibre instable : (U est maximale) $\theta = \pi\, rad.$