Polycopié de cours

ÉLECTROMAGNÉTISME CLASSIQUE DU VIDE

Socle Commun Deuxième Année Licence Physique

Université Ziane Achour – Djelfa

CHAPITRE III
MAGNÉTOSTATIQUE

I. COURANTS ET DENSITÉ DE COURANT 2
II. FORCE MAGNÉTIQUE – SYMÉTRIE DU CHAMP MAGNÉTIQUE 5
III. LOI DE BIOT ET SAVART 9
IV. EXEMPLES DE CALCUL DU CHAMP MAGNÉTIQUE 10
V. PROPRIÉTÉS DU CHAMP MAGNÉTIQUE 11
VI. POTENTIEL VECTEUR 14
VII. ÉNERGIE DU CHAMP MAGNÉTIQUE 16
VIII. CONTINUITÉ DU CHAMP MAGNÉTIQUE 18
IX. DIPÔLE MAGNÉTIQUE 20

MAGNÉTOSTATIQUE

I. COURANTS ET DENSITÉ DE COURANT

I.1. DENSITÉ DE COURANT ÉLECTRIQUE

Dans certains corps il existe des charges qui peuvent se déplacer librement sur des distances macroscopiques. De telles charges sont appelées des charges libres (q_i).
Le déplacement des charges libres se fait en général dans tous les sens (sous l'effet de l'agitation thermique). Nous considérerons les porteurs de charges libres comme étant des charges ponctuelles q_i de masse m_i et animés d'une vitesse $\vec{v}_i$ chacun.

Considérons un volume $\Delta\tau$ de dimensions faibles par rapport aux distances d'observations mais assez grand pour contenir un très grand nombre de porteurs de charges libres noté Δn. Ce volume élémentaire va nous servir à définir la densité volumique de charges (C/m^3).

$$\rho = \frac{1}{\Delta\tau}\sum_{i=1}^{\Delta n} q_i$$

Nous caractérisons le transport de charges par le vecteur densité volumique de courant :

$$\vec{j} = \frac{1}{\Delta\tau}\sum_{i=1}^{\Delta n} q_i.\vec{v}_i$$

Dans le cas particulier où toutes les charges ont la même valeur $q_i = q$, les deux relations précédentes deviennent.

$\rho = \frac{\Delta n}{\Delta\tau} q = n.q$	$\vec{j} = n.q.\vec{v}$

Tel que n est la densité volumique des porteurs de charges (unité : $1/m^3$) et

$$\vec{v} = \frac{1}{\Delta n}\sum_{i=1}^{\Delta n} \vec{v}_i$$

Est la vitesse moyenne des porteurs de charges

On remarque que pour une vitesse moyenne nulle le vecteur densité de courant électrique est aussi nul. Ce qui nous amène à définir le courant électrique comme suit.

« *On appelle courant électrique tout mouvement d'ensemble de particules chargées*.»

Remarques :
En général le mouvement des porteurs de charges dans un corps à l'état d'équilibre est aléatoire et leur vitesse moyenne est nulle, donc il n'existe pas de courant dans ce corps. Le mouvement d'ensemble des porteurs de charges (une vitesse moyenne non nulle) apparait quand le corps est soumis à un gradient de température de concentration de charges ou de potentiel. C'est ce dernier cas qui nous intéresse en électrocinétique.

Dans ce qui précède, nous avons considéré le cas où tous les porteurs de charges libres avaient la même valeur q, dans le cas le plus général nous pourrions avoir plusieurs types de porteur de charges dans le corps. Si nous notons n_α la densité des porteurs de charges q_α et $\vec{v}_\alpha$ leur vitesse moyenne, on trouve la densité volumique de charges et le vecteur densité de courant associés au porteurs de charges α.

$$\rho_\alpha = \frac{\Delta n_\alpha}{\Delta \tau} q_\alpha = n_\alpha . q_\alpha \qquad \text{et} \qquad \vec{j}_\alpha = n_\alpha . q_\alpha . \vec{v}_\alpha$$

La densité volumique de charge totale et le vecteur densité de courant total sont donnés par

$$\rho = \sum_\alpha \rho_\alpha = \sum_\alpha n_\alpha . q_\alpha \qquad \text{et} \qquad \vec{j} = \sum_\alpha \vec{j}_\alpha = \sum_\alpha n_\alpha . q_\alpha . \vec{v}_\alpha$$

I.2. INTENSITÉ DU COURANT ÉLECTRIQUE

On définit l'intensité du courant électrique qui traverse une surface S par le nombre de charges qui traverse cette surface par unité de temps

$$I = I_S = \frac{dQ}{dt}$$

Cherchons la relation entre l'intensité du courant électrique et le vecteur densité de courant. Pour cela calculons l'intensité du courant qui traverse une surface dS élémentaire appartenant à S. Le nombre total de charges qui traverse dS pendant un temps dt est donné par la densité volumique de charges multiplié par le volume du prisme de base dS et de longueur $dl = v.dt$ (Figure 1.)

$$dI = \frac{dq}{dt} \qquad \text{avec} \qquad dq = \rho . dS . dl . \cos\theta = (n.q.\vec{v} \bullet d\vec{s}).dt$$

D'où $$dI = n.q.\vec{v} \bullet d\vec{s} = \vec{j} \bullet d\vec{s}$$

L'intensité de courant totale à travers S est obtenue en intégrant sur toute la surface.

$$I = \iint_S \vec{j} \bullet d\vec{s}$$

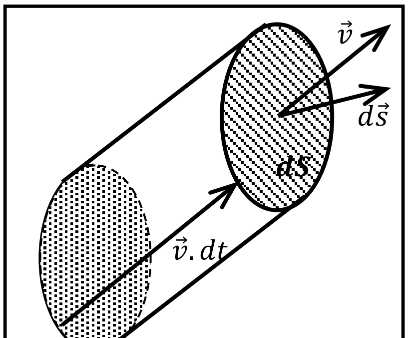


Figure 1.

Donc, en fait, *l'intensité du courant traversant une surface S est égale au flux du vecteur densité de courant à travers cette surface*.

Unités : Dans le système international [MKSA] (I : $C/s =$ Ampere) et ($\vec{j}$: Ampere$/m^2$)

I.3. ÉQUATION DE CONSERVATION DE CHARGES OU ÉQUATION DE CONTINUITÉ

La conservation de charge totale à l'intérieur et à l'extérieur d'un volume τ, impose.

$$Q_{\text{tot}} = Q_{\text{int}} + Q_{\text{ext}} = \text{Constante}$$

Q_{int} représente les charges libres à l'intérieur du volume τ. Q_{ext} représente les charges libres qui traversent la surface fermée S entourant le volume τ. Donc :

$$dQ_{\text{ext}} = -dQ_{\text{int}}$$

Comme l'intensité du courant électrique est définie par la quantité de charges qui traverse la surface S par unité de temps on a :

$$I = \frac{dQ_{\text{ext}}}{dt} = -\frac{dQ_{\text{int}}}{dt}$$

Or I est égal au flux du vecteur densité de courant à travers la surface fermée S. D'où :

$$\oiint_S \vec{j} \bullet d\vec{S} = -\frac{dQ_{\text{int}}}{dt} = -\frac{d}{dt}\iiint_\tau \rho . d\tau$$

Et le théorème d'Ostrogradski donne :

$$\oiint_S \vec{j} \bullet d\vec{s} = \iiint_\tau div(\vec{j}). d\tau$$

Donc

$$\iiint_\tau div(\vec{j}). d\tau = -\frac{d}{dt}\iiint_\tau \rho . d\tau$$

La dérivée par rapport au temps étant indépendante des paramètres d'intégration (la surface S étant fixe), nous pouvons écrire :

$$\frac{d}{dt}\iiint_\tau \rho . d\tau = \iiint_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

Nous obtenons enfin *la forme locale de l'équation de conservation de charges* sous la forme.

$$div(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Elle est aussi appelée équation de continuité.

Régime stationnaire :

Dans le cas d'un régime stationnaire la densité de charges libres ne dépend pas explicitement du temps, alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad div(\vec{j}) = 0$$

Ou encore sous la forme intégrale

$$\oiint_S \vec{j} \bullet d\vec{s} = 0$$

On dit que *le flux du vecteur densité de courant est conservatif*. Dans ce cas de figure, il n y a pas d'accumulation de charges à l'intérieur de la surface S, c'est-à-dire que la quantité de charges qui entre dans cette surface est égale à la quantité de charges qui en sort.

I.4. COURANTS FILIFORMES

Les circuits électriques réels sont composés de fils conducteurs très fins tel qu'on peut négliger leurs épaisseurs par rapport à leurs longueurs respectives. Dans ce cas précis, il est plus commode d'intégrer les grandeurs par rapport à la longueur du fil conducteur.

Dans un conducteur filiforme l'intensité du courant traversant une section ds de ce fil est égale au flux du vecteur densité de courant à travers cette surface.

$$I = dI = \vec{j} \bullet d\vec{s}$$

En multipliant par $d\vec{l}$

$$I.d\vec{l} = (\vec{j} \bullet d\vec{s}).d\vec{l}$$

Mais puisque $d\vec{l}$ et $\vec{j}$ sont parallèles, alors, on peut écrire ($\vec{u}$ étant le vecteur unitaire dans la direction de $\vec{j}$).

$$I.d\vec{l} = j.dl.(\vec{u} \bullet d\vec{s}).\vec{u} = \left(d\vec{l} \bullet d\vec{s}\right).\vec{j} \qquad \text{avec} \qquad d\vec{l} \bullet d\vec{s} = d\tau$$

On trouve enfin la relation

$$I.d\vec{l} = \vec{j}.d\tau$$

Donc une intégrale de la densité de courants volumiques sur tout le volume du conducteur est équivalente à une intégrale sur sa longueur de l'intensité du courant.

$$\oint (\ldots).dI.d\vec{l} \quad \Leftrightarrow \quad \iiint (\ldots).\vec{j}.d\tau$$

II. FORCE MAGNÉTIQUE SYMÉTRIE DU CHAMP MAGNÉTIQUE

II.1. INTRODUCTION : LES PHÉNOMÈNES MAGNÉTIQUES

Magnétite, expérience d'Oersted, bobine, champ magnétique terrestre, force appliquée à un conducteur parcouru par un courant, particule chargée dans un champ magnétique.

II.2. CHAMP MAGNÉTIQUE

Notion de champ magnétique :

Les effets magnétiques peuvent être décrit dans la région où ils se manifestent à l'aide d'une grandeur qui est fonction de l'endroit choisi et qui est appelée champ magnétique $\vec{B}$.

La force appliquée à une charge q se déplaçant avec une vitesse $\vec{v}$ dans une région de l'espace où existe un champ magnétique $\vec{B}$, est donnée par :

$$\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Unité :

L'unité du champ magnétique dans le système international $[\text{MKSA}]$ est le Tesla (sous–multiple Gauss : $1\ G = 10^{-4}\ T$)

Symétrie du champ magnétique :

A partir de la loi de force on trouve que *le champ magnétique est un pseudo vecteur*, c'est-à-dire : « *Lorsqu'une situation physique est décrite par un champ magnétique* $\vec{B}$, *la situation symétrique par rapport à un plan* Π *est décrite par le champ* $\vec{B}'$ *opposé du symétrique de* $\vec{B}$ *par rapport à ce plan* ». (Figure 2.a.)

L'image de $\vec{B}$ par rapport au plan Π est donc le vecteur $\vec{B}'$ opposé au vecteur symétrique de $\vec{B}$ par rapport à ce plan. (Figure 2.b.)

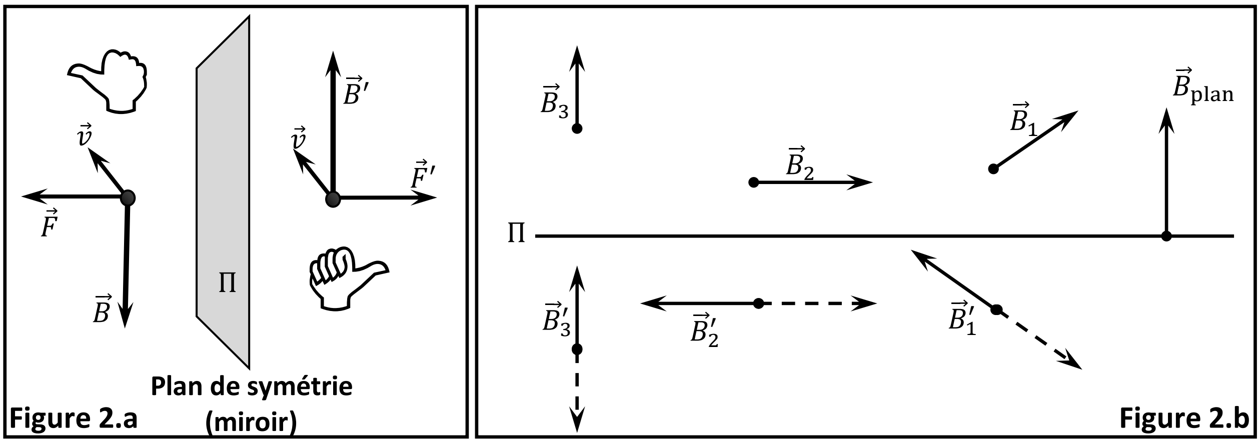


Figure 2.a Figure 2.b

Comme le vecteur champ magnétique ne peut pas avoir deux valeurs différentes au même point, alors : « *Le vecteur champ magnétique en un point situé sur un plan de symétrie est forcément perpendiculaire au plan de symétrie* », comme le montre $\vec{B}_{\text{plan}}$ dans la figure 2.b.
En considérant la propriété de symétrie que nous venons de voir, il vient que : « *le champ magnétique est nul, en un point où passe plusieurs plans de symétrie* ».

Ces propriétés de symétrie sont importantes, car elles permettent de déterminer sans calcul la direction du champ magnétique, uniquement en identifiant les plans de symétrie. Ces derniers sont définis – comme nous le verrons plus tard – par la distribution de courants.

La force de Lorentz :

Dans le cas général où on aurait une coexistence des champs électrique et magnétique la force appliquée à une charge est donnée par la force de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

D'après cette formule nous remarquons la relation entre les dimensions du champ électrique, du champ magnétique et la dimension d'une vitesse : $(Tesla = Volt.s.m^{-2})$

Force appliquée sur un conducteur filiforme parcouru par un courant :

Calculons la force appliquée à un élément de volume $d\tau$ appartenant à un conducteur. Cette force est évidemment égale à la force appliquée à chaque charge multipliée par le nombre de charges contenues dans ce volume.

$$d\vec{F} = n.d\tau.\vec{F_q} = n.d\tau.q(\vec{v} \times \vec{B})$$

n est la densité volumique des porteurs de charges, et $\vec{v}$ leur vitesse moyenne.

Or, $\vec{j} = n.q.\vec{v}$ et $I.d\vec{l} = \vec{j}.d\tau$. Donc la force appliquée à un conducteur filiforme de longueur dl parcouru par un courant I est :

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B})$$

Cette expression est appelée *loi de Laplace*.

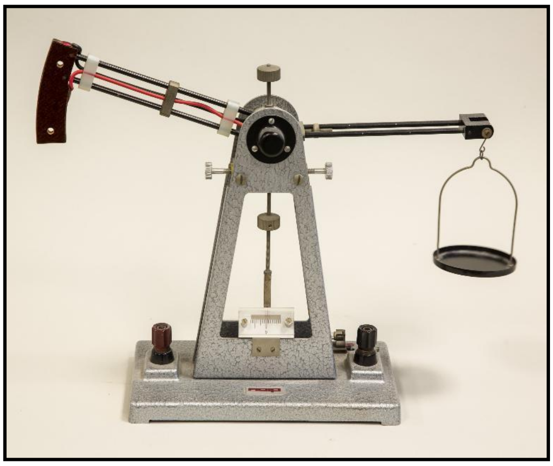
Et la force appliquée sur tout le conducteur, en régime stationnaire, est donnée par

$$\vec{F} = I \oint d\vec{l} \times \vec{B}$$

Cette force, appliquée aux porteurs de charges, est perpendiculaire au conducteur. Mais puisque les porteurs de charges ne peuvent quitter le conducteur (car ils sont attirés par les ions du réseau) alors cette force se transmet au réseau cristallin du conducteur, d'où on a un déplacement complet du conducteur et pas seulement des porteurs de charges.

Applications :

Balance de Cotton : (Figure 3.)



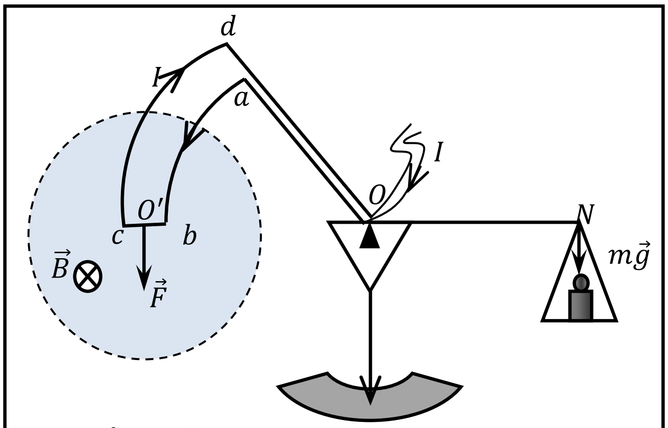


Figure 3.

C'est un appareil qui sert à « peser » la valeur du champ magnétique en utilisant la loi de Laplace. L'équilibre des moments de forces s'écrit :

$$I.B.L \times OO' = mg \times ON$$

L est la longueur du segment bc ($\perp$ à $\vec{B}$), le champ $\vec{B}$ étant *uniforme*.

Le moment de force appliqué aux segments ab et cd est nul car la direction de la force passe par O.

Effet Hall :

Soit un conducteur de section carrée $S = a \times b$ traversé par un courant de porteurs de charges q ayant une vitesse moyenne $\vec{v}$ et une densité volumique n. Si nous plaçons ce conducteur dans un champ magnétique dirigé suivant l'axe de (b), alors les porteurs de charges subiront une force magnétique $\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$ dirigée suivant l'axe de (a) (Figure 4.).

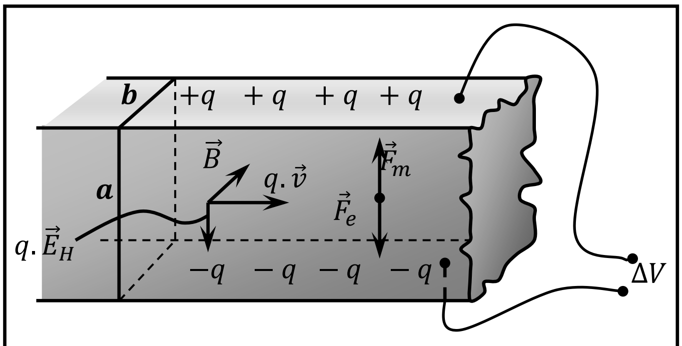


Figure 4.

Puisque les porteurs de charges ne peuvent quitter la surface du conducteur alors nous aurons une accumulation de charges positives sur la face supérieure du conducteur et une accumulation de charges négatives sur sa face inférieure. Il en résulte un champ électrostatique appelé champ de Hall $\vec{E}_H$ et une force électrostatique $\vec{F}_e = q.\vec{E}_H$ qui continue à augmenter au fur et à mesure que la charge s'accumule jusqu'à ce qu'elle (la force électrique) compense la force magnétique.

Nous aurons alors l'équation suivante à l'équilibre des forces.

$$\vec{F}_m + \vec{F}_e = q(\vec{E}_H + \vec{v} \times \vec{B}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_H = -\vec{v} \times \vec{B} \quad \text{et} \quad E_H = v.B \quad (\vec{v} \perp \vec{B})$$

Puisque le champ de Hall est uniforme, la différence qui apparait entre les faces supérieure et inférieure du conducteur est donnée par

$$\Delta V = a.E_H = a.v.B$$

Et le courant traversant le conducteur est donné par

$$I = j.S = nq.v.a.b$$

Donc on a la relation suivante qui permet de calculer en pratique la densité des porteurs de charges.

$$n = \frac{I.B}{q.\Delta V.b}$$

III. LOI DE BIOT ET SAVART

Principe de superposition.

Si la source S_1 produit un champ $\vec{B}_1$ et la source S_2 produit un champ $\vec{B}_2$. Les deux sources produisent un champ $\vec{B}_1 + \vec{B}_2$ (s'il n'y a pas d'influence entre les deux sources).

Loi de Biot et Savart.

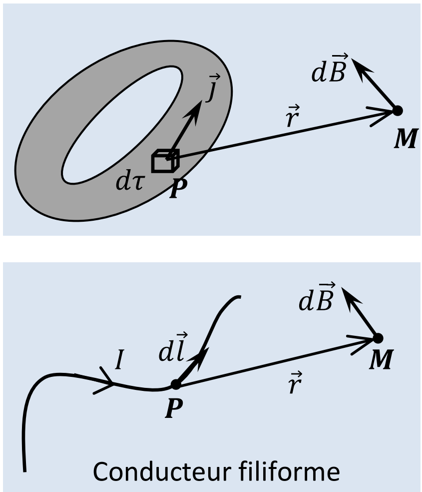
Nous admettrons que le champ créé en un point M par un élément de volume infinitésimal $d\tau$ situé en $P\left(\vec{r} = \overrightarrow{PM}\right)$ et traversé par des charges mobiles de densité de courant volumique notée $\vec{j}$ (Figure 5.), est donné par la relation :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3}d\tau$$

Tel que $K_m = \mu_0/4\pi = 10^{-7}$ [MKSA] est une constante (μ_0 est la *perméabilité du vide*).

Le champ total crée par tout le conducteur est donné par l'intégrale.

Figure 5.



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\tau}\frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3}d\tau$$

Dans le cas d'un conducteur filiforme on sait que $I.d\vec{l} = \vec{j}.d\tau$. Alors le champ créé par un élément du conducteur de longueur $d\vec{l}$ traversé par un courant *stationnaire* I ($d\vec{l}$ est dirigé suivant le sens du courant) est donné par :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I.d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

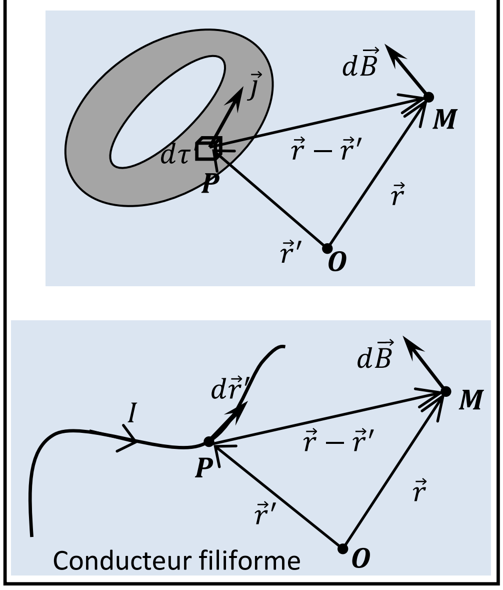
Et le champ créé par tout le fil conducteur est égal à :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0.I}{4\pi}\oint_C\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Cette relation est appelée loi élémentaire de Biot et Savart.

Les deux relations précédentes sont équivalentes dans le cas des circuits filiformes.

Figure 6.



Notations :

En général nous utilisons le vecteur $\vec{r}$ pour la position du point M par rapport à l'origine O et le vecteur $\vec{r}'$ pour la position du point P (Figure 6.). Alors, le vecteur $\overrightarrow{PM} = \vec{r} - \vec{r}'$ et les relations précédentes deviennent

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\tau'}\vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}d^3r'$$

Et dans le cas de courants filiformes

$$\vec{B} = \frac{\mu_0.I}{4\pi}\oint_{C'}d\vec{r}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

IV. EXEMPLES DE CALCUL DU CHAMP MAGNÉTIQUE

Champ créé par un courant droit infini :

Utilisons la relation

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 . I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Puisque $\vec{B}$ est perpendiculaire à $d\vec{l}$ et $\vec{r}$, alors $\vec{B}$ est tengent au cercle de rayon R (Figure 7.) et :

$$\left|d\vec{l} \times \vec{r}\right| = dl . r . \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = dl . r . \cos(\theta)$$

Paramétrage

$$dl = \frac{R}{\cos^2 \theta} d\theta \qquad \text{et} \qquad r = \frac{R}{\cos \theta}$$

D'où le module de $\vec{B}$ est égal à l'intégrale

$$B = \frac{\mu_0 . I}{4\pi} \oint_C \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0 . I}{4\pi . R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta . d\theta$$

Enfin

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R}$$

En coordonnées cylindriques

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \vec{e}_\varphi}$$

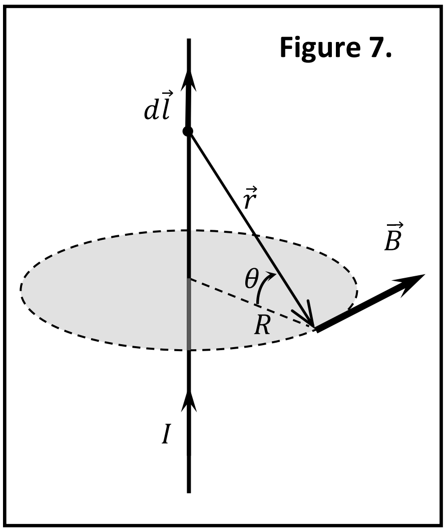


Figure 7.

Champ créé par une spire circulaire :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I . d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Et

$$dB = \frac{\mu_0 . I}{4\pi} \frac{dl . r}{r^3} \qquad \text{car} \qquad d\vec{l} \perp \vec{r}$$

En utilisant la symétrie on trouve que $\vec{B} \parallel (Oz)$ (Figure 8.).
Donc, on ne calculera que l'intégrale de la composante sur (Oz).

$$dB_z = dB . \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = dB . \sin\alpha$$

Paramétrage :

$$dl = R . d\theta \quad ; \quad r = \sqrt{R^2 + z^2} \quad ; \quad \sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

D'où

$$B_z = \int dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I . R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

Et enfin

$$\boxed{B_z = \frac{\mu_0}{2} \frac{I . R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}}$$

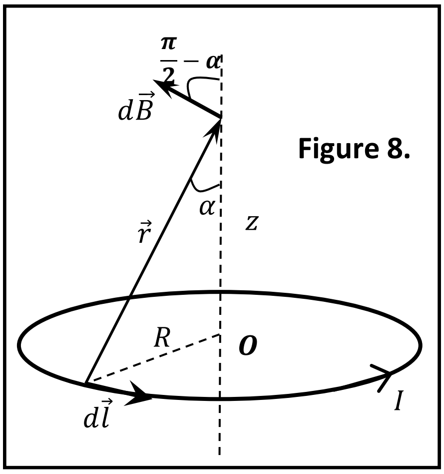
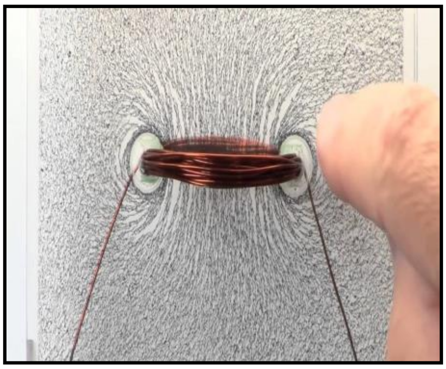


Figure 8.



V. PROPRIÉTÉS DU CHAMP MAGNÉTIQUE

V.1. FLUX DU CHAMP MAGNÉTIQUE ET DIVERGENCE

En partant de la relation

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\tau'} \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} d^3r'$$

Calculons la divergence du champ magnétique. Posons :

$$\begin{cases} \vec{r} = x.\vec{e}_x + y.\vec{e}_y + z.\vec{e}_z \\ \vec{r}' = x'.\vec{e}_x + y'.\vec{e}_y + z'.\vec{e}_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}-\vec{r}' = (x-x').\vec{e}_x + (y-y').\vec{e}_y + (z-z').\vec{e}_z \\ |\vec{r}-\vec{r}'|^3 = r^3 = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2} \end{cases}$$

Puisque la dérivée qui concerne les coordonnées (x, y, z) est indépendante de l'intégrale qui concerne les coordonnées (x', y', z'), alors, nous pouvons intervertir les deux opérations :

$$div(\vec{B}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\tau'} div\left(\vec{j}(\vec{r}')d^3r' \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right)$$

En utilisant l'identité :

$$div\left(\vec{j}(\vec{r}')d^3r' \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right) = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \bullet \overrightarrow{rot}(\vec{j}(\vec{r}')d^3r') - \vec{j}(\vec{r}')d^3r' \bullet \overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right)$$

Comme $\vec{j}(\vec{r}')d^3r'$ ne dépend que de (x', y', z') elle est constante par rapport à (x, y, z), donc $\overrightarrow{rot}(\vec{j}(\vec{r}')d^3r') = \vec{0}$ et :

$$div\left(\vec{j}(\vec{r}')d^3r' \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right) = -\vec{j}(\vec{r}')d^3r' \bullet \overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right)$$

Il nous reste à calculer le second terme en utilisant une autre identité

$$\overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right) = \overrightarrow{grad}\,(|\vec{r}-\vec{r}'|^{-3}) \times (\vec{r}-\vec{r}') + (|\vec{r}-\vec{r}'|^{-3}).\overrightarrow{rot}(\vec{r}-\vec{r}')$$

Le premier terme

$$\overrightarrow{grad}\,(|\vec{r}-\vec{r}'|^{-3}) = \overrightarrow{grad}\left([(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-3/2}\right)$$

$$\overrightarrow{grad}\,(|\vec{r}-\vec{r}'|^{-3}) = -3[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-5/2}\left((x-x').\vec{e}_x + (y-y').\vec{e}_y + (z-z').\vec{e}_z\right)$$

$$\overrightarrow{grad}\,(|\vec{r}-\vec{r}'|^{-3}) = -3[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-5/2}(\vec{r}-\vec{r}')$$

Donc

$$\overrightarrow{grad}\,(|\vec{r}-\vec{r}'|^{-3}) \times (\vec{r}-\vec{r}') = -3|\vec{r}-\vec{r}'|^{-5}.(\vec{r}-\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}') = \vec{0}$$

Et le second terme

$$\overrightarrow{rot}(\vec{r}-\vec{r}') = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x-x' & y-y' & z-z' \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Finalement, il vient que :

$$div\left(\vec{j}(\vec{r}')d^3r' \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{div(\vec{B}) = 0}$$

Et en utilisant le théorème d'Ostrogradski

$$\oiint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = \iiint_\tau div(\vec{B}).d\tau = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\oiint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = 0}$$

D'où *le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est toujours nul*.

On dit alors, que *le champ magnétique est à flux conservatif*. C'est-à-dire que pour une surface fermée quelconque le flux du champ magnétique entrant est égale (et opposé en signe) au flux sortant.

Ceci est dû au fait qu'il n'existe pas de charges magnétiques (comme pour les charges électriques) et que *les lignes du champ magnétique se referment toujours sur elles-mêmes*.

V.2. CIRCULATION DU CHAMP MAGNÉTIQUE ET ROTATIONNEL – THÉORÈME D'AMPÈRE

Calculons la circulation du champ magnétique sur une courbe C fermée dans le cas d'un courant rectiligne infini. On a trouvé que :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}\vec{e}_\varphi$$

En coordonnées cylindriques $\quad d\vec{r} = d\rho.\vec{e}_\rho + \rho d\varphi.\vec{e}_\varphi + dz.\vec{e}_z$.

D'où

$$\vec{B} \bullet d\vec{r} = \frac{\mu_0}{2\pi} I d\varphi \qquad (R = \rho)$$

D'où la circulation suivant une courbe fermée dépend de φ.

Pour une courbe qui n'enlace pas le courant I (Figure 9.a)

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \frac{\mu_0.I}{2\pi}\int_{\varphi_0}^{\varphi_0} d\varphi = 0$$

Pour une courbe enlaçant le courant I (Figure 9.b)

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \frac{\mu_0.I}{2\pi}\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} d\varphi = \mu_0.I$$

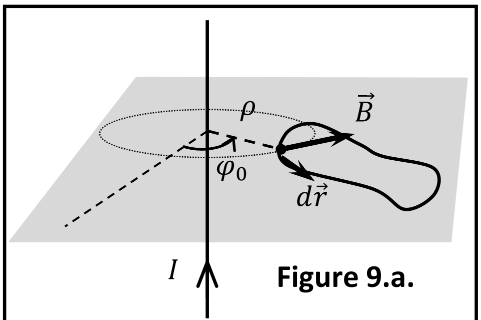


Figure 9.a.

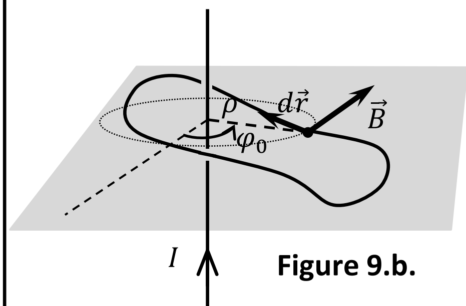


Figure 9.b.

En conclusion :

La circulation du champ magnétique sur une courbe fermée est égale à la somme algébrique des courants permanents qui traversent une surface quelconque délimitée par cette courbe multiplié par μ_0.

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \mu_0.\sum I_{\text{int}}}$$

Le signe attribué à un courant électrique dépend du sens de la circulation du champ magnétique (Règle de la main droite).

Remarque :

Le théorème d'Ampère est démontrable dans le cas stationnaire (courants filiformes). Il est toujours vérifié expérimentalement.

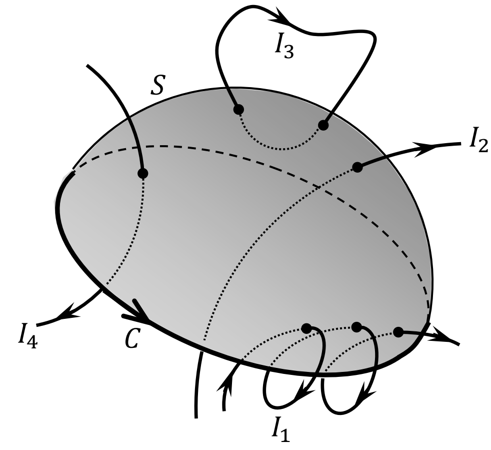


Figure 10.

Exemple :

Dans la figure 10. La circulation du champ magnétique sur la courbe fermée C (dont le sens d'intégration est donné par la figure) est égale à :

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \mu_0.(3I_1 + I_2 + I_3 - I_3 - I_4)$$

Forme locale de la loi d'Ampère :

Sachant que le courant total traversant une surface S est égal au flux du vecteur densité de courant à travers cette surface et en appliquant le théorème de Stockes sur la circulation du champ magnétique, on a :

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \mu_0.\sum I_{\text{int}} \qquad \Rightarrow \qquad \iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{B}) \bullet d\vec{s} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \bullet d\vec{s}$$

Cette dernière équation étant valable quelque soit la surface S s'appuyant sur C. On trouve alors la forme locale de la loi d'Ampère.

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j}$$

Remarque :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j} \qquad \Rightarrow \qquad div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = \mu_0.div(\vec{j}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad div(\vec{j}) = 0$$

Donc la loi d'Ampère n'est valable qu'en régime stationnaire.

EN CONCLUSION

$$\oiint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad div(\vec{B}) = 0$$

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \mu_0.\sum I_{\text{int}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j}$$

VI. POTENTIEL VECTEUR

VI.1. ÉQUATIONS DU POTENTIEL VECTEUR

Nous avons vu dans la partie précédente que $div(\vec{B}) = 0$ ce qui nous laisse penser que le champ magnétique peut s'écrire en fonction d'une autre grandeur vectorielle.

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A}) \quad \Rightarrow \quad div(\vec{B}) = div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = 0$$

Donc nous pouvons trouver une grandeur vectorielle tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$$

$\vec{A}$ est appelé *potentiel vecteur du champ magnétique* $\vec{B}$.

En fait l'équation $\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$ n'admet pas une solution unique. En effet, tout vecteur s'écrivant sous la forme :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{grad}(f)$$

Est aussi une solution de cette équation car :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}') = \overrightarrow{rot}\left(\vec{A} + \overrightarrow{grad}(f)\right) = \overrightarrow{rot}(\vec{A}) + \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) = \overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{B}$$

Pour définir le potentiel vecteur de façon unique (à une constante près), utilisons la deuxième équation locale du champ magnétique (loi d'Ampère).

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{A})\right) - \Delta\vec{A} = \mu_0.\vec{j}$$

Pour obtenir une équation de Poisson analogue à celle du potentiel scalaire V, il nous faut trouver un potentiel vecteur qui vérifie.

$$div(\vec{A}) = 0 \qquad \text{(jauge de Coulomb)}$$

Et par conséquent on a l'équation de Poisson de la magnétostatique.

$$\Delta\vec{A} + \mu_0.\vec{j} = \vec{0}$$

VI.2. EXPRESSION DU POTENTIEL VECTEUR

Cherchons la solution des équations précédentes en utilisant l'analogie entre le champ électrostatique et le champ magnétostatique. Posons

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau'} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

Les grandeurs $|\vec{r} - \vec{r}'|$, $\vec{j}(\vec{r}')$ et $d^3r' = d\tau'$ sont représentées dans la figure 5.

Dans le cas de courants filiformes.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 . I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Montrons d'abord que $\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau'} \overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'\right)$$

Car la dérivée est indépendante des variables d'intégration. Utilisons :

$$\overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'\right) = \overrightarrow{rot}(r^{-1}.\vec{j}(\vec{r}').d^3r') = \overrightarrow{grad}(r^{-1}) \times (\vec{j}(\vec{r}').d^3r') + r^{-1}.\overrightarrow{rot}(\vec{j}(\vec{r}').d^3r')$$

Avec

$$r^{-1} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-1/2}$$

Or $\left(\overrightarrow{rot}(\vec{j}(\vec{r}').d^3r') = \vec{0}\right)$ car $\vec{j}(\vec{r}')$ et d^3r' ne dépendent pas des variables (x, y, z).
Comme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r^{-1}}{\partial x} = -(x - x')[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-3/2} \\ \dfrac{\partial r^{-1}}{\partial y} = -(y - y')[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-3/2} \\ \dfrac{\partial r^{-1}}{\partial z} = -(x - z')[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-3/2} \end{cases}$$

Donc

$$\overrightarrow{grad}(r^{-1}) = -r^{-3}.(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Et

$$\overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'\right) = -\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times \vec{j}(\vec{r}') = \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

En remplaçant dans l'intégrale de $\vec{A}$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau'} \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$$

Montrons maintenant que $\boldsymbol{div(\vec{A}) = 0}$

$$div(\vec{A}) = \frac{\mu_0 . I}{4\pi} \oint_{C'} div\left(\frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right)$$

Car la dérivée est indépendante des variables d'intégration. Utilisons :

$$div\left(\frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) = div(r^{-1}. d\vec{r}') = \overrightarrow{grad}(r^{-1}) \bullet d\vec{r}' + r^{-1}. div(d\vec{r}')$$

Or $div(d\vec{r}') = 0$ car $d\vec{r}'$ ne dépend pas des variables (x, y, z). Donc

$$div(\vec{A}) = \frac{\mu_0 . I}{4\pi} \oint_{C'} \overrightarrow{grad}(r^{-1}) \bullet d\vec{r}'$$

En utilisant le théorème de Stockes

$$div(\vec{A}) = \frac{\mu_0 . I}{4\pi} \oint_{C'} \overrightarrow{grad}(r^{-1}) \bullet d\vec{r}' = \frac{\mu_0 . I}{4\pi} \iint_{S'} \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}(r^{-1})\right) \bullet d\vec{s}' = 0$$

Donc on trouve finalement que (en régime stationnaire)

$$div(\vec{A}) = 0$$

Les deux précédentes démonstrations donnent l'équation de Poisson de la magnétostatique.

$$\Delta\vec{A} + \mu_0 . \vec{j} = \vec{0}$$

L'équation précédente est en fait un ensemble de trois équations qui s'écrivent en coordonnées cartésiennes.

$$\begin{cases} \Delta A_x + \mu_0 . j_x = 0 \\ \Delta A_y + \mu_0 . j_y = 0 \\ \Delta A_z + \mu_0 . j_z = 0 \end{cases}$$

VII. ÉNERGIE DU CHAMP MAGNÉTIQUE

Par analogie au champ électrique, nous définissons l'énergie potentielle magnétique d'une distribution volumique de courant. La densité volumique de charge ρ est remplacée par la densité volumique de courant $\vec{j}$ et le potentiel scalaire V est remplacé par le potentiel vecteur $\vec{A}$. D'où :

$$\boxed{U_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \vec{j} \bullet \vec{A} . d\tau}$$

L'intégrale ici porte sur tout le volume τ occupé par les courants.
Dans le cas de courants filiformes $I . d\vec{l} = \vec{j} . d\tau$, et :

$$U_{\text{magn}} = \frac{1}{2} I \oint_{C} \vec{A} \bullet d\vec{l}$$

Calculons cette énergie en fonction du champ magnétique. Nous savons que :

$$div(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\bullet\overrightarrow{rot}(\vec{A}) - \vec{A}\bullet\overrightarrow{rot}(\vec{B})$$

Mais puisque $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j}$ (thèorème d'Ampère) et $\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$, alors :

$$div(\vec{A}\times\vec{B}) = B^2 - \mu_0.\vec{A}\bullet\vec{j} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{A}\bullet\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}B^2 - \frac{1}{\mu_0}div(\vec{A}\times\vec{B})$$

En remplaçant dans l'expression de l'énergie potentielle :

$$U_{\text{magn}} = \frac{1}{2}\iiint_{\tau} \vec{j}\bullet\vec{A}.d\tau = \frac{1}{2}\left(\iiint_{\text{espace}}\frac{1}{\mu_0}B^2.d\tau - \iiint_{\text{espace}}\frac{1}{\mu_0}div(\vec{A}\times\vec{B}).d\tau\right)$$

Tel que l'intégrale sur le volume (τ) est remplacée par une intégrale sur tout l'espace, $\vec{j}$ étant nulle pour les positions où il n'existe pas de courant (vide).
En utilisant le théorème d'Ostrogradski.

$$\iiint_{\text{espace}}\frac{1}{\mu_0}div(\vec{A}\times\vec{B}).d\tau = \frac{1}{\mu_0}\oiint_S (\vec{A}\times\vec{B})\bullet d\vec{s}$$

S étant une surface fermée qui entoure tout l'espace (tend vers l'infini).

Pour une distribution de courants finie, cette dernière intégrale tend vers zéro. En effet, à très grande distance, le champ magnétique sur la surface S est proportionnel à r^{-2} et le potentiel vecteur sur S est proportionnel à r^{-1}.
Pour S infiniment grand $(r \to +\infty)$ alors $B \to 0$ et $A \to 0$. Donc :

$$\iiint_{\text{espace}}\frac{1}{\mu_0}div(\vec{A}\times\vec{B}).d\tau = \frac{1}{\mu_0}\oiint_S (\vec{A}\times\vec{B})\bullet d\vec{s} = 0$$

Et l'énergie potentielle magnétique s'écrit en fonction du champ magnétostatique sous la forme :

$$\boxed{U_{\text{magn}} = \iiint_{\text{espace}}\frac{1}{2\mu_0}B^2.d\tau}$$

L'intégrale portant sur tout l'espace.

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{magn}} = \frac{1}{2\mu_0}B^2}$$

Est appelée ***densité d'énergie potentielle magnétostatique***.

VIII. CONTINUITÉ DU CHAMP MAGNÉTIQUE

***<u>Dans le cas d'une distribution surfacique de courants</u>*. (*Nappe de courants*)**

Considérons une distribution de courants sous forme d'une nappe d'épaisseur a très faible (Figure 11.). Nous définissons le vecteur densité de courants surfaciques $\vec{j}_S$ tel que :

$$\vec{j}.d\tau = \vec{j}.a.dS = \vec{j}_S.ds$$

Unités : $\vec{j}(A/m^2) \quad \Rightarrow \quad \vec{j}_S(A/m)$

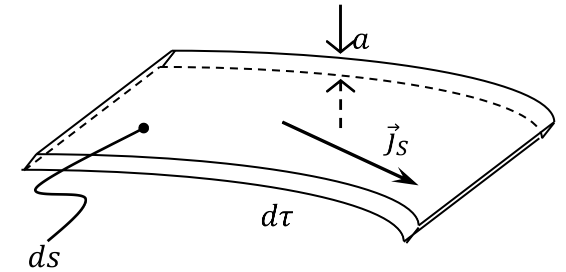


Figure 11.

Composante normale :

Calculons le flux du champ magnétique à travers une surface fermée au voisinage d'une nappe de courants.

$$\oiint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{B}_1 \bullet d\vec{s}_1 + \iint_{S_2} \vec{B}_2 \bullet d\vec{s}_2 + \iint_{S_3} \vec{B}_3 \bullet d\vec{s}_3 = 0$$

D'une part plus on se rapproche de la surface chargée plus la surface S_3 devient négligeable, donc :

$$\iint_{S_3} \vec{B}_3 \bullet d\vec{s}_3 \to 0$$

D'autre part on peut décomposer les vecteurs $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ en deux composantes chacun ; une composante normale à leurs surfaces respectives et une composante tangentielle. (Voir la Figure 12.)

$$\vec{B}_1 \bullet d\vec{s}_1 = B_{1\perp}.ds_1 \qquad \text{et} \qquad \vec{B}_2 \bullet d\vec{s}_2 = -B_{2\perp}.ds_2$$

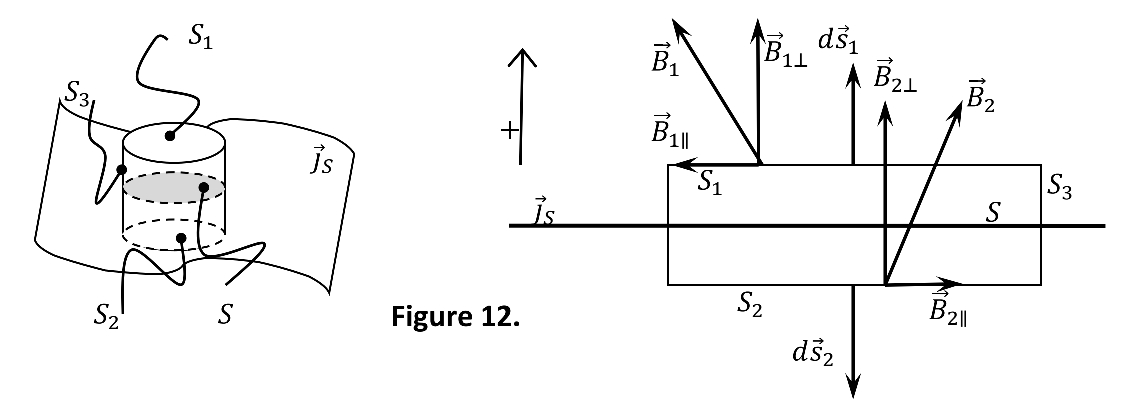


Figure 12.

En plus on considère les surfaces S_1 et S_2 assez petites pour que les champs $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ restent constants, on a alors :

$$B_{1\perp}.S_1 - B_{2\perp}.S_2 = 0$$

Comme $S_1 = S_2 = S$ on trouve :

$$B_{1\perp} - B_{2\perp} = 0$$

Donc, *la composante normale du champ magnétique est continue au voisinage (de part et d'autre) d'une distribution surfacique de courants.*

Composante tangentielle :
Calculons la circulation du champ magnétique le long d'une courbe fermée $A_1B_1B_2A_2$ au voisinage d'une surface portant une densité surfacique de courants. (Figure 13.)

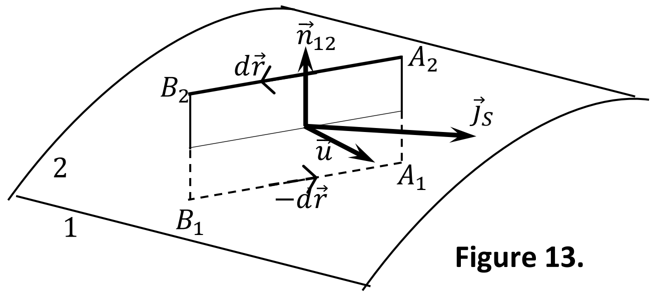


Figure 13.

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \int_{A_1}^{B_1} \vec{B}_1 \bullet d\vec{r}_1 + \int_{B_1}^{B_2} \vec{B}_3 \bullet d\vec{r}_3 + \int_{B_2}^{A_2} \vec{B}_2 \bullet d\vec{r}_2 + \int_{A_2}^{A_1} \vec{B}_4 \bullet d\vec{r}_4 = \mu_0 . \sum I_{\text{int}}$$

D'une part plus on se rapproche de la surface chargée plus les longueurs A_1A_2 et B_1B_2 deviennent négligeables, donc :

$$\int_{B_1}^{B_2} \vec{B}_3 \bullet d\vec{r}_3 \to 0 \qquad \text{et} \qquad \int_{A_2}^{A_1} \vec{B}_4 \bullet d\vec{r}_4 \to 0$$

D'autre part

$$\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j} \bullet d\vec{s}$$

C'est la quantité de courants passant à travers la surface $A_1B_1B_2A_2$.
Notons $\vec{u}$ le vecteur unitaire perpendiculaire à la boucle $A_1B_1B_2A_2$ $(\vec{u} \parallel d\vec{s})$, et $\vec{n}_{12}$ le vecteur unitaire perpendiculaire à la nappe de courants. Donc la valeur :

$$\vec{j} \bullet d\vec{s} = (\vec{j} \bullet \vec{u}).ds = (\vec{j} \bullet \vec{u}).a.dr = (\vec{j}.a \bullet \vec{u}).dr = (\vec{j}_S \bullet \vec{u}).dr$$

D'où

$$\sum I_{\text{int}} = \int (\vec{j}_S \bullet \vec{u}).dr$$

En remplaçant dans la circulation du champ magnétique on trouve.

$$\int_{A_1}^{B_1} \vec{B}_1 \bullet d\vec{r}_1 + \int_{B_2}^{A_2} \vec{B}_2 \bullet d\vec{r}_2 = \mu_0 . \int (\vec{j}_S \bullet \vec{u}).dr$$

Comme $d\vec{r}_2 = -d\vec{r}_1 = d\vec{r}$

$$\int \vec{B}_2 \bullet d\vec{r} - \int \vec{B}_1 \bullet d\vec{r} = \mu_0 . \int (\vec{j}_S \bullet \vec{u}).dr$$

Donc

$$\vec{B}_2 \bullet d\vec{r} - \vec{B}_1 \bullet d\vec{r} = \mu_0 . (\vec{j}_S \bullet \vec{u}).dr$$

On peut aussi écrire

$$\begin{cases} (\vec{j}_S \bullet \vec{u}).dr = \vec{j}_S \bullet (\vec{n}_{12} \times d\vec{r}) = d\vec{r} \bullet (\vec{j}_S \times \vec{n}_{12}) \\ \vec{B}_2 \bullet d\vec{r} = \vec{B}_{2\parallel} \bullet d\vec{r} \qquad \text{et} \qquad \vec{B}_1 \bullet d\vec{r} = \vec{B}_{1\parallel} \bullet d\vec{r} \end{cases}$$

Enfin

$$\vec{B}_{2\parallel} \bullet d\vec{r} - \vec{B}_{1\parallel} \bullet d\vec{r} = \mu_0 . (\vec{j}_S \times \vec{n}_{12}) \bullet d\vec{r}$$

Et

$$\vec{B}_{2\parallel} - \vec{B}_{1\parallel} = \mu_0 . (\vec{j}_S \times \vec{n}_{12})$$

Donc, *la composante tangentielle du champ magnétique n'est pas continue au voisinage (de part et d'autre) d'une nappe de courants.*

Remarque :
Dans le cas d'une densité volumique de courants le champ magnétique est toujours continu.

IX. DIPÔLE MAGNÉTIQUE

Un dipôle magnétique est constitué d'une boucle de courant I ayant une surface S très petite (dimensions atomiques). On définit le moment magnétique $\vec{M}$ par le vecteur

$$\vec{M} = I.\vec{S}$$

Où $\vec{S}$ est le vecteur surface (*Module* : $|\vec{S}| = S$ valeur de la surface S ; *Direction* : perpendiculaire à la surface S ; *Sens* : donné par la règle de la main droite appliquée au courant I)

IX.1. POTENTIEL VECTEUR CRÉÉ A GRANDE DISTANCE PAR UN DIPÔLE MAGNÉTIQUE

En utilisant l'expression du potentiel vecteur

$$\vec{A} = \frac{\mu_0.I}{4\pi}\oint_C \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Et pour une boucle de dimensions très petite contenue dans le plan (Oxy) et centrée en O. (Figure 14.) $\vec{S} \parallel \vec{e}_z$ et $|\vec{r}-\vec{r}'| \approx r$
D'où en transformant l'expression de $\vec{A}$ à l'aide de la relation.

$$\oint_C f.d\vec{l} = \iint_S d\vec{s} \times \overrightarrow{grad}(f)$$

La relation du potentiel vecteur s'écrit

$$\vec{A} = \frac{\mu_0.I}{4\pi}\oint_C d\vec{s} \times \overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Comme $\overrightarrow{grad}(r^{-1}) = r^{-3}.\vec{r}$ et que r est indépendant de l'intégrale.

Le potentiel vecteur créé par un dipôle magnétique en un point très éloigné de la boucle est donné par

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{M}\times\vec{r}}{r^3}$$

En coordonnées sphériques

$\vec{M} = I.S.\vec{e}_z$; $\vec{r} = r.\vec{e}_r$ et $\vec{e}_z \times \vec{e}_r = \sin\theta\,.\vec{e}_\varphi$

Donc

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M.\sin\theta}{r^2}\vec{e}_\varphi$$

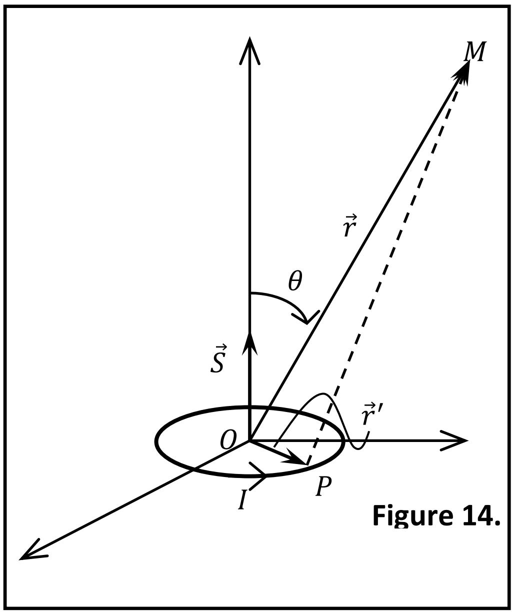


Figure 14.

IX.2. CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ À GRANDE DISTANCE PAR UN DIPÔLE MAGNÉTIQUE

On sait que $\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$. D'où, en utilisant le rotationnel en coordonnées sphériques, on trouve.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2M.\cos\theta}{r^3}\vec{e}_r + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M.\sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta$$

IX.3. DIPÔLE DANS CHAMP MAGNÉTIQUE UNIFORME

Champ magnétique uniforme $\vec{B}_0 = \text{Constante}$

Force agissant sur le dipôle

$$\vec{F} = I\oint d\vec{l} \times \vec{B}_0 = I\left(\oint d\vec{l}\right) \times \vec{B}_0 = \vec{0} \qquad (\vec{B}_0 \text{ uniforme})$$

Moment de couple agissant sur le dipôle ($\perp$ au plan de rotation)

$$\vec{C} = \vec{M} \times \vec{B}_0$$

Energie potentielle du dipôle

$$U = -\vec{M} \bullet \vec{B}_0$$