Polycopié de cours

ÉLECTROMAGNÉTISME CLASSIQUE DU VIDE

Socle Commun Deuxième Année Licence Physique

Université Ziane Achour – Djelfa

CHAPITRE IV

CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE DÉPENDANT DU TEMPS

CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE DÉPENDANT DU TEMPS

I. RAPPEL DES ÉQUATIONS LOCALES DU CHAMP STATIQUE

CHAMP	FORME LOCALE	FORME INTÉGRALE
ÉLECTROSTATIQUE	$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$	$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{r} = 0$
	$div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{\sum q_{\text{intérieures}}}{\varepsilon_0}$
MAGNÉTOSTATIQUE	$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 . \vec{J}$	$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \mu_0 . \sum I_{\text{intérieures}}$
	$div(\vec{B}) = 0$	$\oiint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = 0$

II. ÉQUATION DE MAXWELL–AMPÈRE, COURANT DE DÉPLACEMENT

Nous avons déjà remarqué que l'équation d'Ampère n'est valable qu'en régime permanent.

$$div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = \mu_0 . div(\vec{J}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad div(\vec{J}) = 0$$

Pour que l'équation d'Ampère soit en accord avec l'équation de continuité en régime non permanent, Maxwell introduit un terme correctif.

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 . \vec{J} + \mu_0 . \vec{J}_D$$

Où $\vec{J}_D$ est appelée *densité de courant de déplacement*. Calculons $\vec{J}_D$:

$$div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = \mu_0 . div(\vec{J}) + \mu_0 . div(\vec{J}_D) = 0$$

D'autre part l'équation de continuité donne :

$$\mu_0 . \left(div(\vec{J}) + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = 0$$

En comparant

$$div(\vec{J}_D) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Or en utilisant la forme locale du théorème de Gauss $div(\vec{E}) = \rho/\varepsilon_0$, On trouve

$$\vec{J}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En remplaçant dans l'équation d'Ampère

$$\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 . \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Cette équation est appelée forme locale équation de Maxwell–Ampère.

La forme intégrale de cette équation est obtenue en utilisant le théorème Stockes

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \mu_0 . \sum I_{\text{int}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\iint_S \vec{E} \bullet d\vec{s}\right)$$

Tel que S est une surface quelconque s'appuyant sur le contour fermé C.

Conclusion :

La variation dans le temps du flux d'un champ électrique conduit à la création du champ magnétique.

Remarque :

L'appellation « courant de déplacement » est abusive, car il ne s'agit pas d'un courant au sens propre, comme le courant de conduction, c'est-à-dire : dans le courant de déplacement il n'y a pas de déplacement de charges.

Exemple :

Appliquons le théorème d'Ampère dans le cas du montage ci–contre (Figure 1.)

Considérons un contour fermé C en forme de cercle centré sur le conducteur filiforme rectiligne. La surface S_1 est traversée par un courant I. La surface S_2 qui passe entre les armatures du condensateur (plan de surface S) n'est traversée par aucun courant.

Dans le cas d'un régime quasi stationnaire (ou quasi permanent, car il ne peut pas être permanent puisque le circuit n'est pas fermé).

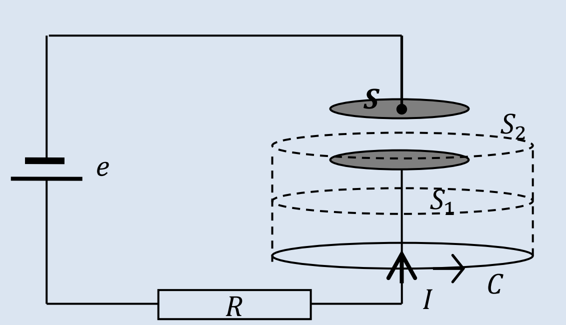


Figure 1.

Appliquons le théorème d'Ampère dans le cas de la surface S_1.

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \mu_0 . \sum I_{\text{int}}$$

$\vec{B}$ est constant en module (régime quasi permanent) et il est toujours parallèle à $d\vec{r}$.

Donc $B.2\pi.R = \mu_0.I$ et $B = \mu_0.I/2\pi.R$ (R est le rayon de la boucle C)

Appliquons le théorème d'Ampère dans le cas de la surface S_2.

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \mu_0 . \sum I_{\text{int}}$$

Donc $B.2\pi.R = 0$ et $B = 0$. (Il n'y a pas de courants traversant S_2)

On a donc deux résultats différents.

Utilisons, maintenant, équation de Maxwell–Ampère sur la surface S_2.

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \mu_0 . \sum I_{\text{int}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\iint_S \vec{E} \bullet d\vec{s}\right)$$

Avec $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}$ (quasi uniforme) et $\vec{u}$ est le vecteur unitaire dans la direction de $d\vec{s}$.

D'où

$$B.2\pi.R = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma.S}{\varepsilon_0}\right)$$

Or

$$\frac{d}{dt}(\sigma.S) = \frac{dQ}{dt} = I$$

Enfin on retrouve :

$$B.2\pi.R = \mu_0.I \qquad \text{et} \qquad B = \frac{\mu_0.I}{2\pi.R}$$

On voit bien que le courant de déplacement $\vec{j}_D$ n'est pas un vrai courant.

$$\iint_S \vec{j}_D \bullet d\vec{s} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\iint_S \vec{E} \bullet d\vec{s}\right)$$

Mais il s'accompagne de l'apparition d'un champ magnétique comme dans le cas d'un courant de conduction.

III. ÉQUATION DE MAXWELL–FARADAY

III.1. OBSERVATIONS EXPÉRIMENTALES

Un circuit C' traversé par un courant I' crée dans tout l'espace un champ magnétique. Un aimant permanent crée aussi un champ magnétique dans tout l'espace. Si on place un circuit fermé C (boucle) formé par un conducteur près du circuit C' ou de l'aimant, on peut observer un courant électrique *induit* (déplacement de charges) dans le circuit C dans les cas suivants (Figure 2. page suivante):

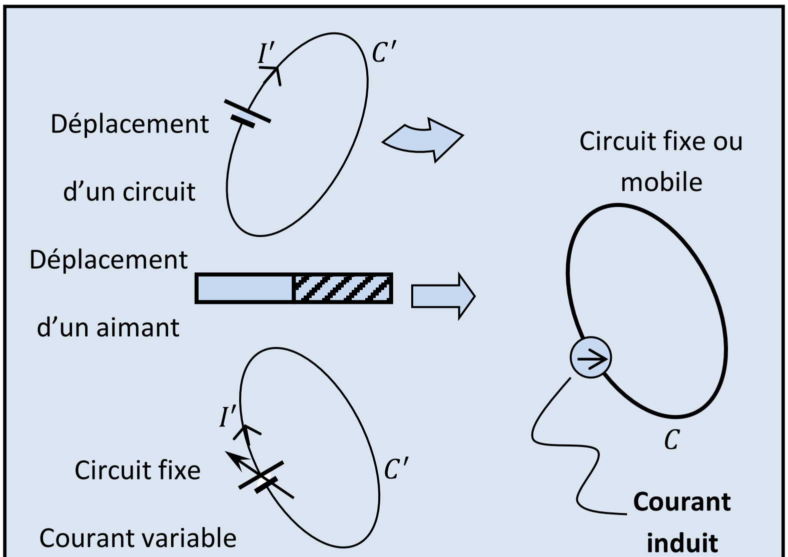


Figure 2.

1. Le circuit C' est en mouvement.
2. Le circuit C' est traversé par un courant variable.
3. L'aimant est en mouvement.
4. Le circuit C est en mouvement.
5. Existence de tous les cas précédents.
6. En plus on peut observer un courant induit si la surface du circuit C est déformée (changée).

Conclusion :

La variation dans le temps du flux du champ magnétique qui traverse une surface quelconque délimitée par la boucle C provoque un déplacement de charges appelé courant électrique induit.

III.2. LOI DE FARADAY

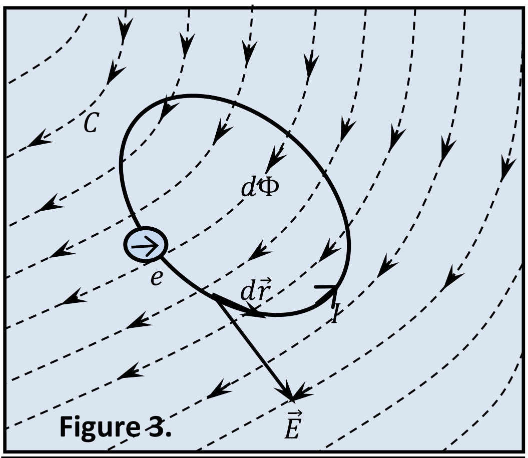


Figure 3.

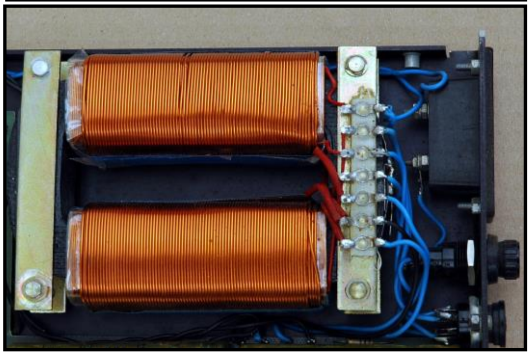
Le courant induit est équivalent à un courant créé par une *force électromotrice* (f.é.m) e appliquée au circuit C. e est appelée *f.é.m induite*.

Le sens du courant induit est tel que le champ magnétique propre créé par ce courant tend à s'opposer à la variation du flux qui lui a donné naissance. (Figure 3.)

D'où la loi empirique de Faraday :
« *La f.é.m induite dans un circuit fermé est égale à l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux magnétique traversant le circuit* »

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

La loi de faraday est largement utilisée pour la génération et la transformation des courants électriques (en face un transformateur)



III.3. ÉQUATION DE MAXWELL–FARADAY

Le flux du champ magnétique à travers une surface S délimitée par C est défini par :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\iint_S \vec{B} \bullet d\vec{s}\right)$$

Et la f.é.m est donnée par :

$$e = V_A - V_B = \oint_C \vec{E} \bullet d\vec{r} = \int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{r}$$

D'où la forme intégrale de l'équation de Maxwell–Faraday.

$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_S \vec{B} \bullet d\vec{s}\right)$$

En utilisant le théorème de Stockes.

$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{r} = \iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{E}) \bullet d\vec{s} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{s}$$

Cette intégrale étant valable quelque soit la surface S. On obtient alors la forme locale de l'équation de Maxwell–Faraday.

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

IV. RELATION ENTRE CHAMPS ET POTENTIELS

Résumons la forme locale des équations de Maxwell dépendantes du temps.

$$div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$div(\vec{B}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Puisque $div(\vec{B}) = 0$ alors le champ magnétique $\vec{B}$ peut toujours s'écrire sous la forme du rotationnel d'une fonction vectorielle (potentiel vecteur $\vec{A}$).

$$\boxed{\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})}$$

Par contre on a

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \overrightarrow{rot}(\vec{A})}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$$

Donc le champ électrique $\vec{E}$ n'est plus le gradient d'une fonction scalaire mais la valeur $\vec{E} + \partial\vec{A}/\partial t$ peut se mettre sous la forme d'un gradient.

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}(V)$$

D'où :

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

Remarque :

Dans le cas d'un champ statique $\partial\vec{A}/\partial t = \vec{0}$ et $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$, donc V représente le potentiel électrostatique. Mais dans le cas général V ne représente pas le potentiel électrique dépendant du temps. Dans le cas où nous avons un champ électromagnétique dépendant du temps, V est appelé *potentiel scalaire* et $\vec{A}$ est appelé *potentiel vecteur*.

V. CHANGEMENT DE JAUGE

Nous avons déjà vu que le choix du potentiel $\vec{A}$ vecteur n'est pas unique. En effet, une autre fonction vectorielle $\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{grad}(f)$ (tel que f est une fonction scalaire quelconque) peut être prise comme potentiel vecteur.

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}') = \overrightarrow{rot}\left(\vec{A} + \overrightarrow{grad}(f)\right) = \overrightarrow{rot}(\vec{A}) + \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) = \overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{B}$$

Il en est de même pour le potentiel scalaire V. Cherchons un autre potentiel scalaire V' qui puisse accompagner le potentiel vecteur $\vec{A}'$ dans l'expression de $\vec{E}$. Posons :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}(V') - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \qquad \text{avec} \qquad \vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{grad}(f)$$

Alors

$$\overrightarrow{grad}(V) + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \overrightarrow{grad}(V') + \frac{\partial\left(\vec{A} + \overrightarrow{grad}(f)\right)}{\partial t} = \overrightarrow{grad}(V') + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

D'où

$$\overrightarrow{grad}(V) = \overrightarrow{grad}\left(V' + \frac{\partial f}{\partial t}\right) \qquad \text{et} \qquad V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}$$

En conclusion toute paire de potentiels $(V, \vec{A})$ peut être remplacée par une paire $(V', \vec{A}')$ tel que :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{grad}(f) \qquad \text{et} \qquad V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}$$

Et f une fonction scalaire quelconque.

Nous nous retrouvons donc avec une infinité de choix pour les potentiels scalaire et vecteur. Un choix commode consiste dans la ***jauge de Lorentz***.

$$\begin{cases} div(\vec{A}) + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial V}{\partial t} = 0 \\ \vec{A}(\infty) = \vec{0} \\ V(\infty) = 0 \end{cases}$$

Remarque :

Dans le cas des champs statiques, nous retrouvons la jauge de Coulomb.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad div(\vec{A}) = 0$$

Et le choix de V est unique (à une constante près)

$$\frac{\partial V'}{\partial t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V' = V + C$$

VI. ÉQUATIONS DE POISSON

POTENTIEL SCALAIRE

$$div(\vec{E}) = div\left(-\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} div(\vec{A}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Or, d'après la jauge de Lorentz

$$div(\vec{A}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$$

Donc

$$\Delta V - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

C'est l'équation de Poisson dépendante du temps du potentiel scalaire.
Qui peut être écrite en fonction de l'opérateur d'Alembertien

$$\Box = \Delta - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\Box V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

POTENTIEL VECTEUR

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{A})\right) - \Delta \vec{A}$$

Or, d'après la jauge de Lorentz

$$div(\vec{A}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$$

Donc

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{grad}(V) - \Delta \vec{A}$$

D'autre part

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 . \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

D'où

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 . \vec{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{grad}(V) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

En comparant ces deux équations, il vient que

$$\Delta \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 . \vec{j} = \vec{0}$$

C'est l'équation de Poisson dépendante du temps du potentiel vecteur.
Qui peut être écrite en fonction du d'Alembertien

$$\Box = \Delta - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\Box \vec{A} + \mu_0 . \vec{j} = \vec{0}$$

CONCLUSION

Résumons la forme locale des équations de Maxwell dépendantes du temps.

$div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$div(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Avec

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$	$\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$

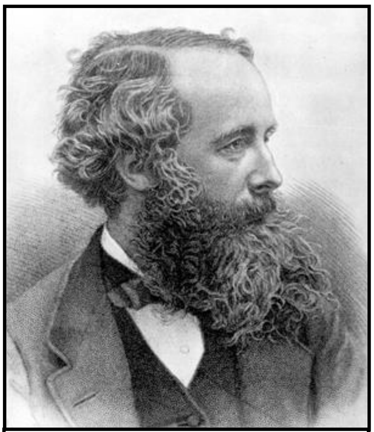
D'après les équations de Maxwell–Faraday et de Maxwell–Ampère on voit que les champs électriques et magnétiques sont couplés et ne peuvent être dissociés. Dans ce cas, nous parlons de champ électromagnétique dépendant du temps.

Jauge de Lorentz.

$$\begin{cases} div(\vec{A}) + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \\ \vec{A}(\infty) = \vec{0} \\ V(\infty) = 0 \end{cases}$$

Equations de Poisson dépendantes du temps.

$\Delta V - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$	$\Delta\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0.\vec{j} = \vec{0}$



James Clerk Maxwell
(1831-1879)