Polycopié de cours

ÉLECTROMAGNÉTISME CLASSIQUE DU VIDE

Socle Commun Deuxième Année Licence Physique

Université Ziane Achour – Djelfa

CHAPITRE V

ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE

ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE

I. ÉQUATIONS DE PROPAGATION DANS LE VIDE

Ecrivons les formes locales des équations de Maxwell dans le vide et ***en absence de charges et de courants*** ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$).

$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$div(\vec{E}) = 0$	$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$div(\vec{B}) = 0$

Ces équations montrent que les champs électrique et magnétique sont couplés.

Calculons $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{E})\right)$. Puisqu'on peut inverser les dérivées :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{E})\right) = -\frac{\partial \overrightarrow{rot}(\vec{B})}{\partial t}$$

D'autre part

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{E})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{E})\right) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E} \qquad \text{car} \qquad div(\vec{E}) = 0$$

Et

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

D'où l'équation suivante :

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Calculons $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right)$. Puisqu'on peut inverser les dérivées :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{rot}(\vec{E})}{\partial t}$$

D'autre part

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{B})\right) - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B} \qquad \text{car} \qquad div(\vec{B}) = 0$$

Et

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

D'où l'équation suivante :

$$\Delta\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Donc les champs électrique et magnétique sont des solutions de la même équation, ayant la forme :

$$\Delta F - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

Cette équation est appelée ***équation de propagation ou équation de d'Alembert***.

c est une constante. En comparant avec les équations de propagation du champ électromagnétique on trouve.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Dimension (unité [MKSA]) :

$$[\varepsilon_0] = \frac{C}{V.m} \quad ; \quad [\mu_0] = \frac{T.m.s}{C} \quad ; \quad T = \frac{V.s}{m^2} \quad \Rightarrow \quad [c] = \frac{m}{s}$$

Valeur :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 \quad ; \quad \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \quad \Rightarrow \quad c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = 3 \times 10^8 \ m/s$$

Donc c *possède la dimension d'une vitesse et elle est égale à la vitesse de la lumière*.

Remarque :

Les équations de Poisson en absence de charges et de courants ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$) donnent des équations de propagation similaires pour le potentiel scalaire et le potentiel vecteur.

$$\Delta V - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \qquad \Delta \vec{A} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Conclusion :

Le champ électrique $\vec{E}$, le champ magnétique $\vec{B}$, le potentiel vecteur $\vec{A}$, le potentiel scalaire V, sont tous des solutions de l'équation de propagation de d'Alembert.

II. ONDE PLANE PROGRESSIVE

L'équation de d'Alembert admet de très nombreuses solutions dont les expressions analytiques peuvent être différentes. La forme de telle ou telle solution correspondant à un problème donné dépend essentiellement de la symétrie du problème et des conditions aux limites qu'il impose.

Pour trouver une solution de F on suppose qu'elle n'est fonction que de l'espace et du temps $F = F(\vec{r}, t)$ avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x.\vec{e}_x + y.\vec{e}_y + z.\vec{e}_z$ est le vecteur position dans l'espace.

Nous appellerons ***onde*** le phénomène physique décrit par la fonction F.

On dit qu'une ***onde est plane*** si, à chaque instant, la fonction F a la même valeur en tout point d'un plan perpendiculaire à une direction fixe définie par un vecteur unitaire $\vec{n}$.

Propagation suivant $(\boldsymbol{Ox})$

Si la propagation se fait suivant la direction x cela veut dire que F a la même valeur en tout point d'un plan perpendiculaire à x. ce qui veut dire que F ne dépend ni de y ni de z, et donc il ne dépend que de x et de t. (Figure 1.)

$$F = F(x,t)$$

Faisons le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} u = x - c.t \\ v = x + c.t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(v+u) \\ t = \dfrac{1}{2c}(v-u) \end{cases}$$

Cherchons les dérivées partielles de F par rapport à u et v.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial t}dt \quad \text{or} \quad dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv = \frac{1}{2}(dv+du) \quad \text{et} \quad dt = \frac{\partial t}{\partial u}du + \frac{\partial t}{\partial v}dv = \frac{1}{2c}(dv-du)$$

En remplaçant dans l'expression de la différentielle totale, on trouve.

$$dF = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}\right)du + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}\right)dv$$

D'où

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}\right)$$

D'autre part l'équation de propagation s'écrit (F ne dépend pas de y et z)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

Et elle peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)F = 0$$

D'où l'équation de propagation en fonction des dérivées partielles par rapport à u et v.

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial F}{\partial v}\right] = 0$$

En intégrant

$$\frac{\partial F}{\partial v} = g_1(v) + \text{Constante} = g_1(v)$$

Puisque la constante ne se propage pas nous la prenons égale à 0.

En intégrant par rapport à v.

$$F = \int g_1(v).dv + f(u) = g(v) + f(u)$$

Conclusion :

La fonction F peut être écrite sous la forme d'une somme de deux fonctions.

$$F(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

Mais quel est le sens physique de la fonction $f(x-ct)$?

1. D'abord cette fonction est une fonction d'onde plane ; pour un temps donné t_1 la fonction est constante pour : $x - ct_1 = \text{Cte} \quad \Rightarrow \quad x = x_1 = ct_1 + \text{Cte}$
   Donc la fonction est constante sur tout le plan d'équation $x = x_1$.
2. Ensuite cette fonction est progressive vers les x *croissants* ;
   $$f(x_1 - ct_1) = f(x_2 - ct_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 - ct_1 = x_2 - ct_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1)$$
   Donc si $t_2 \geq t_1 \quad \Rightarrow \quad x_2 \geq x_1$
3. $\Delta x = c.\Delta t$ donc c représente *la vitesse uniforme de propagation*.

Et quel est le sens physique de la fonction $g(x+ct)$?

1. D'abord cette fonction est une fonction d'onde plane ; pour un temps donné t_1 la fonction est constante pour $x + ct_1 = \text{Cte} \quad \Rightarrow \quad x = x_1 = -ct_1 + \text{Cte}$.
   Donc la fonction est constante sur tout le plan d'équation $x = x_1$.
2. Ensuite cette fonction est progressive vers les x *décroissants* ;
   $$g(x_1 + ct_1) = g(x_2 + ct_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 + ct_1 = x_2 + ct_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 - x_1 = c(t_1 - t_2)$$
   Donc si $t_2 \geq t_1 \quad \Rightarrow \quad x_2 \leq x_1$

L'onde plane la plus générale dans la direction (Ox) est donc la somme de deux ondes planes progressives se propageant en sens inverse sur (Ox).

Propagation suivant une direction quelconque.

Dans le cas d'une onde plane suivant (Ox), on peut écrire $x = \vec{e}_x \bullet \vec{r}$. D'où :

$$F(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \quad \Leftrightarrow \quad F(\vec{e}_x \bullet \vec{r}, t) = f(\vec{e}_x \bullet \vec{r} - ct) + g(\vec{e}_x \bullet \vec{r} + ct)$$

Dans le cas d'une onde plane se propageant dans une direction quelconque. On commence par définir le vecteur unitaire dans le sens de la propagation. (Figure 1.)

$$\vec{n} = \alpha.\vec{e}_x + \beta.\vec{e}_y + \gamma.\vec{e}_z \qquad \text{avec} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

La fonction d'onde plane dans la direction $\vec{n}$ s'écrit alors :

$$(\vec{n} \bullet \vec{r}, t) = f(\vec{n} \bullet \vec{r} - ct) + g(\vec{n} \bullet \vec{r} + ct)$$

Ou

$$F(\alpha.x + \beta.y + \gamma.z, t) = f(\alpha.x + \beta.y + \gamma.z - ct) + g(\alpha.x + \beta.y + \gamma.z + ct)$$

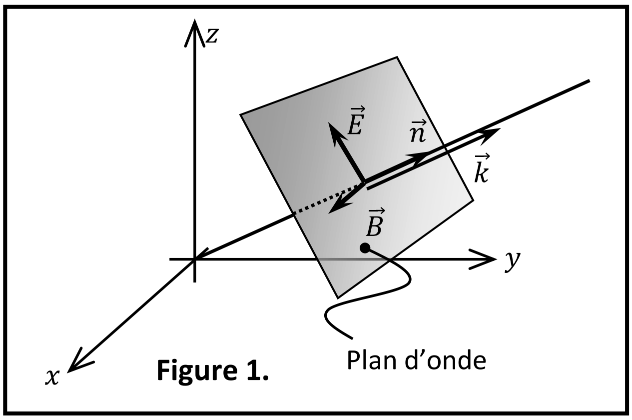


Figure 1.

III. ONDE PLANE PROGRESSIVE MONOCHROMATIQUE (OPPM)

Propagation suivant $(\boldsymbol{Ox})$

Dans ce qui précède nous avons vu qu'une fonction d'onde plane progressive qui se déplace vers les x positifs s'écrivait sous la forme.

$$F(x,t) = f(x - ct)$$

On dit en plus que l'onde est ***monochromatique*** si elle s'écrit sous la forme de la fonction sinusoïdale suivante.

$$f(x - ct) = A.\cos[k(x - ct) + \varphi]$$

Ou

$$f(x - ct) = A.\cos(kx - \omega t + \varphi)$$

C'est l'équation de la fonction d'*onde plane progressive monochromatique* (OPPM)

Tel que : $\begin{cases} A : \text{Amplitude} \\ \omega : \text{Pulsation} \\ \varphi : \text{Phase initiale} \\ k = |\vec{k}| : \text{Module du vecteur d'onde} \end{cases}$ *sont des constantes.* Unités : $\begin{cases} [A] = [f] \\ [\omega] = rad/s \\ [\varphi] = rad \\ [k] = m^{-1} \end{cases}$

Et $$k.c = \omega$$

On peut vérifier que f est une solution de l'équation de propagation de d'Alembert.

$$\frac{\partial^2 f(x - ct)}{\partial x^2} = -k^2 f(x - ct) = -k^2.A.\cos(kx - \omega t + \varphi)$$

$$\frac{\partial^2 f(x - ct)}{\partial t^2} = -\omega^2 f(x - ct) = -\omega^2.A.\cos(kx - \omega t + \varphi)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)A.\cos(k.x - \omega.t + \varphi) = 0 \qquad \text{car} \qquad k.c = \omega$$

La fonction d'onde plane progressive et monochromatique possède une double périodicité.

<u>Périodicité temporelle :</u> (pour x_1 donné)

$$f(x_1 - ct) = A.\cos(kx_1 - \omega t + \varphi) = A.\cos(kx_1 - \omega.(t + T) + \varphi)$$

D'où la ***période temporelle*** :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

<u>Périodicité spatiale :</u> (pour t_1 donné)

$$f(x - ct) = A.\cos(kx - \omega t_1 + \varphi) = A.\cos(k.(x + \lambda) - \omega t_1 + \varphi)$$

D'où la ***période spatiale*** :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

λ : est appelée ***longueur d'onde.***

$$k.c = \omega \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = c.T$$

Donc la longueur d'onde est la distance parcourue par l'onde durant un temps T *égal à la période temporelle.*

On introduit :

La fréquence temporelle $\nu = 1/T$ (unité : s^{-1} ou Hertz).

La fréquence spatiale dite *nombre d'onde* $\sigma = 1/\lambda$ (unité : m^{-1}).

Propagation dans une direction quelconque.

Si la propagation se fait dans une direction quelconque définie par le vecteur unitaire $\vec{n}$, alors $x = \vec{e}_x \bullet \vec{r}$ est remplacé par $(\vec{n} \bullet \vec{r})$ dans la fonction d'onde, c'est-à-dire :

$$f(\vec{n} \bullet \vec{r} - ct) = A.\cos(k.\vec{n} \bullet \vec{r} - \omega t + \varphi)$$

Ou encore

$$f(\vec{n} \bullet \vec{r} - ct) = A.\cos\left(\vec{k} \bullet \vec{r} - \omega t + \varphi\right)$$

Avec

$$\vec{k} = k.\vec{n} = \frac{\omega}{c}\vec{n} \quad \text{ou} \quad \vec{k} = k.\vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$$

Est appelé *vecteur d'onde de l'OPPM* et son module

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

IV. ONDE ÉLECTROMAGNETIQUE PLANE PROGRESSIVE MONOCHROMATIQUE (OEPPM)

IV.1. VITESSE DE PROPAGATION

Nous avons vu que le champ électromagnétique est solution de l'équation de propagation de d'Alembert.

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \qquad \Delta\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Cette équation est de la forme.

$$\Delta F - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

Tel que c représente dans le cas d'une plane la vitesse de propagation. Or, dans notre cas $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = 3\times 10^8\ m/s$, qui est égale à la vitesse de la lumière.

Donc, *le champ électromagnétique se propage avec une vitesse dite vitesse de phase égale à la vitesse de la lumière* (résultat prédit par Maxwell).
En fait, la lumière elle-même est une onde électromagnétique ayant un domaine de fréquence bien déterminé (voir § IV.3.).

Remarque :
La vitesse de propagation est la même pour toutes les ondes électromagnétiques dans le vide quelque soit la vitesse de déplacement de la source. On retrouve le principe de la relativité restreinte $c = \text{constante}$ dans n'importe quel référentiel.

IV.2. TRANSVERSALITÉ DES CHAMPS

Prenons le cas d'une onde plane progressive suivant l'axe (Ox) (se déplaçant vers les x positifs). Dans ce cas (voir § II.) $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne sont fonction que de x et de t. de plus :

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}(x-ct) = E_x(x-ct).\vec{e}_x + E_y(x-ct).\vec{e}_y + E_z(x-ct).\vec{e}_z$$

Et

$$\vec{B}(x,t) = \vec{B}(x-ct) = B_x(x-ct).\vec{e}_x + B_y(x-ct).\vec{e}_y + B_z(x-ct).\vec{e}_z$$

Utilisons les équations de Maxwell.

$div(\vec{E}) = 0 \Rightarrow \partial E_x/\partial x = 0 \Rightarrow E_x = \text{Cte} \Rightarrow E_x = 0$ car la constante ne se propage pas.
$div(\vec{B}) = 0 \Rightarrow \partial B_x/\partial x = 0 \Rightarrow B_x = \text{Cte} \Rightarrow B_x = 0$ car la constante ne se propage pas.

Donc

$$\begin{cases}\vec{E}(x,t) = \vec{E}(x-ct) = E_y(x-ct).\vec{e}_y + E_z(x-ct).\vec{e}_z \\ \vec{B}(x,t) = \vec{B}(x-ct) = B_y(x-ct).\vec{e}_y + B_z(x-ct).\vec{e}_z\end{cases}$$

Conclusion :
- $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires à la direction de propagation (Ox).
- On dit que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont des ondes transversales.

Montrons que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires l'un par rapport à l'autre.

Avant d'utiliser les équations de Maxwell, calculons les dérivées partielles en fonction de la variable $(u = x - ct)$.

$$F(x-ct) = F(u)$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u}du \quad \text{et} \quad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial t}dt = dx - c.dt \quad \Rightarrow \quad dF = \frac{\partial F}{\partial u}dx - c\frac{\partial F}{\partial u}dt$$

Donc

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -c\frac{\partial F}{\partial u} \quad \text{avec} \quad F = E_y; E_z; B_y; B_z$$

Ecrivons maintenant.

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial E_z}{\partial x}\vec{e}_y + \frac{\partial E_y}{\partial x}\vec{e}_z = -\frac{\partial B_y}{\partial t}\vec{e}_y - \frac{\partial B_z}{\partial t}\vec{e}_z$$

En remplaçant par les dérivées par rapport à u on trouve.

$$-\frac{\partial E_z}{\partial u}\vec{e}_y + \frac{\partial E_y}{\partial u}\vec{e}_z = c\left(\frac{\partial B_y}{\partial u}\vec{e}_y + \frac{\partial B_z}{\partial u}\vec{e}_z\right)$$

Puis en intégrant (les constantes d'intégrations sont nulles car elles ne se propagent pas)

$$-E_z.\vec{e}_y + E_y.\vec{e}_z = c\left(B_y.\vec{e}_y + B_z.\vec{e}_z\right)$$

Le premier terme est égal à $(\vec{e}_x \times \vec{E})$ le deuxième est égal à $(c.\vec{B})$, donc :

$$\vec{e}_x \times \vec{E} = c.\vec{B}$$

Donc le champ électrique $\vec{E}$ est perpendiculaire au champ magnétique $\vec{B}$.

Dans le cas de la propagation dans une direction $\vec{n}$ la relation entre les champs devient :

$$\vec{n} \times \vec{E} = c.\vec{B}$$

Elle est appelée relation de structure du champ électromagnétique.

De la même manière, en écrivant :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial B_z}{\partial x}\vec{e}_y + \frac{\partial B_y}{\partial x}\vec{e}_z = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial E_y}{\partial t}\vec{e}_y + \frac{\partial E_z}{\partial t}\vec{e}_z\right)$$

En remplaçant par les dérivées par rapport à u on trouve.

$$-\frac{\partial B_z}{\partial u}\vec{e}_y + \frac{\partial B_y}{\partial u}\vec{e}_z = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial E_y}{\partial u}\vec{e}_y + \frac{\partial E_z}{\partial u}\vec{e}_z\right)$$

Puis en intégrant (les constantes d'intégrations sont nulles car elles ne se propagent pas)

$$-B_z.\vec{e}_y + B_y.\vec{e}_z = -\frac{1}{c}\left(E_y.\vec{e}_y + E_z.\vec{e}_z\right)$$

Le premier terme est égal à $(\vec{e}_x \times \vec{B})$, donc :

$$\vec{e}_x \times \vec{B} = -\frac{1}{c}\vec{E}$$

Donc le champ électrique $\vec{E}$ est perpendiculaire au champ magnétique $\vec{B}$.

Dans le cas de la propagation dans une direction $\vec{n}$ la relation entre les champs devient :

$$\vec{n} \times \vec{B} = -\frac{1}{c}\vec{E}$$

Et on arrive à la même conclusion précédente.

Conclusion :

Les vecteurs $(\vec{n}, \vec{E}, \vec{B})$ forment un trièdre direct. (Figure 2.)

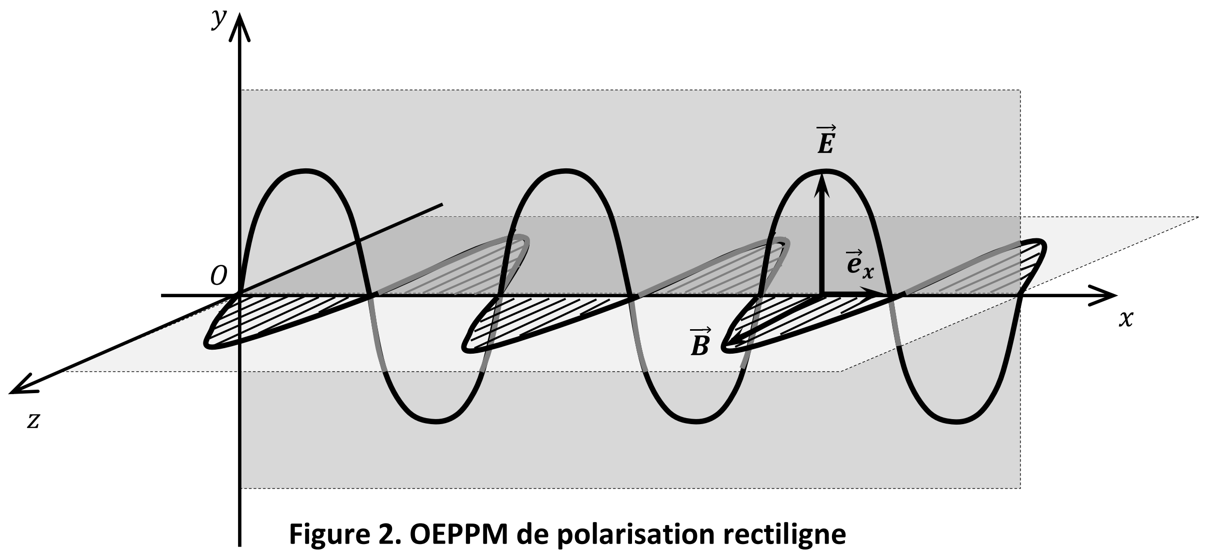


Figure 2. OEPPM de polarisation rectiligne

IV.3. PROPAGATION SUIVANT (Ox)

Donc une onde électromagnétique plane progressive est forcément transversale, de plus si elle est monochromatique, alors elle s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}\begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y}.\cos(kx - \omega t + \varphi_y) \\ E_{0z}.\cos(kx - \omega t + \varphi_z) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{e}_x \times \vec{E} = c.\vec{B}$$

IV.4. PROPAGATION SUIVANT UNE DIRECTION QUELCONQUE

Pour une propagation dans une direction quelconque on remplace $(k.x = k.\vec{e}_x \bullet \vec{r})$ par $(k.\vec{n} \bullet \vec{r} = \vec{k} \bullet \vec{r})$.

$$\vec{E}\begin{pmatrix} E_{0x}.\cos(\vec{k} \bullet \vec{r} - \omega t + \varphi_x) \\ E_{0y}.\cos(\vec{k} \bullet \vec{r} - \omega t + \varphi_y) \\ E_{0z}.\cos(\vec{k} \bullet \vec{r} - \omega t + \varphi_z) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n} \times \vec{E} = c.\vec{B}$$

V. POLARISATION D'UNE OEPPM

Soit une onde électromagnétique plane progressive et monochromatique (OEPPM), dont l'axe de propagation est (Ox) et se dirigeant vers les x croissants.
Comme nous l'avons vu auparavant les champs électrique et magnétique sont uniquement fonction de $(x-ct)$, et les vecteurs $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{e}_x)$ constituent un trièdre direct, c'est-à-dire que les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires à la direction de propagation $\vec{e}_x$ (transversaux), et que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires entre eux.
Donc les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont contenus dans des plans parallèles au plan (Oyz).

Etudions l'***évolution du vecteur champ électrique*** $\vec{E}$ dans un plan parallèle à (Oyz), cette étude est ***appelée étude de la polarisation*** de l'OEPPM. L'évolution du champ magnétique $\vec{B}$ dans le même plan se déduit à partir de la relation de structure.

$$\vec{E}\begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y}.\cos(kx-\omega t+\varphi_y) \\ E_{0z}.\cos(kx-\omega t+\varphi_z) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{e}_x \times \vec{E} = c.\vec{B}$$

L'étude de la polarisation se fait de deux manières différentes :

- On fixe x et on étudie l'évolution du vecteur $\vec{E}$ en fonction du temps. (cette manière est la plus évidente du point de vue visuel et c'est elle que nous adopterons)
- On fixe t et on étudie l'évolution de $\vec{E}$ en fonction de x.

Nous allons adopter la première méthode en étudiant l'évolution du champ $\vec{E}$ dans le plan (Oyz), c'est-à-dire que nous allons fixer $(x=0)$. Mais avant de commencer l'étude de la polarisation, changeons l'origine des temps pour avoir le champ électrique sous la forme (pour $x=0$) :

$$\vec{E}\begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y}.\cos(\omega t') \\ E_{0z}.\cos(\omega t'-\varphi) \end{pmatrix}$$

Avec $t = t' + t_0 = t' + \varphi_y/\omega$ dans ce cas

$$\varphi = \varphi_z - \varphi_y$$

Cherchons l'équation de la courbe que décrit la pointe du vecteur dans le plan (Oyz)

Le point M se trouvant à l'extrémité du vecteur $\vec{E}$ a pour coordonnées $M(E_y, E_z)$.
Le point M se déplace dans un rectangle de côtés $2E_{0y}$ et $2E_{0z}$.

Cherchons donc l'équation reliant E_y et E_z.

$$\cos(\omega t') = \frac{E_y}{E_{0y}} \qquad \text{et} \qquad \cos(\omega t'-\varphi) = \cos(\omega t').\cos(\varphi) + \sin(\omega t').\sin(\varphi) = \frac{E_z}{E_{0z}}$$

Donc

$$\cos(\omega t').\sin(\varphi) = \frac{E_y}{E_{0y}}\sin(\varphi) \qquad \text{et} \qquad \sin(\omega t').\sin(\varphi) = \frac{E_z}{E_{0z}} - \frac{E_y}{E_{0y}}\cos(\varphi)$$

En faisant la somme des carrés des deux équations, on trouve l'équation suivante

$$\left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_z.E_y}{E_{0z}.E_{0y}}\cos(\varphi) = \sin^2(\varphi)$$

Cette équation représente une ellipse (sauf pour $\varphi = n\pi$). On dit que l'onde électromagnétique présente une polarisation elliptique.

Les différents cas de polarisation elliptique possibles sont représentés dans la figure 4. Elles sont tracées dans le plan (Oyz) dans le cas où l'observateur se trouve face à la direction de propagation ($\vec{e}_x$ sortant).

<u>Pour $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$:</u>

$$\left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 \mp 2\frac{E_z.E_y}{E_{0z}.E_{0y}} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_z = \pm\left(\frac{E_{0z}}{E_{0y}}\right)E_y$$

C'est l'équation d'une droite de pente positive ($\varphi = 0$) ou négative ($\varphi = \pi$).
La polarisation de l'OEPPM est rectiligne.

<u>Pour $\varphi = \pi/2$ ou $\varphi = 3\pi/2$:</u>

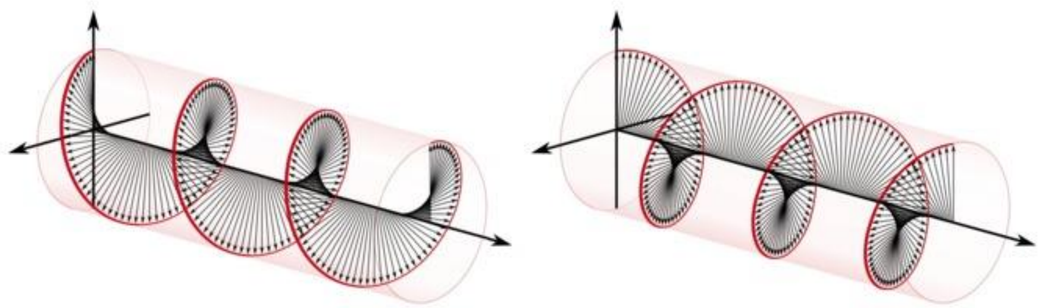
$$\left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = 1$$

C'est l'équation d'une ellipse. ***La polarisation de l'OEPPM est elliptique***.

Cas particulier : $E_{0y} = E_{0z} = E_0$ ***et*** $\varphi = (2n+1)\,\pi/2$ **:**

$$(E_z)^2 + (E_y)^2 = (E_0)^2$$

C'est l'équation d'un cercle. ***La polarisation de l'OEPPM est circulaire***.



OPPM de polarisation circulaire gauche — OPPM de polarisation circulaire droite

Figure 3.

Remarque :
Pour obtenir le sens de rotation sur l'ellipse, on remarque que (E_y) est maximal pour $(t' = 0)$ et que $(dE_z/dt)_{t=0} = E_{0z}.\omega.\sin(\varphi)$ le sens de rotation dépend donc du signe de $\sin(\varphi)$.

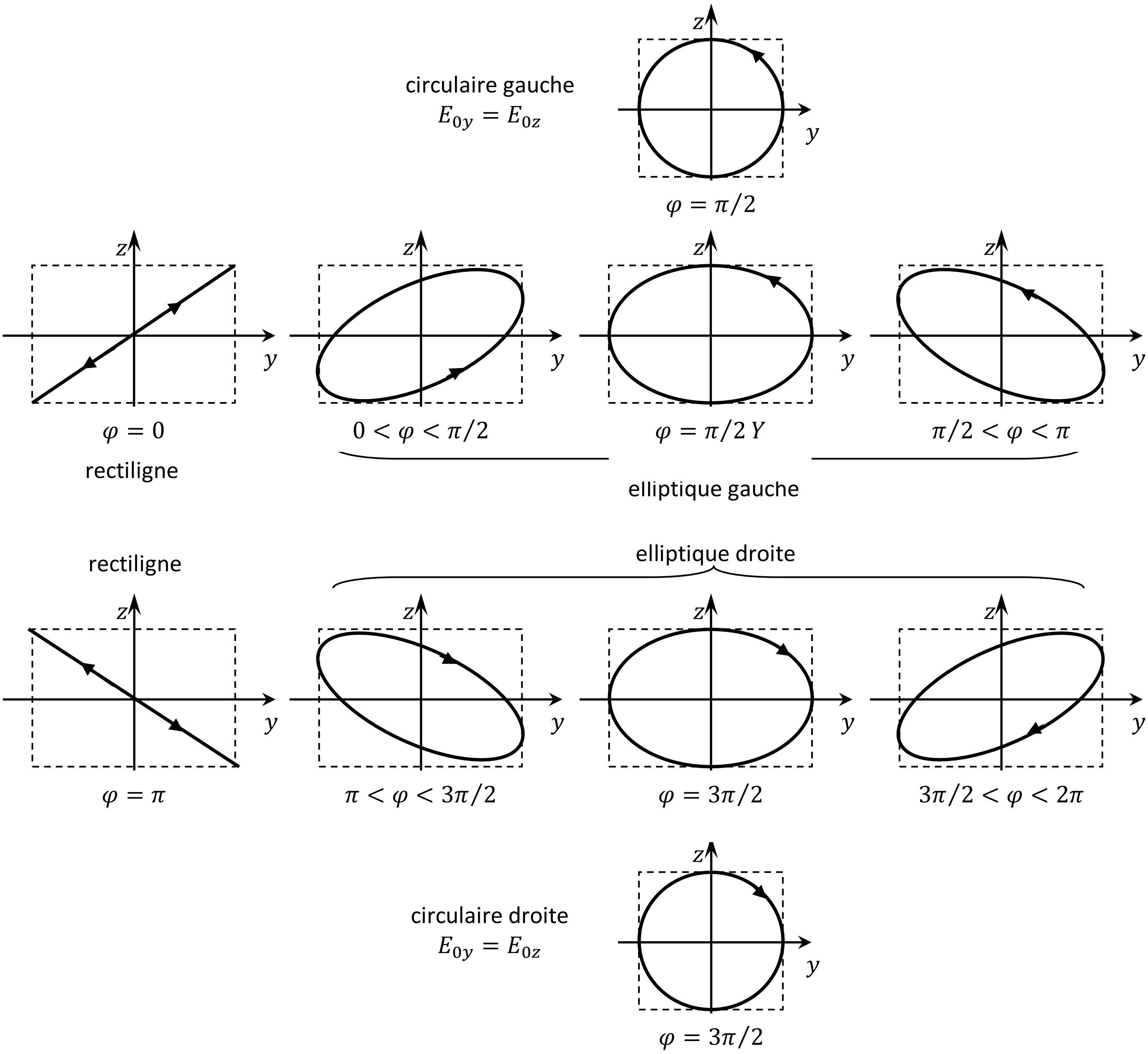


Figure 4. Différents états de polarisation

VI. NOTATION COMPLEXE

Dans le cas d'one onde électromagnétique plane progressive et monochromatique (OEPPM) se propageant suivant (Ox) dans le sens des x positifs.

$$\vec{E}\begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y}.\cos(kx-\omega t+\varphi_y) \\ E_{0z}.\cos(kx-\omega t+\varphi_z) \end{pmatrix}$$

Qui peut être écrit sous la forme

$$\vec{E} = E_{0y}.\cos(kx-\omega t+\varphi_y).\vec{e}_y + E_{0z}.\cos(kx-\omega t+\varphi_z).\vec{e}_z$$

Comme

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i.\sin(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \mathrm{Re}\{e^{i\alpha}\}$$

D'où

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\left\{E_{0y}.e^{i(kx-\omega t+\varphi_y)}.\vec{e}_y + E_{0z}.e^{i(kx-\omega t+\varphi_z)}.\vec{e}_z\right\}$$

Ou encore

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\{(E_{0y}.e^{i\varphi_y}.\vec{e}_y + E_{0z}.e^{i\varphi_z}.\vec{e}_z).e^{i(kx-\omega t)}\}$$

En posant

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0.e^{i(kx-\omega t)} \quad \text{avec} \quad \underline{\vec{E}}_0 = E_{0y}.e^{i\varphi_y}.\vec{e}_y + E_{0z}.e^{i\varphi_z}.\vec{e}_z$$

On a

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\{\underline{\vec{E}}\}$$

$\underline{\vec{E}}$ est le champ électrique complexe.

Dans le cas d'une onde OEPPM se propageant dans une direction donnée par le vecteur d'onde $\vec{k}$.

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0.\exp\{i(\vec{k}\bullet\vec{r}-\omega t)\} = \underline{\vec{E}}_0.\exp\{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)\}$$

Avec

$$\underline{\vec{E}}_0 = E_{0x}.e^{i\varphi_x}.\vec{e}_x + E_{0y}.e^{i\varphi_y}.\vec{e}_y + E_{0z}.e^{i\varphi_z}.\vec{e}_z$$

Et

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\{\underline{\vec{E}}\}$$

Remarques :

- La même notation peut être utilisée pour le vecteur champ magnétique.
- Seule la partie réelle du champ électrique complexe possède une signification physique.
- Le recours à la notation complexe a pour but de faciliter les calculs.
- Toutes les opérations linéaires des champs complexes restent valables pour leurs parties réelles (somme ; multiplication par un scalaire réel ; dérivées)

Calculons les dérivées du champ électrique complexe.

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = \underline{\vec{E}}_0 \frac{\partial}{\partial t}\{\exp\{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)\}\} = (-i\omega)\underline{\vec{E}}_0 . \exp\{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)\}$$

Donc

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = -i\omega . \underline{\vec{E}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial t} \equiv -i\omega \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2$$

De même que

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial x} = \underline{\vec{E}}_0 \frac{\partial}{\partial x}\{\exp\{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega . t)\}\} = (ik_x)\underline{\vec{E}}_0 . \exp\{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega . t)\}$$

Donc

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial x} = ik_x . \underline{\vec{E}} \quad ; \quad \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial y} = ik_y . \underline{\vec{E}} \quad ; \quad \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial z} = ik_z . \underline{\vec{E}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} \equiv ik_x \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} \equiv ik_y \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial z} \equiv ik_z$$

Alors nous pouvons écrire l'opérateur Nabla en coordonnées cartésiennes.

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \equiv i\vec{k}$$

Et les opérations :

$$div(\underline{\vec{E}}) = \vec{\nabla} \bullet \underline{\vec{E}} = i\vec{k} \bullet \underline{\vec{E}} \quad ; \quad \overrightarrow{rot}(\underline{\vec{E}}) = \vec{\nabla} \times \underline{\vec{E}} = i\vec{k} \times \underline{\vec{E}} \quad ; \quad \Delta\underline{\vec{E}} = -k^2 . \underline{\vec{E}}$$

En réécrivant les équations de Maxwell en notion complexe on trouve.

$$\begin{cases} div(\underline{\vec{E}}) = 0 & \Leftrightarrow \quad i\vec{k} \bullet \underline{\vec{E}} = 0 \quad \text{donc} \quad \underline{\vec{E}} \perp \vec{k} \\ div(\underline{\vec{B}}) = 0 & \Leftrightarrow \quad i\vec{k} \bullet \underline{\vec{B}} = 0 \quad \text{donc} \quad \underline{\vec{B}} \perp \vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{rot}(\underline{\vec{E}}) = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} & \Leftrightarrow \quad i\vec{k} \times \underline{\vec{E}} = i\omega . \underline{\vec{B}} \quad \text{donc} \quad \vec{n} \times \underline{\vec{E}} = c . \underline{\vec{B}} \\ \overrightarrow{rot}(\underline{\vec{B}}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} & \Leftrightarrow \quad i\vec{k} \times \underline{\vec{B}} = -\frac{i\omega}{c^2}\underline{\vec{E}} \quad \text{donc} \quad \vec{n} \times \underline{\vec{B}} = -\frac{1}{c}\underline{\vec{E}} \end{cases}$$

Les deux premières équations montrent directement que les champs électrique et magnétique sont transversaux, les deux dernières donnent les relations de structure de l'OEPPM.

Enfin, les champs électrique et magnétique complexes vérifient l'équation de propagation.

$\Delta\underline{\vec{E}} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \vec{0}$	$\Delta\underline{\vec{B}} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \underline{\vec{B}}}{\partial t^2} = \vec{0}$

VII. ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE – VECTEUR DE POYNTING

VII.1. DÉFINITION

On définit la densité volumique d'énergie électromagnétique par la somme des densités volumiques d'énergie électrique et magnétique.

$$\mathcal{E}_{\text{ém}} = \mathcal{E}_{\text{élec}} + \mathcal{E}_{\text{magn}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 . E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

On définit le vecteur de Poynting par :

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Calculons la divergence de ce vecteur.

$$div(\vec{P}) = \frac{1}{\mu_0} div(\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{B} \bullet \overrightarrow{rot}(\vec{E}) - \vec{E} \bullet \overrightarrow{rot}(\vec{B})\right)$$

Or, d'après les équations de Maxwell

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

D'où

$$div(\vec{P}) = -\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \bullet \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \varepsilon_0 \vec{E} \bullet \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{E} \bullet \vec{j} = -\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t} - \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial B^2}{\partial t} - \vec{E} \bullet \vec{j}$$

Et donc

$$div(\vec{P}) = -\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{ém}}}{\partial t} - \vec{E} \bullet \vec{j}$$

En absence de courants, l'équation précédente devient :

$$div(\vec{P}) = -\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{ém}}}{\partial t}$$

Dont la forme intégrale est obtenue en utilisant le théorème d'Ostrogradski.

$$\iiint_\tau div(\vec{P}) . d\tau = -\iiint_\tau \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{ém}}}{\partial t} d\tau = -\frac{d}{dt}\left\{\iiint_\tau \mathcal{E}_{\text{ém}} . d\tau\right\}$$

Les variables d'espace dans l'intégrale étant indépendantes du temps.

Mais puisque $\mathcal{E}_{\text{ém}}$ est la densité volumique d'énergie électromagnétique, alors :

$$\oiint_S \vec{P} \bullet d\vec{s} = -\frac{dU_{\text{ém}}}{dt}$$

Donc. *Le flux du champ de vecteur de Poynting $\vec{P}$ à travers une surface fermée S est égal à la variation en fonction du temps multipliée par le signe $(-)$ de l'énergie électromagnétique $U_{\text{ém}}$ contenue dans le volume τ délimité par la surface S.*

Ce résultat est connu sous le nom de ***théorème de Poynting***.

On remarque que pour un flux positif de $\vec{P}$ ($\vec{P}$ sortant par rapport à la surface) la variation de l'énergie électromagnétique est négative, donc, l'énergie diminue à l'intérieur du volume τ. Et pour un flux négatif de $\vec{P}$ ($\vec{P}$ rentrant par rapport à la surface) la variation de l'énergie électromagnétique est positive, donc, l'énergie augmente à l'intérieur du volume τ.

VII.2. DANS LE CAS D'UNE ONDE PLANE PROGRESSIVE

On a vu que dans le cas d'une onde plane progressive, la relation de structure d'une onde est donnée par :

$$\vec{n} \times \vec{E} = c.\vec{B}$$

$\vec{n}$ est le vecteur unitaire dans la direction de propagation. $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{n})$ forment un trièdre direct. La relation entre les modules des champs électrique et magnétique est déduite directement de la relation précédente :

$$E = c.B$$

D'où la densité volumique d'énergie électromagnétique pour une onde progressive.

$$\mathcal{E}_{\text{ém}} = \varepsilon_0.E^2 = \frac{1}{\mu_0}B^2$$

Et le vecteur de Poynting pour une onde progressive.

$$\vec{P} = \frac{E^2}{\mu_0 c}\vec{n} = \frac{c.B^2}{\mu_0}\vec{n}$$

On remarque que le vecteur de Poynting dans ce cas est toujours parallèle et dans le même sens que la direction de propagation.

Calculons l'énergie électromagnétique pénétrant à travers une surface S perpendiculaire à la direction de propagation. Pour ceci, écrivons le flux de $\vec{P}$ à travers un cylindre fermé, de longueur infinie, dont la base de section S est perpendiculaire à la direction de propagation.

$$\oiint_{S_{\text{totale}}} \vec{P} \bullet d\vec{s} = -\iint_S P.ds = -\frac{dU_{\text{ém}}}{dt}$$

Comme P est proportionnel au module du champ électrique, il est alors constant sur toute la surface S (onde plane). D'où :

$$\mathcal{P} = \frac{dU_{\text{ém}}}{dt} = P.S$$

$\mathcal{P}$ est la puissance instantanée rayonnée à travers la surface S.

L'énergie électromagnétique traversant la surface S durant un temps t est égale à :

$$U_{\text{ém}}(t) = \int_0^t \mathcal{P}.dt = \int_0^t P.S.dt$$

VII.3. DANS LE CAS D'UNE ONDE PLANE PROGRESSIVE MONOCHROMATIQUE

Dans le cas d'une OEPPM se propageant dans le sens des x croissants.

$$\vec{E} = E_{0y}.\cos(kx - \omega t + \varphi_y).\vec{e}_y + E_{0z}.\cos(kx - \omega t + \varphi_z).\vec{e}_z$$

Et le carré du module

$$E^2 = E_{0y}^2.\cos^2(kx - \omega t + \varphi_y) + E_{0z}^2.\cos^2(kx - \omega t + \varphi_z)$$

Le module du vecteur de Poynting pour cette onde est :

$$P = \frac{E_{0y}^2.\cos^2(kx - \omega t + \varphi_y) + E_{0z}^2.\cos^2(kx - \omega t + \varphi_z)}{\mu_0 c}$$

La valeur moyenne sur une période du module de $\vec{P}$ est définie par :

$$\langle P \rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T P(t).dt$$

D'où

$$\langle P \rangle_T = \frac{E_{0y}^2}{\mu_0 c}\langle\cos^2(kx - \omega t + \varphi_y)\rangle_T + \frac{E_{0z}^2}{\mu_0 c}\langle\cos^2(kx - \omega t + \varphi_z)\rangle_T$$

Comme $\langle\cos^2(kx - \omega t + \varphi)\rangle_T = 1/2$ alors :

$$\boxed{\langle P \rangle_T = \frac{E_{0y}^2 + E_{0z}^2}{2\mu_0 c}}$$

La puissance moyenne rayonnée à travers une surface S.

$$\boxed{\langle \mathcal{P} \rangle_T = \langle P \rangle_T.S = \frac{E_{0y}^2 + E_{0z}^2}{2\mu_0 c}S}$$

VIII. RÉFLEXION D'UNE OEPPM SUR UN CONDUCTEUR PARFAIT ONDES STATIONNAIRES

Soit une onde électromagnétique plane progressive et monochromatique se propageant suivant l'axe (Ox) dans le sens des x croissants. (Figure 5.)
Elle rencontre en $x = 0$ un plan conducteur parfait $\left(\vec{E}_{\text{intérieur}} = \vec{0}\right)$. Cette onde est appelée onde incidente.

$$\vec{E}_i = E_{0i}.\cos(kx - \omega t)\,.\,\vec{e}_y$$

L'onde réfléchie par le conducteur est une onde plane se propageant dans le sens des x décroissants.

$$\vec{E}_r = E_{0y}.\cos\left(k'x + \omega' t + \varphi_y\right).\,\vec{e}_y + E_{0z}.\cos(k'x + \omega' t + \varphi_z)\,.\,\vec{e}_z$$

Pour connaitre les valeurs des grandeurs de $\vec{E}_r$ utilisons les conditions aux limites du conducteur.

$$\vec{E}_{\text{total}}(x = 0) = \vec{E}_i(x = 0) + \vec{E}_r(x = 0) = \vec{0}$$

D'où

$$E_{0i}.\cos(\omega t)\,.\,\vec{e}_y = -E_{0y}.\cos\left(\omega' t + \varphi_y\right).\,\vec{e}_y - E_{0z}.\cos(\omega' t + \varphi_z)\,.\,\vec{e}_z$$

En comparant les deux termes, on trouve :

$$\begin{cases} E_{0i} = -E_{0y} = E_0 \\ E_{0z} = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \omega = \omega' \\ \varphi_y = 0 \end{cases}$$

D'autre part puisque l'onde réfléchie se propage dans le vide avec la même vitesse c.

$$k' = \frac{\omega'}{c} = \frac{\omega}{c} = k$$

D'où les expressions des champs électriques des ondes incidente et réfléchie.

$$\begin{cases} \vec{E}_i = E_0.\cos(kx - \omega t)\,.\,\vec{e}_y \\ \vec{E}_r = -E_0.\cos(kx + \omega t)\,.\,\vec{e}_y \end{cases}$$

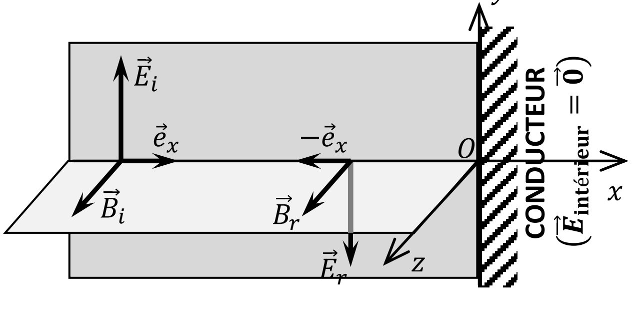
Les expressions des champs magnétiques des ondes incidente et refléchie s'obtiennent par la relation de structure de l'onde plane.

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{e}_x \times \vec{E}_i}{c} \qquad \text{et} \qquad \vec{B}_r = \frac{(-\vec{e}_x) \times \vec{E}_r}{c}$$

L'onde réfléchie se propageant dans la direction $(-\vec{e}_x)$, donc

$$\begin{cases} \vec{B}_i = \dfrac{E_0}{c}\cos(kx - \omega t)\,.\,\vec{e}_z \\ \vec{B}_r = \dfrac{E_0}{c}\cos(kx + \omega t)\,.\,\vec{e}_z \end{cases}$$

Figure 5.



Le champ électrique total résultant de la superposition des deux ondes est égal à la résultante des deux vecteurs.

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0.\{\cos(kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t)\}.\vec{e}_y$$

Comme

$$\cos(a) - \cos(b) = -2.\sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

On trouve

$$\vec{E} = 2E_0.\sin(kx)\,.\sin(\omega t)\,.\vec{e}_y$$

Et le champ magnétique total résultant de la superposition des deux ondes est égal à la résultante des deux vecteurs.

$$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{E_0}{c}\{\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)\}.\vec{e}_z$$

Comme

$$\cos(a) + \cos(b) = 2.\cos\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

On trouve

$$\vec{B} = \frac{2E_0}{c}\cos(kx)\,.\cos(\omega t)\,.\vec{e}_z$$

Donc $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ont une structure d'onde stationnaire.

<u>Plans nodaux de $\vec{E}$:</u>

L'amplitude de $\vec{E}$ est nulle si l'amplitude $(2E_0.\sin(kx) = 0)$ c'est-à-dire

$$kx = n\pi \quad (\text{avec} \quad n \in \mathbb{Z}) \qquad \text{ou} \qquad x = 2n\frac{\lambda}{4}$$

<u>Plans ventraux de $\vec{E}$:</u>

L'amplitude de $\vec{E}$ est maximale si $(2E_0.\sin(kx) = \pm 2E_0)$ c'est-à-dire

$$kx = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad (\text{avec} \quad n \in \mathbb{Z}) \qquad \text{ou} \qquad x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

<u>Plans nodaux de $\vec{B}$:</u>

L'amplitude de $\vec{B}$ est nulle si $(2E_0/c\,.\cos(kx) = 0)$ c'est-à-dire

$$kx = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad (\text{avec} \quad n \in \mathbb{Z}) \qquad \text{ou} \qquad x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

<u>Plans ventraux de $\vec{B}$:</u>

L'amplitude de $\vec{B}$ est maximale si $(2E_0/c\,.\cos(kx) = \pm\,2E_0/c)$ c'est-à-dire

$$kx = n\pi \quad (\text{avec} \quad n \in \mathbb{Z}) \qquad \text{ou} \qquad x = 2n\frac{\lambda}{4}$$

<u>Déphasage entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$:</u>

D'après les positions des plans nodaux et ventraux des deux champs, on remarque que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en *quadrature de phase*. (déphasage : $\Delta\phi = \pi/2$)

Vecteur de Poynting de l'onde stationnaire

On sait que :

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Donc

$$\vec{P} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \cos(kx) \,.\, \sin(kx) \,.\, \cos(\omega t) \,.\, \sin(\omega t) \,.\, \vec{e}_x$$

Et le module du vecteur de Poynting.

$$P = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin(2kx) \,.\, \sin(2\omega t)$$

Et la valeur moyenne du module du vecteur de Poynting sur une période est nulle.

$$\langle \sin(2\omega t) \rangle_T = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \langle P \rangle_T = 0$$

Donc, il n'y a pas de propagation de l'énergie électromagnétique.

On dit que l'onde stationnaire ne transporte pas d'énergie électromagnétique.