SOLUTION DE LA SÉRIE DE TD N° 02

EXERCICE 01 :

1. Nature du mouvement.

Coureur A	$0 \leq t \leq 120\ s$	Mouvement rectiligne uniformément accéléré	$a_A = \dfrac{6}{120} = 0{,}05\ m/s^2 = \text{Cte}$
	$120 \leq t \leq 240\ s$	Mouvement rectiligne uniforme	$V_A = 6\ m/s = \text{Cte}$
Coureur B	$0 \leq t \leq 40\ s$	Mouvement rectiligne uniformément accéléré	$a_B = \dfrac{4}{40} = 0{,}1\ m/s^2 = \text{Cte}$
	$t \geq 40\ s$	Mouvement rectiligne uniforme	$V_B = 4\ m/s = \text{Cte}$

2. Les deux coureurs ont la même vitesse à $(t = t_1)$ Point d'intersection des deux diagrammes.

$$V_A(t_1) = V_B(t_1) = 4\ m/s \quad \Rightarrow \quad \tan(\alpha) = \frac{4}{t_1} = \frac{6}{120} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_1 = 80\ s}$$

La distance qui sépare les deux coureurs. $D_1 = |x_A(t_1) - x_B(t_1)|$

La position à un instant t est calculée par l'aire sous le diagramme des vitesses $(x_A(0) - x_B(0) = 0)$ entre les instants $t_0 = 0\ s$ et t.

$$x_A(t_1) = \frac{V_A(t_1) \times t_1}{2} = \frac{4 \times 80}{2} = 160\ m \quad \text{et} \quad x_B(t_1) = \frac{V_B(t_1) \times [(t_1 - 40) + t_1]}{2} = \frac{4 \times (80 + 40)}{2} = 240\ m$$

D'où, *le coureur B est en avance sur le coureur A* et la distance qui les séparent est :

$$\boxed{D_1 = |x_A(t_1) - x_B(t_1)| = 80\ m}$$

3. $t_2 = 120\ s$:

$$x_A(t_2) = \frac{V_A(t_2) \times t_2}{2} = \frac{6 \times 120}{2} = 360\ m \quad \text{et} \quad x_B(t_2) = \frac{V_B(t_2) \times [(t_2 - 40) + t_2]}{2} = \frac{4 \times (80 + 40)}{2} = 400\ m$$

D'où, *le coureur B est en avance sur le coureur A* et la distance qui les séparent est :

$$\boxed{D_2 = |x_A(t_2) - x_B(t_2)| = 40\ m}$$

4. Puisque le coureur A n'a pas encore rattrapé le coureur B à $(t = t_2)$, alors l'instant où les deux coureurs sont côte à côte est $(t_3 > t_2)$.

$$x_A(t_3) = \frac{V_A(t_3) \times [(t_3 - 120) + t_3]}{2} = 6.t_3 - 360 \quad \text{et} \quad x_B(t_3) = \frac{V_B(t_3) \times [(t_3 - 40) + t_3]}{2} = 4.t_3 - 80$$

Les deux coureurs sont côte à côte : $x_A(t_3) = x_B(t_3) \quad \Rightarrow \quad 6.t_3 - 360 = 4.t_3 - 80 \quad \Rightarrow \quad t_3 = 140\ s$

5. $t_4 = 240\ s$: La longueur de la piste est

$$L = x_A(t_4) = \frac{V_A(t_4) \times [(t_4 - 120) + t_4]}{2} = \frac{6 \times (120 + 240)}{2} \quad \Rightarrow \quad L = 1080\ m$$

Le coureur B atteint la ligne d'arrivée à $(t = t_5) \quad \Rightarrow \quad x_B(t_5) = L$. Donc :

$$x_B(t_5) = \frac{V_B(t_5) \times [(t_5 - 40) + t_5]}{2} = 4.t_5 - 80 = 1080 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_5 = 290\ s}$$

EXERCICE 02 :

1. Equation horaires des trois étapes ***(en considérant l'origine des temps et des espaces au début de chaque étape)***

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}a_1.t^2 \\ V_1(t) = x^{\bullet} = a_1.t \\ a_1(t) = x^{\bullet\bullet} = a_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2(t) = V.t \\ V_2(t) = V \\ a_2(t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3(t) = -\frac{1}{2}a_1.t^2 + V.t \\ V_3(t) = -a_1.t + V \\ a_3(t) = -a_1 \end{cases}$$

Les trois étapes ont la même durée $\Rightarrow$ $t_1 = t_2 = t_3 = T$

La distance totale parcourue est : $X_1 + X_2 + X_3 = X$

En remplaçant dans l'équation horaire du mouvement

$$\frac{1}{2}a_1.t^2 + V.t + \left(-\frac{1}{2}a_1.t^2 + V.t\right) = X \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{X}{2V}$$

D'autre part $V_1(t) = a_1.t$ et quand $t = t_1 = T$ alors $V_1(T) = a_1.T = V$ $\Rightarrow$ $T = V/a_1$

En comparant les deux équations on obtient

$$\frac{X}{2V} = \frac{V}{a_1} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a_1 = \frac{2.V^2}{X}}$$

Application numérique : $V = 270\ km/h = 75\ m/s$ et $X = 3\ km = 3000\ m$

$$\boxed{a_1 = 3{,}75\ m/s^2} \quad \text{et} \quad \boxed{t_1 = t_2 = t_3 = T = 20\ s}$$

2. La distance parcourue à chaque étape

$$\boxed{\begin{cases} X_1 = \frac{1}{2}a_1.T^2 = 750\ m \\ X_2 = V.T = 1500\ m \\ X_3 = -\frac{1}{2}a_1.T^2 + V.T = 750\ m \end{cases}}$$

3. Les équations horaires du mouvement ***(en considérant l'origine des espaces au début du mouvement du train)***:

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}a_1.t^2 + x_1(0) = 1{,}875.t^2 \\ x_2(t) = V.t + x_2(0) = 75.t + 750 \\ x_3(t) = -\frac{1}{2}a_1.t^2 + V.t + x_3(0) = -1{,}875.t^2 + 75.t + 2250 \end{cases}$$

EXERCICE 03 :

1.

$$\begin{cases} x_C(t) = V.t + x_{0C} \\ x_V(t) = \frac{1}{2}a_V.t^2 + V_{0V}.t + x_{0V} \end{cases}$$

En appliquant les conditions initiales il vient que :

$$\begin{cases} x_C(t) = V.t & \text{Mouvement rectiligne uniforme} \\ x_V(t) = \frac{1}{2}a.t^2 + d & \text{Mouvement rectiligne uniformément accéléré} \end{cases}$$

2. Le cycliste rattrape la voiture : $x_C(t) = x_V(t)$

$$\frac{1}{2}a.t^2 - V.t + d = 0$$

pour que cette équation puisse avoir des solutions réelles, il faut que :

$$\Delta = V^2 - 4\frac{1}{2}a.d \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d \leq \frac{V^2}{2.a}}$$

3. Les temps de rencontres sont donnés par les solutions de l'équation, c'est-à-dire :

$$t_1 = \frac{V - \sqrt{\Delta}}{a} \qquad \text{et} \qquad t_2 = \frac{V + \sqrt{\Delta}}{a}$$

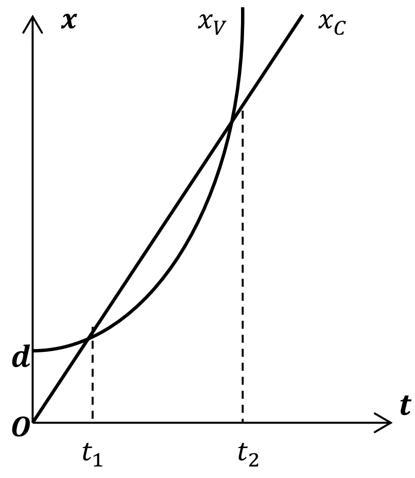
le cycliste rattrape la voiture en $(t = t_1)$ car $(t_1 < t_2)$ donc :

$$\boxed{t_1 = \frac{V - \sqrt{V^2 - 2.a.d}}{a}}$$

4. Discussion des diagrammes des espaces :

Cas général $\Delta > 0$

- $0 \leq t < t_1 \Rightarrow x_C < x_V$: La voiture est devant le cycliste.
- $t = t_1 \Rightarrow x_C = x_V$: Le cycliste *rattrape* la voiture.
- $t_1 < t < t_2 \Rightarrow x_C > x_V$: Le cycliste *dépasse* la voiture.
- $t = t_2 \Rightarrow x_C = x_V$: La voiture *rattrape* le cycliste.
- $t > t_2 \Rightarrow x_C < x_V$: La voiture *dépasse* le cycliste.



Cas particulier $\Delta = 0$ l'équation admet une solution
Dans ce cas le cycliste rattrape la voiture, mais ne peut pas la dépasser.

5. A.N. : Les temps de rencontres pour : $d = 10\,m,\ a = 2\ m/s^2\ ,\ V = 36\ km/h = 10\ m/s$

$$\Delta = V^2 - 2a.d = 60 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_1 = 1{,}13\ s} \qquad \text{et} \qquad \boxed{t_2 = 8{,}87\ s}$$

EXERCICE 04 :

$$V(t) = 5\pi.\cos\left[\pi\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]$$

1. Equation du mouvement :

$$x(t) = \int V(t).dt = 5\pi.\int \cos\left[\pi\left(t+\tfrac{1}{2}\right)\right].dt \quad \text{donc} \quad x(t) = 5.\sin\left[\pi\left(t+\tfrac{1}{2}\right)\right] + K$$

K est une constante d'intégration

Conditions initiales : $(t = 0, x(0) = 5)$

D'où $\quad x(0) = 5 + K = 5$ et $K = 0$

Alors

$$\boxed{x(t) = 5.\sin\left[\pi\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]}$$

2. La forme générale $x(t) = x_0.\sin(\omega.t + \varphi)$ donc, en comparant avec l'équation précédente nous trouvons :

- $x_0 = 5\ m$
- $\omega = \pi = 3{,}14\ rad/s$
- $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2s$
- $\nu = \frac{1}{T} = 0.5\ Hz$
- $\varphi = \frac{\pi}{2}\ rad$

3. Accélération

$$\boxed{a(t) = \frac{dV(t)}{dt} = -5\pi^2.\sin\left[\pi\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]}$$

4. $0 \le t \le T$ donc $0 \le t \le 2\ s$:

$$V(t) = 0 \Rightarrow \cos\left[\pi\left(t+\frac{1}{2}\right)\right] = 0 \Rightarrow \pi\left(t+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + n.\pi \Rightarrow \boxed{t = n} \quad (n \text{ entier naturel})$$

$$a(t) = 0 \Rightarrow \sin\left[\pi\left(t+\frac{1}{2}\right)\right] = 0 \Rightarrow \pi\left(t+\frac{1}{2}\right) = n.\pi \Rightarrow \boxed{t = n + \frac{1}{2}} \quad (n \text{ entier naturel})$$

D'où le tableau suivant :

t	0 — 0,5	0,5 — 1	1 — 1,5	1,5 — 2
$V(t)$	−	−	+	+
$a(t)$	−	+	+	−
Nature du mouvement	accéléré	décéléré	accéléré	décéléré

EXERCICE 05 :

1. Calcul des vitesses.

$t \in [0,10]\ s$; $a_1 = 3\ m/s^2 = \text{Constante}$ $\Rightarrow$ le mouvement est rectiligne uniformément varié.

$$V(10) - V(0) = \int_0^{10} a_1 . dt = [3.t]_0^{10} \quad \Rightarrow \quad V(10) - V(0) = 30$$

Comme $V(0) = 0$ donc $\boxed{V(10) = 30\ m/s}$

$t \in [10,20]\ s$; $a_2 = 0$ $\Rightarrow$ le mouvement est rectiligne uniforme.

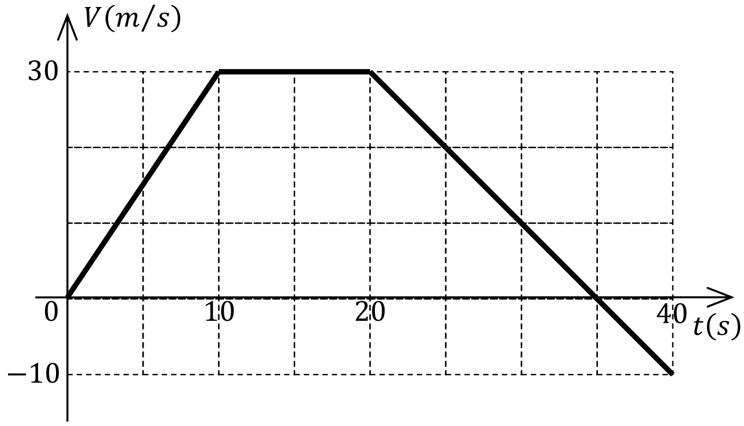
$$V(20) - V(10) = \int_{10}^{20} a_2 . dt = [C]_{10}^{20} \quad \Rightarrow \quad V(20) - V(10) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(20) = 30\ m/s}$$

$t \in [20,40]\ s$; $a_3 = -2\ m/s^2 = \text{Constante}$ $\Rightarrow$ le mouvement est rectiligne uniformément varié.

$$V(40) - V(20) = \int_{20}^{40} a_3 . dt = [-2.t]_{20}^{40} \quad \Rightarrow \quad V(40) - V(20) = -40$$

Comme $V(20) = 30\ m/s$ donc $\boxed{V(40) = -10\ m/s}$

2.



3. Mouvement accéléré-décéléré.

Durant la troisième étape la vitesse s'annule. $V_3(t'') = a_3.t'' + V_{03} = -2.t'' + 30$

$$V_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t'' = 15\ s \quad \text{et} \quad t = t'' + 20 = 35\ s$$

D'où

$0 \le t \le 10\ s$	$V_1(t) > 0$	$a_1 > 0$	Le mouvement est accéléré
$10 \le t \le 20\ s$	$V_2(t) = \text{Constante}$	$a_2 = 0$	Le mouvement est uniforme
$20 \le t \le 35\ s$	$V_3(t) > 0$	$a_3 < 0$	Le mouvement est décéléré
$35 \le t \le 40\ s$	$V_3(t) < 0$	$a_3 < 0$	Le mouvement est accéléré

4. Expression de la vitesse en fonction du temps $V(t)$.

$0 \le t \le 10\ s$	$V_1(t) = a_1.t + V_{01}$	$V_1(t) = 3.t$
$10 \le t \le 20\ s$	$V_2(t') = V_{02} = \text{Constante}$	$V_2(t') = 30$
$20 \le t \le 40\ s$	$V_3(t'') = a_3.t'' + V_{03}$	$V_3(t'') = -2.t'' + 30$

5. Equation horaire du mouvement $x(t)$.

Calcul des positions au début de chaque étape.

$x_{01} = x(0) = 0$ le point matériel se trouve à l'origine des coordonnées.

$x_{02} = x(10)$ avec $x(10) - x(0) = \dfrac{10 \times 30}{2} \Rightarrow x_{02} = x(10) = 150\ m$

$x_{03} = x(20)$ avec $x(20) - x(0) = \dfrac{\big(20 + (20 - 10)\big) \times 30}{2} \Rightarrow x_{03} = x(20) = 450\ m$

D'où le tableau

$0 \le t \le 10\ s$	$x_1(t) = \frac{3}{2} t^2$	$t = t$	$x_1(t) = \frac{3}{2} t^2$
$10 \le t \le 20\ s$	$x_2(t') = 30.t' + 150$	$t' = t - 10$	$x_2(t) = 30.(t - 10) + 150$
$20 \le t \le 40\ s$	$x_3(t'') = -t''^2 + 30.t'' + 45($	$t'' = t - 20$	$x_3(t) = -(t - 20)^2 + 30.(t - 20) + 450$

6. Le déplacement du mobile entre les instants $t = 0$ et $t = 40\ s$.

$$x(40) - x(0) = \frac{\big(35 + (20 - 10)\big) \times 30}{2} + \frac{(40 - 35) \times (-10)}{2} \Rightarrow \boxed{x(40) - x(0) = 650\ m}$$

<u>EXERCICE 06 :</u>

1. $V = A.x + B$ Unités : $[V] = m/s$, $[x] = m \Rightarrow [A] = 1/s$ et $[B] = m/s$.

2. $A > 0$, $B > 0$ $et\ x_0 = 0 \Rightarrow V_0 = B > 0$ d'où x augmente , donc x est toujours positif

3.

$$V = \frac{dx}{dt} = A.x + B \Rightarrow \frac{dx}{A.x + B} = dt$$

En intégrant

$$\ln(A.x + B) = A.t + \text{Cte}$$

Conditions initiales : $(t = 0\ s\ ,\ x_0 = 0\ m) \Rightarrow \text{Cte} = \ln(B)$

En remplaçant

$$A.x + B = B.e^{A.t} \Rightarrow \boxed{x = \frac{B}{A}(e^{A.t} - 1)}$$

4.

$$\boxed{V = \frac{dx}{dt} = B.e^{A.t}} \quad \text{et} \quad \boxed{a = \frac{dV}{dt} = A.B.e^{A.t}}$$

5. $V.a = A.B^2.e^{2A.t} > 0 \Rightarrow$ Le mouvement est toujours accéléré (quelque soit la position x).

EXERCICE 07:

1. Montrons que la solution de l'équation différentielle $\vec{a} = -k.V^2.\vec{e}_x$ est de la forme

$$V(t) = \frac{V_0}{1 + kV_0.t}$$

$$V(t) = \frac{V_0}{1 + kV_0.t} \qquad \Rightarrow \qquad V^2 = \frac{V_0^2}{(1 + kV_0.t)^2}$$

Et

$$a(t) = \frac{dV}{dt} = \frac{-k.V_0^2}{(1 + kV_0.t)^2}$$

En comparant

$$a = -k.V^2 \qquad \text{et} \qquad \vec{a} = -k.V^2.\vec{e}_x$$

2. $x(t) = \int V(t).dt$

$$x(t) = \int \frac{V_0}{1 + kV_0.t} dt = \frac{1}{k} \int \frac{kV_0}{1 + kV_0.t} dt$$

Donc

$$x(t) = \int \frac{V_0}{1 + kV_0.t} dt = \frac{1}{k} \ln(1 + kV_0.t) + C$$

En prenant les conditions initiales $(t_0 = 0, x_0 = 0)$, on trouve $x_0 = \frac{1}{k}\ln(1 + kV_0.t_0) + C \quad \Rightarrow \quad C = 0$

D'où

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{k} \ln(1 + kV_0.t)}$$

3.

$$x(t) = \frac{1}{k} \ln(1 + kV_0.t) \qquad \Rightarrow \qquad 1 + kV_0.t = \exp(k.x)$$

Comme

$$V(t) = \frac{V_0}{1 + kV_0.t} = \frac{V_0}{\exp(k.x)}$$

Finalement

$$\boxed{V = V_0.e^{-k.x}}$$

EXERCICE 08 :

$$a - \omega^2 x = 0$$

1. Montrons que : $x(t) = A.e^{\omega t} + B.e^{-\omega t}$ est une solution de cette équation différentielle.

Calculons les dérivées première et seconde.

$$\begin{cases} x(t) = A.e^{\omega t} + B.e^{-\omega t} \\ V(t) = x^{\bullet} = A\omega.e^{\omega t} - B\omega.e^{-\omega t} \\ a(t) = x^{\bullet\bullet} = A\omega^2.e^{\omega t} - B\omega^2.e^{-\omega t} \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

D'où

$$a(t) = \omega^2(A.e^{\omega t} - B.e^{-\omega t}) = \omega^2 x(t)$$

Finalement

$$a - \omega^2 x = 0$$

2. Unité : Puisque $[a] = m/s^2$ et $[x] = m$ $\Rightarrow$ $\boxed{[\omega] = 1/s}$

3. Conditions initiales : $x(0) = x_0$ et $V(0) = 0$. En remplaçant dans les équations (1).

$$\begin{cases} x_0 = A + B \\ 0 = A - B \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{A = B = \frac{x_0}{2}}$$

4. En remplaçant dans l'équation (1).

$$\boxed{x(t) = \frac{x_0}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = x_0.ch(\omega t)}$$

Et en dérivant.

$$\boxed{V(t) = x_0\omega.sh(\omega t)}$$

Et

$$\boxed{a(t) = x_0\omega^2.ch(\omega t)}$$

5. Pour $t \geq 0$ $\Rightarrow$ $\omega t \geq 0$ nous avons $sh(\omega t) \geq 0$ et $ch(\omega t) \geq 0$ .Donc

$$V(t).a(t) \geq 0$$

Le mouvement est toujours accéléré pour $t \geq 0$.

6. Nous avons $x^2 = x_0^2.ch^2(\omega t)$ et $V^2 = x_0^2\omega^2.sh^2(\omega t)$.

Mais puisque $ch^2(\omega t) - sh^2(\omega t) = 1$ $\Rightarrow$ $sh^2(\omega t) = ch^2(\omega t) - 1$.

En remplaçant dans l'expression de V^2 on trouve :

$$V^2 = x_0^2\omega^2.ch^2(\omega t) - x_0^2\omega^2$$

Et

$$V^2 = \omega^2.x^2 - x_0^2\omega^2 = \alpha.x^2 + \beta$$

Avec

$$\boxed{\alpha = \omega^2} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\beta = -x_0^2\omega^2}$$

EXERCICE 09 :

1. $\vec{a} = \vec{g}$ en projetant sur les axes (OX) et (OY) on trouve

$$\begin{cases} a_x = g \\ a_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x = g.t + V_{0x} = g.t \\ V_y = V_{0y} = V_0 \end{cases}$$

D'où les équations horaires :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}g.t^2 + x_0 = \frac{1}{2}g.t^2 \\ y = V_0.t + y_0 = V_0.t \end{cases}$$

2. En remplaçant $t = y/V_0$ on obtient l'équation de la trajectoire

$$\boxed{x = \left(\frac{g}{2V_0^2}\right).y^2}$$

3. Calcul de a_T et a_N .

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{g^2t^2 + V_0^2}$$

$$a_T = \frac{dV}{dt} = \frac{g^2.t}{\sqrt{g^2t^2 + V_0^2}} \quad \text{et} \quad a_N = \frac{V^2}{\rho} = \frac{g^2t^2 + V_0^2}{\rho}$$

D'autre part on a :

$$a^2 = g^2 = a_T^2 + a_N^2$$

En remplaçant

$$\frac{g^4.t^2}{V^2} + \frac{V^4}{\rho^2} = g^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{V^4}{\rho^2} = \frac{g^2(V^2 - g^2t^2)}{V^2} = \frac{g^2.V_0^2}{V^2}$$

Or

$$V_0 = V.\cos\theta \quad \text{ou} \quad V = \frac{V_0}{\cos\theta}$$

Donc

$$\rho^2 = \frac{V^6}{g^2.V_0^2} = \frac{V_0^4}{g^2.\cos^6\theta}$$

Finalement

$$\boxed{\rho = \frac{V_0^2}{g.\cos^3\theta}}$$

EXERCICE 10 :

$$x(t) = R.\omega.t - R.\sin(\omega.t) \quad ; \quad y(t) = R - R.\cos(\omega.t) \quad \text{avec} \quad 0 \leq t \leq 2\pi/\omega$$

1. Unités : $[\omega.t] = [\omega].[t] = rad \quad \Rightarrow \quad \boxed{[\omega] = rad/s}$

$$\boxed{[R] = [x] = [y] = \text{mètre}}$$

2. Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes : $\vec{V} = x^{\bullet}(t).\vec{e}_x + y^{\bullet}(t).\vec{e}_y$

En dérivant

$$\vec{V} = R\omega - R\omega.\cos(\omega.t)\,.\vec{e}_x + R\omega.\sin(\omega.t)\,.\vec{e}_y$$

Ou

$$\boxed{\vec{V} = R\omega\left[(1-\cos(\omega.t)).\vec{e}_x + \sin(\omega.t)\,.\vec{e}_y\right]}$$

3. Module de la vitesse. (R et ω sont des <u>constantes positives</u>.)

$$V = \left|\vec{V}\right| = R\omega\sqrt{(1-\cos(\omega.t))^2 + \sin^2(\omega.t)}$$

D'où

$$V = R\omega\sqrt{1 - 2\cos(\omega.t) + \cos^2(\omega.t) + \sin^2(\omega.t)} = R\omega\sqrt{2(1-\cos(\omega.t))}$$

Comme

$$1 - \cos(\alpha) = 2.\sin^2(\alpha/2)$$

Alors

$$V = R\omega\sqrt{4.\sin^2\left(\frac{\omega.t}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = 2.R\omega.\sin\left(\frac{\omega.t}{2}\right)}$$

4. Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes : $\vec{a} = x^{\bullet\bullet}(t).\vec{e}_x + y^{\bullet\bullet}(t).\vec{e}_y$

En dérivant

$$\boxed{\vec{a} = R\omega^2.\sin(\omega.t)\,.\vec{e}_x + R\omega^2.\cos(\omega.t)\,.\vec{e}_y}$$

Et son module

$$a = |\vec{a}| = R\omega^2\sqrt{(\sin(\omega.t))^2 + (\cos(\omega.t))^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = R\omega^2}$$

5. Accélération tangentielle :

$$a_T = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}2.R\omega.\sin\left(\frac{\omega.t}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_T = R\omega^2.\cos\left(\frac{\omega.t}{2}\right)}$$

Accélération normale

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 \quad \Rightarrow \quad a_N^2 = a^2 - a_T^2 = R^2\omega^4\left(1 - \cos^2\left(\frac{\omega.t}{2}\right)\right)$$

Et

$$a_N^2 = R^2\omega^4.\sin^2\left(\frac{\omega.t}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_N = R\omega^2.\sin\left(\frac{\omega.t}{2}\right)}$$

6. Rayon de courbure :

$$a_N = \frac{V^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{V^2}{a_N} = \frac{4.R^2\omega^2.\sin^2\left(\frac{\omega.t}{2}\right)}{R\omega^2.\sin\left(\frac{\omega.t}{2}\right)}$$

D'où

$$\boxed{\rho = 4R.\sin\left(\frac{\omega.t}{2}\right)}$$

EXERCICE 11 :

pour $x \in [0, d]$ $\quad a_x(t) = 0 \quad ; \quad a_y(t) = a_0 =$ constante

1. Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes :

$V(t) = \int a(t).dt$ avec les conditions initiales $V_x(t=0) = V_0 \quad ; V_y(t=0) = 0$

$$\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = a_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x(t) = V_{0x} \\ V_y(t) = a_0.t + V_{0y} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} V_x(t) = V_0 \\ V_y(t) = a_0.t \end{cases}}$$

2. Equations horaires

$x(t) = \int V_x(t).dt$ et $y(t) = \int V_y(t).dt$ avec les conditions initiales $x(t=0) = y(t=0) = 0$

$$\begin{cases} V_x(t) = V_0 \\ V_y(t) = a_0.t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = V_0.t + x_0 \\ y(t) = \frac{1}{2}a_0.t^2 + y_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x(t) = V_0.t \\ y(t) = \frac{1}{2}a_0.t^2 \end{cases}}$$

Equation de la trajectoire

$$t = \frac{x}{V_0} \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{a_0}{2V_0^2}x^2}$$

3. Coordonnées du point limite $x_1 = d$.

$$x_1 = d \Rightarrow \boxed{y_1 = \frac{a_0 d^2}{2V_0^2}} \quad \text{et} \quad t_1 = \frac{d}{V_0}$$

En remplaçant t_1 dans les composantes de la vitesse

$$\boxed{V_{1x} = V_0} \quad \text{et} \quad \boxed{V_{1y} = \frac{a_0 d}{V_0}}$$

pour $x \in [d, 2d]$ $\quad a_x(t) = 0 \quad ; \quad a_y(t) = 0$

4. $\vec{a} = \vec{0}$ le mouvement est donc rectiligne uniforme.
5. Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes :

$V(t) = \int a(t).dt$ avec les conditions initiales $V_x(t'=0) = V_{1x} = V_0 \quad ; V_y(t'=0) = V_{1y} = a_0 d/V_0$

$$\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x(t') = V_{1x} \\ V_y(t') = V_{1y} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} V_x(t') = V_0 \\ V_y(t') = a_0 d/V_0 \end{cases}}$$

Equations horaires

$$x(t') = \int V_x(t').dt' \quad \text{et} \quad y(t') = \int V_y(t').dt'$$

avec les conditions initiales $x(t'=0) = x_1 = d$ et $y(t'=0) = y_1 = a_0 d^2/2V_0^2$

$$\begin{cases} V_x(t') = V_0 \\ V_y(t') = \frac{a_0 d}{V_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t') = V_0.t' + x_0 \\ y(t') = \frac{a_0 d}{V_0}t' + y_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x(t') = V_0.t' + d \\ y(t') = \frac{a_0 d}{V_0}t' + \frac{a_0 d^2}{2V_0^2} \end{cases}}$$

Equation de la trajectoire

$$t' = \frac{x-d}{V_0} \Rightarrow y(x) = \frac{a_0 d}{V_0}\left(\frac{x-d}{V_0}\right) + \frac{a_0 d^2}{2V_0^2} \quad \text{donc} \quad \boxed{y(x) = \frac{a_0 d}{V_0^2}x - \frac{a_0 d^2}{2V_0^2}}$$

6. Coordonnées du point limite $x_2 = 2d$.

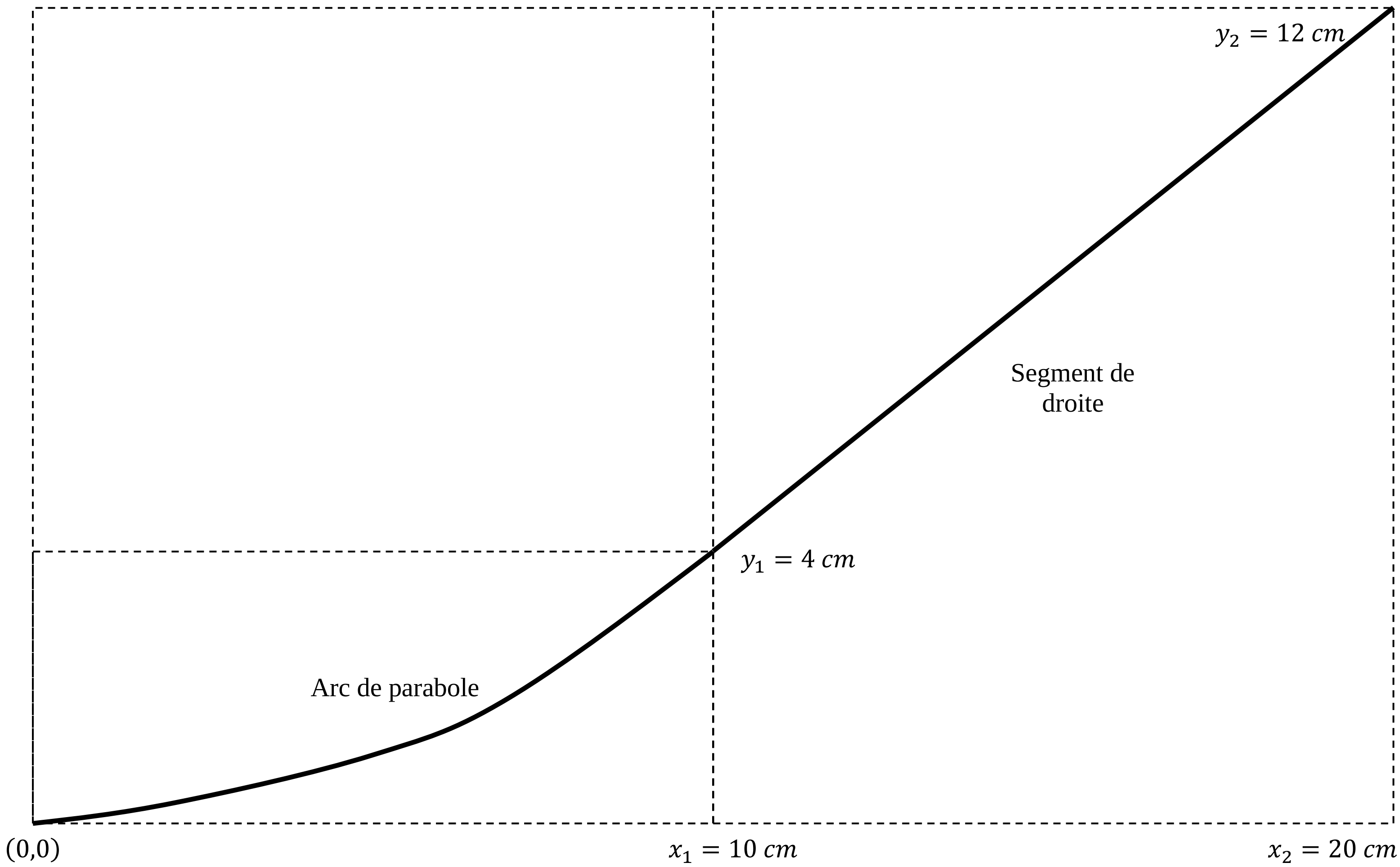
$$x_2 = 2d \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{y_2 = \frac{3}{2}\frac{a_0 d^2}{V_0^2}}$$

7. $V_0 = 2 \times 10^6 \ m/s$, $d = 10 \ cm$ et $y_2 = 12 \ cm$

$$y_2 = \frac{3}{2}\frac{a_0 d^2}{V_0^2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a_0 = \frac{2}{3}\frac{y_2 . V_0^2}{d^2}} \qquad \text{A.N.} \qquad \boxed{a_0 = 3{,}2 \times 10^{13} \ \frac{m}{s^2}}$$

8. Représentation

$$y_1 = \frac{a_0 d^2}{2V_0^2} \qquad \text{et} \qquad y_2 = \frac{3}{2}\frac{a_0 d^2}{V_0^2} = 3y_1 \qquad \Rightarrow \qquad y_1 = \frac{y_2}{3} = 4 \ cm$$



C'est le mouvement d'un électron dans un tube cathodique ; rayons cathodiques ; expérience de J.J. Thomson.

EXERCICE 12 :

$$\begin{cases} r(t) = R = \text{Constante} \\ \theta(t) = \alpha.\ln(1+\beta.t) \end{cases}$$

1. Unités : $[\alpha] = radian$ et $[\beta] = 1/seconde.$

2.

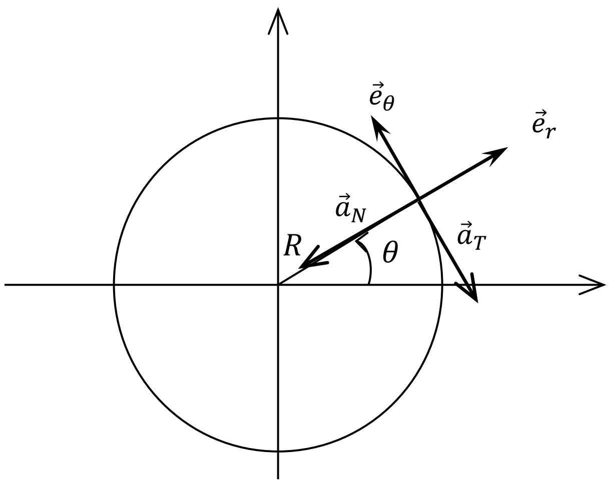
$$\vec{V} = r^{\bullet}.\vec{e}_r + r.\theta^{\bullet}.\vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} V_r(t) = r^{\bullet} = 0 \\ V_\theta(t) = r.\theta^{\bullet} = \dfrac{R.\alpha\beta}{1+\beta.t} \end{cases}}$$

3.

$$\vec{a} = \left(r^{\bullet\bullet} - r.\theta^{\bullet 2}\right)\vec{e}_r + (2.r^{\bullet}\theta^{\bullet} + r.\theta^{\bullet\bullet})\vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} a_r(t) = r^{\bullet\bullet} - r.\theta^{\bullet 2} = -\dfrac{R.\alpha^2\beta^2}{(1+\beta.t)^2} \\ a_\theta(t) = 2.r^{\bullet}\theta^{\bullet} + r.\theta^{\bullet\bullet} = -\dfrac{R.\alpha\beta^2}{(1+\beta.t)^2} \end{cases}}$$

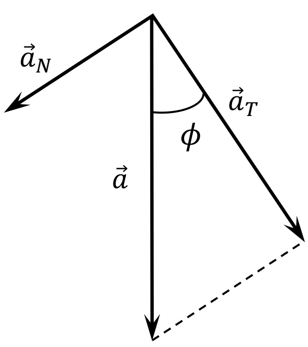
4. Puisque le mouvement est circulaire, alors les composantes radiale et transversale correspondent aux composantes normale et tangentielle respectivement.

$$\boxed{\begin{cases} a_r = -a_N \\ a_\theta = a_T \end{cases}}$$



5. L'angle entre le vecteur vitesse et le vecteur accélération est égal à l'angle entre l'accélération totale et l'accélération tangentielle :

$$\tan(\phi) = \frac{a_r}{a_\theta} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi = \arctan(\alpha)}$$



EXERCICE 13 :

1. Equations horaires

$$\begin{cases} r^\bullet = V_0 \\ \theta^\bullet = \omega \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r(t) = V_0.t + r_0 \\ \theta(t) = \omega.t + \theta_0 \end{cases}$$

Calculons V_0 , r_0 , ω et θ_0.

$$V_0 = \frac{20\ cm}{1\ min} = \frac{1}{300}\ \frac{m}{s} = \text{Constante} \quad ; \quad \omega = \theta^\bullet = \frac{-2\pi\ rad}{1\ min} = -\frac{\pi}{30}\ \frac{rad}{s} = \text{Constante}$$

Conditions initiales

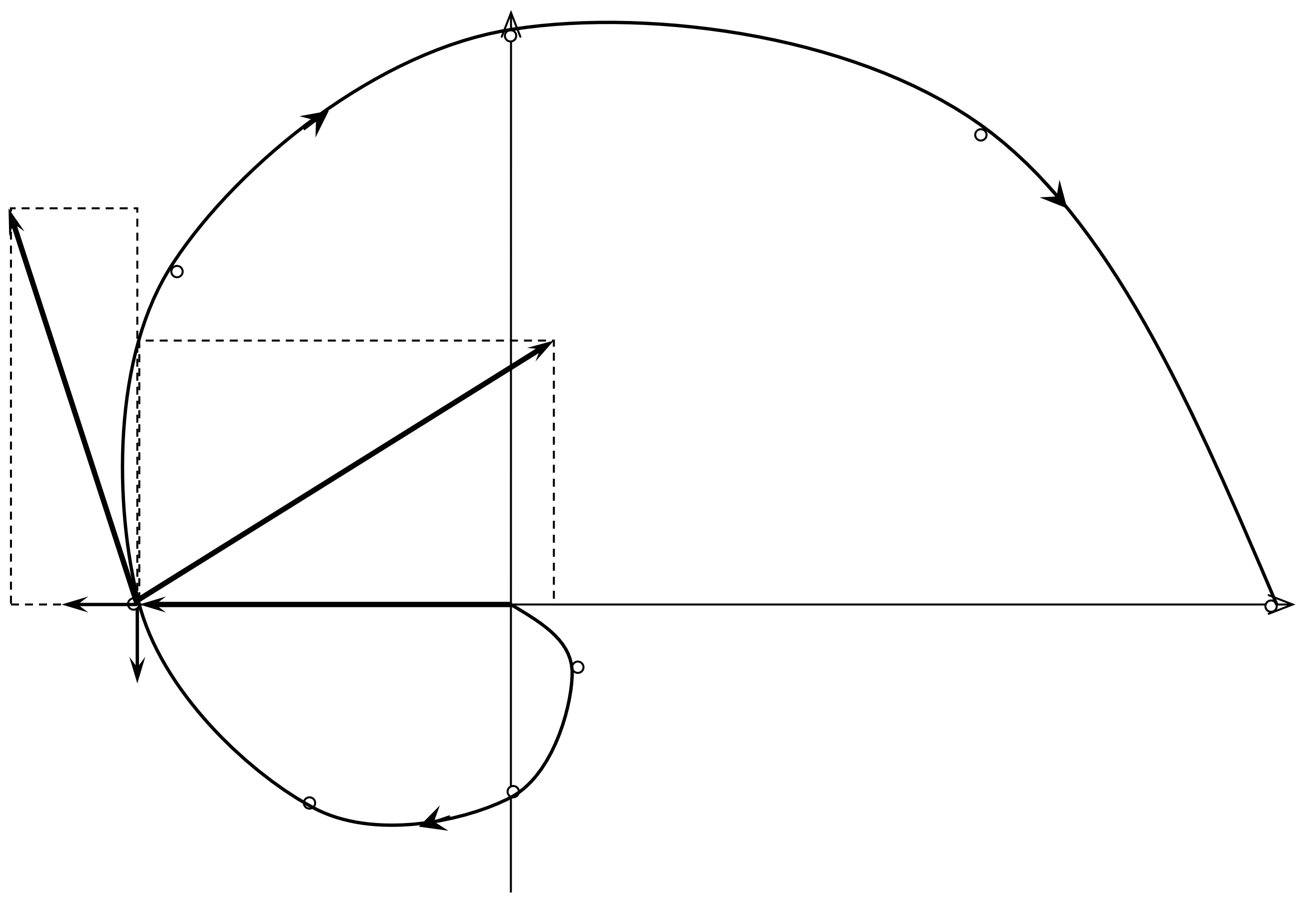
$$\text{à} \quad t = 0\ s\ ; \quad \begin{cases} r(0) = 0 \\ \theta(0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r_0 = 0 \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} r(t) = V_0.t \\ \theta(t) = \omega.t \end{cases} \quad \text{et numériquement} \quad \begin{cases} r(t) = (1/300).t \\ \theta(t) = (-\pi/30).t \end{cases}$$

2. Représentation

t	$t_0 = 0\ s$	$t_1 = 15\ s$	$t_2 = 30\ s$	$t_3 = 45\ s$	$t_4 = 60\ s$
$r\ (m)$	0	0,5	0,1	0,15	0,2
$\theta\ (rad)$	0	$-\pi/2$	$-\pi$	$-3\pi/2$	-2π



(Echelle des vitesses : 1 $cm \rightarrow 2 \times 10^{-3}\ m/s$) (Echelle des accélérations : 1 $cm \rightarrow 2 \times 10^{-4}\ m/s^2$)

3. Vecteur vitesse

$\vec{V} = r^{\bullet}.\vec{e}_r + r.\theta^{\bullet}.\vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{V} = V_0.\vec{e}_r + V_0\omega.t.\vec{e}_\theta}$ numériquement $\boxed{\vec{V} = \frac{1}{300}\left(\vec{e}_r - \frac{\pi}{30}t.\vec{e}_\theta\right)}$

Vecteur accélération

$$\vec{a} = \left(r^{\bullet\bullet} - r.\theta^{\bullet 2}\right)\vec{e}_r + (2.r^{\bullet}\theta^{\bullet} + r.\theta^{\bullet\bullet})\vec{e}_\theta$$

$\boxed{\vec{a} = -V_0\omega^2 t.\vec{e}_r + 2V_0\omega.\vec{e}_\theta}$ numériquement $\boxed{\vec{a} = -\frac{\pi}{9000}\left(\frac{\pi}{30}t.\vec{e}_r + 2.\vec{e}_\theta\right)}$

4. Représentation des vecteurs vitesse et accélération (voir plus haut).

$t = 30\ s$; $\begin{cases} r(30\ s) = 0{,}1\ m \\ \theta(30\ s) = -\pi\ rad \end{cases}$; $\begin{cases} V_r(30\ s) = (1/300)\ m/s \\ V_\theta(30\ s) = (-\pi/300)\ m/s \end{cases}$; $\begin{cases} a_r(30\ s) = (-\pi^2/9000)\ m/s^2 \\ a_\theta(30\ s) = (-2\pi/9000)\ m/s^2 \end{cases}$

5. Accélération tangentielle

$$\left|\vec{V}\right| = V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2} \quad \Rightarrow \quad V = V_0.\sqrt{1 + (\omega t)^2}$$

$\boxed{a_T = \frac{dV}{dt} = V_0\frac{\omega^2 t}{\sqrt{1 + (\omega t)^2}}}$ numériquement à $t = 30\ s$ $\boxed{a_T(30\ s) = 3{,}31 \times 10^{-4}\ m/s^2}$

6. Accélération normale

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}}$$

numériquement à $t = 30\ s$ $\boxed{a(30\ s) = 12{,}98 \times 10^{-4}\ m/s^2}$ et $\boxed{a_N(30\ s) = 12{,}56 \times 10^{-4}\ m/s^2}$

7. Rayon de courbure

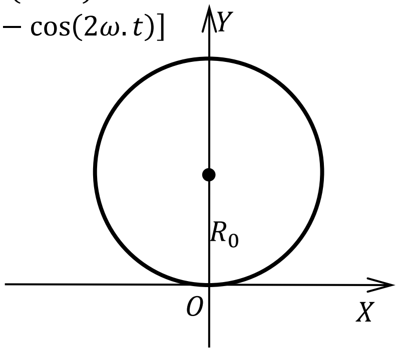
$a_N = \frac{V^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{V^2}{a_N}}$ numériquement à $t = 30\ s$ $\boxed{\rho(30\ s) = 0{,}096\ m}$

EXERCICE 14 :

$$\begin{cases} r(t) = 2R_0.\sin(\omega.t) \\ \theta(t) = \omega.t \end{cases} \qquad \begin{cases} r^\bullet = 2R_0\omega.\cos(\omega.t) \\ \theta^\bullet = \omega \end{cases} \qquad \begin{cases} r^{\bullet\bullet} = -2R_0\omega^2.\sin(\omega.t) \\ \theta^{\bullet\bullet} = 0 \end{cases}$$

9. Trajectoire :

$$\begin{cases} x = r.\cos(\theta) \\ y = r.\sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2R_0.\sin(\omega.t).\cos(\omega.t) = R_0.\sin(2\omega.t) \\ y = 2R_0.\sin(\omega.t).\sin(\omega.t) = R_0.[1-\cos(2\omega.t)] \end{cases}$$



D'où

$$\left(\frac{x}{R_0}\right)^2 + \left(1 - \frac{y}{R_0}\right)^2 = 1 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + (y - R_0)^2 = R_0^2$$

C'est l'équation d'une cercle de centre $(0, R_0)$ et de rayon R_0.

10. Vecteur vitesse en coordonnées polaires :

$$\boxed{\vec{V} = r^\bullet.\vec{e}_r + r.\theta^\bullet.\vec{e}_\theta}$$

Donc

$$\boxed{\vec{V} = 2R_0\omega.\cos(\omega.t).\vec{e}_r + 2R_0\omega.\sin(\omega.t).\vec{e}_\theta = 2R_0\omega.[\cos(\omega.t).\vec{e}_r + \sin(\omega.t).\vec{e}_\theta]}$$

Et son module

$$|\vec{V}| = V = 2R_0\omega.\sqrt{\cos(\omega.t)^2 + \sin(\omega.t)^2}$$

D'où

$$\boxed{V = 2R_0\omega}$$

11. Vecteur accélération :

$$\boxed{\vec{a} = \left(r^{\bullet\bullet} - r.\theta^{\bullet 2}\right)\vec{e}_r + (2.r^\bullet\theta^\bullet + r.\theta^{\bullet\bullet})\vec{e}_\theta}$$

Et

$$\boxed{\vec{a} = -4R_0\omega^2.\sin(\omega.t).\vec{e}_r + 4R_0\omega^2.\cos(\omega.t).\vec{e}_\theta = 4R_0\omega^2.[-\sin(\omega.t).\vec{e}_r + \cos(\omega.t).\vec{e}_\theta]}$$

Et son module

$$\boxed{|\vec{a}| = a = 4R_0\omega^2}$$

Accélération tangentielle :

$$\boxed{a_T = \frac{dV}{dt} = 0}$$

Accélération normale :

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 \qquad \Rightarrow \qquad a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = a$$

En remplaçant

$$\boxed{a_N = 4R_0\omega^2}$$

12. Rayon de courbure :

$$a_N = \frac{V^2}{\rho} \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \frac{V^2}{a_N}$$

En remplaçant

$$\boxed{\rho = R_0}$$

Conclusion le mouvement est circulaire ($\rho = \text{Cte}$) uniforme ($V = \text{Cte}$).

13. Vecteur unitaire tangent :

$$\vec{e}_T = \frac{\vec{V}}{V} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{e}_T = \cos(\omega.t).\vec{e}_r + \sin(\omega.t).\vec{e}_\theta}$$

Vecteur unitaire normal :

$$\vec{e}_N = \frac{\vec{a}_N}{a_N} = \frac{\vec{a}}{a} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{e}_N = -\sin(\omega.t).\vec{e}_r + \cos(\omega.t).\vec{e}_\theta}$$

EXERCICE 15 :

1. Nature du mouvement.

AB	$0 \leq t \leq 20\ s$	$a_T = \text{Constante} = a$	Mouvement **rectiligne** uniformément varié
BC	$20 \leq t \leq 30\ s$	$a_T = 0 \quad (a \neq a_T)$	Mouvement **circulaire** uniforme
CD	$30 \leq t \leq 40\ s$	$a_T = a = 0$	Mouvement **rectiligne** uniforme
DA	$40 \leq t \leq 60\ s$	$a_T = \text{Constante} \neq a$	Mouvement **circulaire** uniformément varié

2.

AB	$0 \leq t \leq 20\ s$	$V > 0$	$a_T > 0$	Mouvement **accéléré**
BC	$20 \leq t \leq 30\ s$	$V = \text{Constante}$	$a_T = 0$	Mouvement uniforme
CD	$30 \leq t \leq 40\ s$	$V = \text{Constante}$	$a_T = 0$	Mouvement uniforme
DA	$40 \leq t \leq 60\ s$	$V > 0$	$a_T < 0$	Mouvement **décéléré**

3. Vitesse du coureur au point B.

Le déplacement est égal à l'aire sous le diagramme des vitesses

$$D = \frac{(60 + 20) \times V}{2} = 400\ m \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V = 10\ m/s}$$

4. Rayons R des demi-cercles BC et DA.

La circonférence du cercle étant égale à $2\pi.R$. Donc, pour un demi cercle :

$$\pi.R = BC = DA = 100\ m \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{R = 31{,}83\ m}$$

5. Expression de la vitesse en fonction du temps $V(t)$.

AB	$0 \leq t \leq 20\ s$	$V_1(t) = a_T.t + V_{01}$	$V_1(t) = 0{,}5.t$
BC	$20 \leq t \leq 30\ s$	$V_2(t') = V_{02} = \text{Constante}$	$V_2(t') = 10$
CD	$30 \leq t \leq 40\ s$	$V_3(t'') = V_{03} = \text{Constante}$	$V_3(t'') = 10$
DA	$40 \leq t \leq 60\ s$	$V_4(t''') = a_T.t''' + V_{04}$	$V_4(t''') = -0{,}5.t''' + 10$

6. L'accélération normale et tangentielle.

	M_1	M_2	M_3
$a_N = V^2/R$	$a_N = 0$	$a_N = 3{,}14\ m/s^2$	$a_N = 1{,}57\ m/s^2(*)$
$a_T = dV/dt$	$a_T = 0{,}5\ m/s^2$	$a_T = 0$	$a_T = -0{,}5\ m/s^2$

(*) Calcul de la vitesse au point M_3.

Le mouvement étant circulaire uniformément varié, alors

$$V_{M_3}^2 - V_D^2 = 2.a_T.M_3D$$

Avec

$$a_T = -0{,}5\ m/s^2 \quad ; \quad V_D = 10\ m/s \quad \text{et} \quad M_3D = 50\ m$$

Donc

$$V_{M_3}^2 = 50\ m^2/s^2 \quad \text{et} \quad a_N = V_{M_3}^2/R = 1{,}57\ m/s^2$$

7. Représentation des vecteurs vitesses et accélérations.
(Echelle des vitesses : $2\ m/s \rightarrow 1\ cm$; Echelle des accélérations : $1\ m/s^2 \rightarrow 2\ cm$)

	M_1	M_2	M_3
	$V = 7{,}071\ m/s$ (*)	$V = 10\ m/s$	$V = 7{,}071\ m/s$
$a_N = V^2/R$	$a_N = 0$	$a_N = 3{,}14\ m/s^2$	$a_N = 1{,}57\ m/s^2$
$a_T = dV/dt$	$a_T = 0{,}5\ m/s^2$	$a_T = 0$	$a_T = -0{,}5\ m/s^2$

(*) Calcul de la vitesse au point M_1.
Le mouvement étant rectiligne uniformément varié, alors

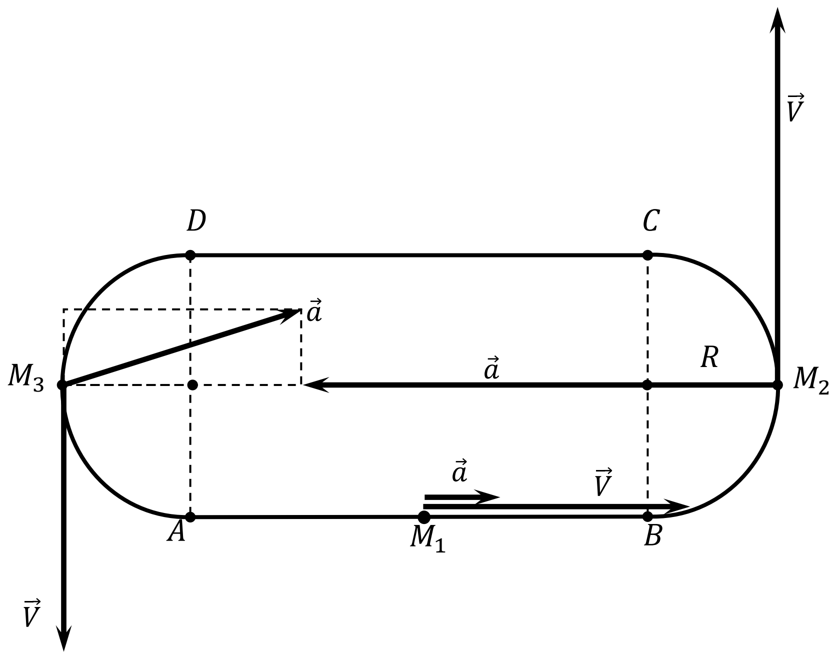
$$V_{M_1}^2 - V_A^2 = 2.a.AM_1$$

Avec

$$a = a_T = 0{,}5\ m/s^2 \quad ; \quad V_A = 0\ m/s \quad \text{et} \quad AM_1 = 50\ m$$

Donc

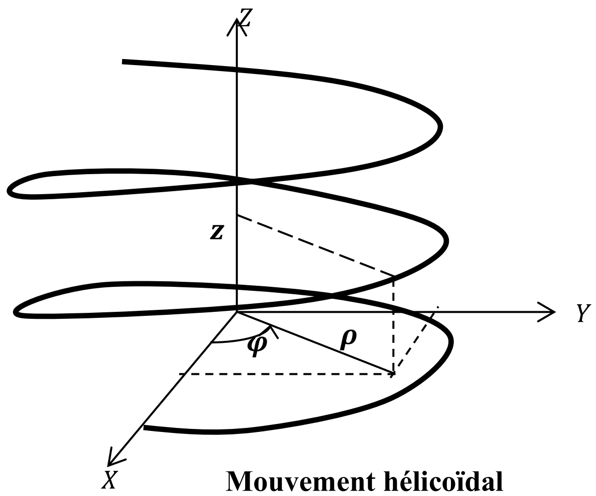
$$V_{M_1}^2 = 50\ \ m^2/s^2 \quad \text{et} \quad V_{M_1} = 7{,}071\ m/s$$



EXERCICE 16 :

1.

$$\begin{cases} x(t) = b.\cos(\omega.t) \\ y(t) = b.\sin(\omega.t) \\ z(t) = c.\omega.t \end{cases}$$



Mouvement hélicoïdal

En coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = \rho.\cos(\varphi) \\ y = \rho.\sin(\varphi) \\ z = z \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \rho = b = \text{Cte} \\ \varphi = \omega.t \\ z = c.\omega.t \end{cases}$$

2.

Vecteur vitesse : $\vec{V} = \rho^{\bullet}.\vec{e}_\rho + \rho.\varphi^{\bullet}.\vec{e}_\varphi + z^{\bullet}.\vec{e}_z$

D'où

$$\boxed{\vec{V} = b.\omega.\vec{e}_\varphi + c.\omega.\vec{e}_z}$$

Vecteur accélération : $\vec{a} = \left(\rho^{\bullet\bullet} - \rho.\varphi^{\bullet 2}\right).\vec{e}_\rho + (2\rho^{\bullet}.\varphi^{\bullet} + \rho.\varphi^{\bullet\bullet}).\vec{e}_\varphi + z^{\bullet\bullet}.\vec{e}_z$

D'où

$$\boxed{\vec{a} = -b.\omega^2.\vec{e}_\rho}$$

$b = 0 \quad \Rightarrow \quad (x(t) = 0\,;\ y(t) = 0\,; z(t) = c.\omega.t)$: Mouvement rectiligne uniforme suivant l'axe OZ.

$c = 0 \quad \Rightarrow \quad (x(t) = b.\cos(\omega.t)\ ;\ y(t) = b.\sin(\omega.t)\ ;\ z(t) = 0)$: Mouvement circulaire uniforme dans le plan OXY.

EXERCICE 17 :

$$x(t) = b.\cos(\gamma.t^2) \quad ; \quad y(t) = b.\sin(\gamma.t^2) \quad ; \quad z(t) = b.\gamma.t^2$$

En coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = \rho.\cos(\varphi) \\ y = \rho.\sin(\varphi) \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \rho = b = \text{Cte} \\ \varphi = \gamma.t^2 \\ z = b.\gamma.t^2 \end{cases}}$$

1.

Vecteur vitesse : $\vec{V} = \rho^{\bullet}.\vec{e}_\rho + \rho.\varphi^{\bullet}.\vec{e}_\varphi + z^{\bullet}.\vec{e}_z$

D'où

$$\boxed{\vec{V} = 2b\gamma.t.\left(\vec{e}_\varphi + \vec{e}_z\right)}$$

Vecteur accélération : $\vec{a} = \left(\rho^{\bullet\bullet} - \rho.\varphi^{\bullet 2}\right).\vec{e}_\rho + (2\rho^{\bullet}.\varphi^{\bullet} + \rho.\varphi^{\bullet\bullet}).\vec{e}_\varphi + z^{\bullet\bullet}.\vec{e}_z$

D'où

$$\boxed{\vec{a} = -4b\gamma^2.t^2.\vec{e}_\rho + 2b\gamma.\vec{e}_\varphi + 2b\gamma.\vec{e}_z} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{a} = 2b\gamma.\left(-2\gamma.t^2.\vec{e}_\rho + \vec{e}_\varphi + \vec{e}_z\right)}$$

2.

Module de la vitesse : $V = \left|\vec{V}\right| = |2b\gamma.t|.\sqrt{1+1} \quad \Rightarrow \quad V = 2\sqrt{2}.b\gamma.t$

Accélération tangentielle :

$$\boxed{a_T = \frac{dV}{dt} = 2\sqrt{2}.b\gamma}$$

Module de l'accélération : $a = |\vec{a}| = |2b\gamma|.\sqrt{(-2\gamma.t^2)^2 + 1 + 1} \quad \Rightarrow \quad a = 2\sqrt{2}.b\gamma.\sqrt{2\gamma^2.t^4 + 1}$

Accélération normale :

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 \quad \Rightarrow \quad a_N^2 = a^2 - a_T^2$$

D'où

$$a_N^2 = 8.b^2\gamma^2(2\gamma^2.t^4 + 1) - 8.b^2\gamma^2 = 16.b^2\gamma^4.t^4$$

Et

$$\boxed{a_N = 4.b\gamma^2.t^2}$$

3. Rayon de courbure :

$$a_N = \frac{V^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{V^2}{a_N} = \frac{8.b^2\gamma^2.t^2}{4.b\gamma^2.t^2}$$

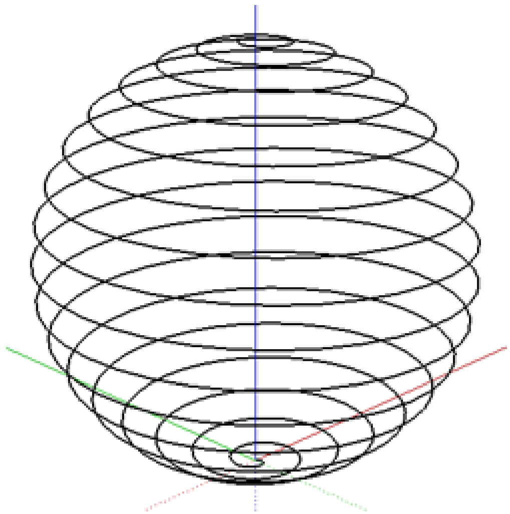
D'où

$$\boxed{\rho = 2b}$$

EXERCICE 18 :

$r(t) = R = \text{Cte}$; $\theta(t) = \omega.t$; $\varphi(t) = 12.\omega.t$

$R = 5\ cm$ et $\omega = \pi/3\ \ rad/s$



1. Description de la trajectoire : Spirale sphérique. (Figure ci-contre).

2. $t = 1\ s$

$r(1\ s) = 5\ cm$; $\theta(1\ s) = \pi/3\ rad$; $\varphi(1\ s) = 4\pi\ rad$

$$\boxed{\begin{cases} x = r.\sin(\theta).\cos(\varphi) = 5\sqrt{3}/2 \\ y = r.\sin(\theta).\sin(\varphi) = 0 \\ z = r.\cos(\theta) = 5/2 \end{cases}}$$

3. $z = -R = R.\cos(\theta) \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \pi\ rad$

Donc

$$t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{\pi}{\omega} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{t = 3\ s}$$

4. $\vec{V} = r^{\bullet}.\vec{e}_r + r.\theta^{\bullet}.\vec{e}_\theta + r.\sin\theta.\varphi^{\bullet}.\vec{e}_\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \vec{V} = R.\omega.\vec{e}_\theta + 12R.\omega.\sin(\omega.t).\vec{e}_\varphi$

A $t = 3\ s$:

$$\boxed{\vec{V} = \frac{5\pi}{3}\vec{e}_\theta} \qquad \text{et} \qquad \boxed{V = \frac{5\pi}{3}}$$