

Epreuve de Physique Statistique

EXERCICE 1:

Le diamètre intérieur d'un échantillon de 200 corps de stylos produits par une machine est estimé à 0,502 cm et l'écart-type moyen est de l'ordre de 0,005 cm ; la distribution de ces diamètres est censée suivre une loi normale.

Ces pièces doivent passer dans une chaîne de montage entièrement automatisée, mais elles ne peuvent convenir pour cela que si et seulement si leur diamètre est compris entre 0,496 et 0,508 cm.

1. Quel est le nombre de corps de stylos qui devront être considérés comme défectueux ?
2. Comment ce nombre évolue-t-il si une nouvelle machine est achetée, qui n'admet que les diamètres compris entre 0,498 et 0,510 cm ?
3. Que vaut, pour une variable aléatoire ayant une distribution continue, la probabilité que la variable aléatoire prenne EXACTEMENT une valeur particulière ? Expliquez.

EXERCICE 2:

Si on suppose que l'atmosphère est en équilibre et que sa température est constante, à l'aide de la distribution de Boltzmann trouver la formule barométrique décrivant la variation de la densité de l'atmosphère avec l'altitude et déduire la pression à l'altitude z .

Trouver le nombre de molécules se trouvant au-dessus d'une unité de surface de la terre à l'altitude z dans la couche d'épaisseur dz ainsi que le nombre total de molécules au-dessus de cette surface unitaire.

EXERCICE 3:

On considère N molécules d'un gaz parfait monoatomique enfermées dans un récipient de volume V , on suppose que l'énergie potentielle est nulle à l'intérieur de ce récipient.

- 1) Trouver la probabilité de l'un des états du gaz à T donnée.
- 2) En appliquant le résultat obtenu dans (1), calculer la probabilité de l'état dans lequel toutes les N molécules se concentrent dans la région du récipient égale à $0.01V$, avec des vitesses de 300 à 301 m/s.

On donne $N=10^{20}$ molécules, $m_0 = 1,67 \cdot 10^{-24}g$ $T=25^\circ c$ et $V=2l$

Corrigé type de l'Epreuve de Physique Statistique 2017

Le diamètre intérieur moyen, $\langle x \rangle = 0.502 \text{ cm}$

L'écart-type moyen, $\sqrt{D} = 0.005 \text{ cm}$

1) **le nombre de corps de stylos qui devront être considérés comme défectueux :**

C'est le nombre N_d de "corps de stylos dont le diamètre est

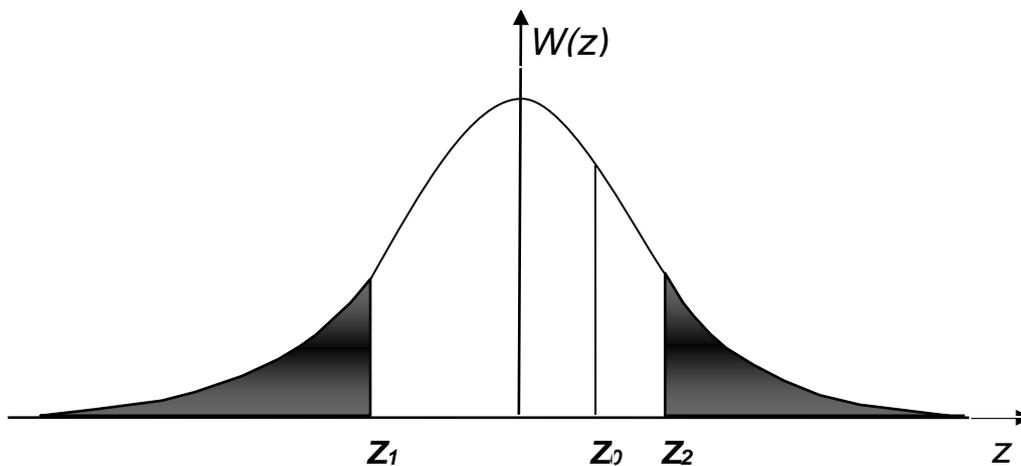
$$x < 0.496 \text{ cm} \quad \text{et} \quad x > 0.508 \text{ cm} "$$

$$N_d = [W(x < 0.496) + W(x > 0.508)] * N_{Tot}$$

Pour utilisé le tableau de la loi normale centrée réduite il faut faire les changements de variables suivantes :

$$z_1 = \frac{x_1 - \langle x \rangle}{\sqrt{D}} = \frac{0.496 - 0.502}{0.005} = -1.2$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \langle x \rangle}{\sqrt{D}} = \frac{0.508 - 0.502}{0.005} = 1.2$$



$$W(x < x_1) = W(z < z_1) = W(z < -1.2)$$

$$W(x > x_2) = W(z > z_2) = W(z > 1.2)$$

$W(z < -1.2)$ et $W(z > 1.2)$ représentent les mêmes surfaces

Donc $W(z < -1.2) = W(z > 1.2) = 1 - W(z < 1.2) = 1 - 0.8849 = 0,1151$

On a $N_d = [W(x < 0.496) + W(x > 0.508)] * N_{Tot}$

Alors $N_d = [W(z < -1.2) + W(z > 1.2)] * N_{Tot}$

$$N_d = (2 * 0.1151) * 200$$

$N_d = 46$	Corps de stylos défectueux
------------	----------------------------

2) L'évolution du nombre de corps de stylos défectueux si la nouvelle machine n'admet que les diamètres compris entre 0,498 et 0,510 cm.

De la même manière

$$x < 0.498 \text{ cm et } x > 0.510 \text{ cm}$$

$$N_d = [W(x < 0.498) + W(x > 0.510)] * N_{Tot}$$

$$z_1 = \frac{x_1 - \langle x \rangle}{\sqrt{D}} = \frac{0.498 - 0.502}{0.005} = -0,8$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \langle x \rangle}{\sqrt{D}} = \frac{0.510 - 0.502}{0.005} = 1,6$$

On a $N_d = [W(x < 0.498) + W(x > 0.510)] * N_{Tot}$

Alors $N_d = [W(z < -0.8) + W(z > 1.6)] * N_{Tot}$

$$W(z < -0.8) = W(z > 0.8) = 1 - W(z < 0.8) = 1 - 0.7881 = 0,2119$$

$$W(z > 1.6) = 1 - W(z < 1.6) = 1 - 0.9452 = 0,0548$$

$$N_d = (0,2119 + 0,0548) * 200$$

$N_d = 53$	Corps de stylos défectueux
------------	----------------------------

3) Pour une variable aléatoire ayant une distribution continue, la probabilité que la variable aléatoire prenne EXACTEMENT une valeur particulière est

$$W(z = z_0) = 0$$

Parce que cette probabilité représente la surface du segment de droite $z = z_0$ (voir la figure ci-dessus)

EXERCICE 2:

- **La formule barométrique décrivant la variation de la densité de l'atmosphère avec l'altitude.**

Selon la distribution de Boltzmann on a la concentration à l'altitude z :

$$n(z) = n(z_0)e^{-[E_p(z)-E_p(z_0)]/kT}$$

L'énergie potentielle d'une molécule de masse m dans le champ de la pesanteur de la terre est

$$E_p(z) = mgz$$

Si on prend $z_0 = 0$ au niveau de la mer, alors la formule barométrique est :

$$n(z) = n(0)e^{-mgz/kT} \quad (2.1)$$

- **La pression à l'altitude z .**

Si on considère que l'atmosphère est un gaz parfait, et à température est constante l'équation d'état est :

$$pV = NRT \quad \text{et} \quad p(z)V = N(z)RT$$

Avec $N(z)$ représente le nombre de moles à l'altitude z

et $R = N_A k$ d'ou $p(z)V = N(z)N_A kT$

$N(z)N_A$ est le nombre de molécules à l'altitude z , ce qui nous donne

$$p(z) = \frac{N(z)N_A}{V} kT \quad , \quad \frac{N(z)N_A}{V} \text{ est la concentration à l'altitude } z$$

$$\text{alors } p(z) = n(z)kT \quad \Rightarrow \quad n(z) = \frac{p(z)}{kT}$$

De l'éq. (2. 1)

$$\frac{p(z)}{kT} = \frac{p(0)}{kT} e^{-mgz/kT} \quad \Rightarrow \quad p(z) = p(0)e^{-mgz/kT} = p(0)e^{-mN_A g z / RT}$$

$$mN_A = \mu$$

Alors

$$p(z) = p_0 e^{-\mu g z / RT}$$

Puisque l'atmosphère est un mélange de O_2 et N_2 , on néglige la différence entre leurs masses molaires et on utilise masse molaire de l'air $\mu = 0.029 \text{ kg/mole}$

- **Le nombre de molécules se trouvant au-dessus d'une unité de surface de la terre à l'altitude (z) dans la couche d'épaisseur (dz), dN**

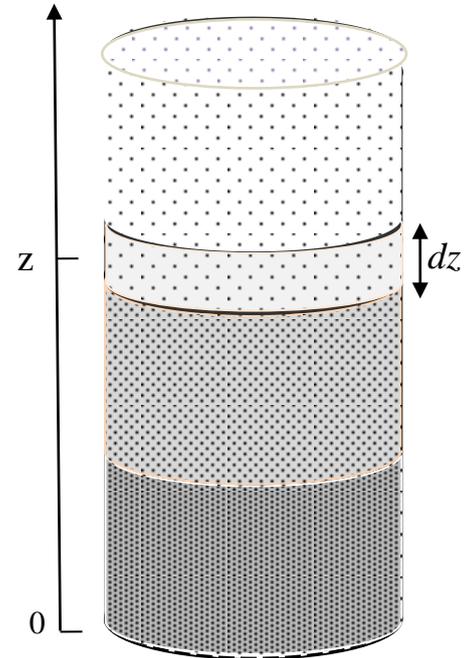
On a la concentration à l'altitude z

$$n(z) = n(0)e^{-\mu gz/RT}$$

Le nombre de molécules; ($s = 1 \text{ m}^2$)

$$dN = n(z) dV = n(z) s dz = n(z) dz$$

$$dN = n(0)e^{-\mu gz/RT} dz$$



- **Le nombre de molécules total se trouvant au-dessus d'une unité de surface de la**

$$N_{Tot} = \int dN = \int_0^{\infty} n(0)e^{-\mu gz/RT} dz = -n(0) \left(\frac{RT}{\mu g} \right) \int_0^{\infty} d(e^{-\frac{\mu gz}{RT}})$$

$$N_{Tot} = n(0) \left(\frac{RT}{\mu g} \right)$$

EXERCICE 3:

1) La probabilité de l'un des états du gaz à T donnée.

La probabilité de l'un des états du gaz c-a-d la probabilité de l'un des états du système tout entier donc on doit utiliser la distribution de Gibbs donnée par la formule suivante :

$$dW = e^{(F-E)/kT} d\Gamma$$

Avec $F = -kT \ln z$; z est la fonction de partition

$$z = \int_{\text{sur tout l'espace}} e^{-E/kT} d\Gamma$$

E : est l'énergie totale du système

$$E = \sum_{i=1}^N E_i = \sum_{i=1}^N \left[\frac{p_i^2}{2m} + E_{pi}(r) \right]$$

$$z = \int_{\text{sur tout l'espace}} e^{-E/kT} d\Gamma = \int \int \dots \int \int e^{-\sum_{i=1}^N E_i/kT} d\gamma_1 d\gamma_2 \dots d\gamma_N$$

$$z = \int e^{-E_1/kT} d\gamma_1 \int e^{-E_2/kT} d\gamma_2 \dots \int e^{-E_N/kT} d\gamma_N$$

Toutes ces intégrales sont identiques d'où

$$z = \left[\int e^{-E_1/kT} d\gamma_1 \right]^N$$

$$\int e^{-E_1/kT} d\gamma_1 = \int e^{-\frac{p_i^2}{2mkT} + E_{pi}(r)/kT} d\Omega_1 d\tau_1$$

$$= \int e^{-\frac{p_i^2}{2mkT}} d\Omega_1 \int e^{-E_{pi}(r)/kT} d\tau_1$$

$$= (2\pi mkT)^{3/2} \left[\int_{out} e^{-E_{pi}(r)/kT} d\tau_1 + \int_{in} e^{-E_{pi}(r)/kT} d\tau_1 \right]$$

$$E_{pi}(r) = \begin{cases} 0 & \text{à l'intérieur du récipient} \\ \infty & \text{à l'extérieur du récipient} \end{cases}$$

Alors

$$\int e^{-E_1/kT} d\gamma_1 = (2\pi mkT)^{3/2} \left[0 + \int_{in} d\tau_1 \right]$$

$$\int e^{-E_1/kT} d\gamma_1 = (2\pi mkT)^{3/2} V$$

D'où

$$z = [(2\pi mkT)^{3/2} V]^N$$

Donc

$$F = -kTN \ln \left((2\pi mkT)^{3/2} V \right)$$

$$\frac{F}{kT} = -\ln \left(V (2\pi mkT)^{3/2} \right)^N$$

$$e^{\frac{F}{kT}} = \frac{1}{(V (2\pi mkT)^{3/2})^N}$$

La probabilité est :

$$dW = e^{\frac{F}{kT}} e^{-\frac{E}{kT}} d\Gamma$$

$$dW = \frac{1}{V^N (2\pi mkT)^{3N/2}} e^{-\frac{E}{kT}} d\Gamma$$

2) La probabilité de l'état "N molécules se concentrent dans 0.01V, avec des vitesses de 300 à 301 m/s".

On a trouvé

$$dW = \frac{1}{V^N (2\pi mkT)^{3N/2}} e^{-\frac{E}{kT}} d\Gamma$$

Il faut calculer $e^{-\frac{E}{kT}}$ et $d\Gamma$

$$E = \sum_{i=1}^N E_i = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}$$

Puisque $p_1 = p_2 = \dots = p_N = mv = 1.67 \cdot 10^{-27} \cdot 300 = 501 \cdot 10^{-27} \text{ kg m/s}$

$$E = N \frac{p_i^2}{2m} = 10^{20} \cdot \frac{(501 \cdot 10^{-27})^2}{2(1.67 \cdot 10^{-27})} = 7,515 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$d\Gamma = d\gamma_1 d\gamma_2 \dots d\gamma_N = d\Omega_1 d\tau_1 \dots d\Omega_N d\tau_N$$

$$v = 300 \text{ ou } 301 \text{ m/s}, \text{ et } dv = 301 - 300 = 1 \text{ m/s}$$

Toutes les N molécules se trouvent dans le même volume $d\tau_i$ c.-à-d.

$$d\tau_1 = d\tau_2 = \dots = d\tau_N = 0.01 V = 0.01 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$d\Omega_1 = d\Omega_2 = \dots = d\Omega_N = 4\pi p^2 dp = 4\pi m^3 v^2 dv$$

$$d\Omega_i = 4\pi m^3 v^2 dv = 4\pi (1.67 \cdot 10^{-27})^3 (300)^2 \cdot 1 = 5,26 \cdot 10^{-75} (\text{kg m/s})^3$$

Alors

$$d\Gamma = (d\Omega_1 d\tau_1)^N = (0.01 V)^N (4\pi m^3 v^2 dv)^N$$

$$dW = \frac{1}{V^N (2\pi mkT)^{3N/2}} e^{-\frac{E}{kT}} d\Gamma = \frac{(0.01 V)^N (4\pi m^3 v^2 dv)^N}{V^N (2\pi mkT)^{3N/2}} e^{-\frac{E}{kT}}$$

$$dW = \left(\frac{0.01 V}{V}\right)^N \cdot \frac{(4\pi m^3 v^2 dv)^N}{(2\pi mkT)^{3N/2}} e^{-\frac{E}{kT}}$$

$$dW = (0.01)^N \cdot \frac{(5,26 \cdot 10^{-75})^N}{(3,12 \cdot 10^{-24})^{3N/2}} \cdot e^{-\frac{7,515 \cdot 10^{-3}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 298}}$$

$$dW = \left(\frac{0.01 \cdot 5,26 \cdot 10^{-75} \cdot}{(3,12 \cdot 10^{-24})^{3/2}} \right)^N \cdot e^{-\frac{7,515 \cdot 10^{-3}}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 298}}$$
$$dW = 9,54 \cdot 10^{-42N} \cdot e^{-1,82 \cdot 10^{18}}$$

Cette probabilité est très petite, la probabilité de l'état choisi est négligeable