Lois classiques

- Loi Binomiale
- Loi de Poisson
- Loi Normale et dérivées
- Loi de Student
- Loi du Khi 2
- Loi du F de Fisher Snedecor

Loi Binomiale

- Épreuve de Bernoulli :
  - Soit deux événements mutuellement exclusifs A et son contraire B (pile/face; garçon/fille; résultat positif/négatif). Toute réalisation de l'expérience aura comme résultat A ou B.
  - Cette épreuve est appelée épreuve de Bernoulli.
- A chaque épreuve on associe X telle que :
  - X = 1 quand A est réalisé
  - X = 0 quand B est réalisé
  - La loi de probabilité de X est
    - $P(X=1) = p$
    - $P(X=0) = q = 1-p$
    - $E(x) = \Sigma P_i x_i = 1 * p + (1-p)*0 = p$
    - $Var(X) = p * (1-p) = pq$

On peut répéter n fois

une épreuve de Bernoulli.

- On appelle k le nombre de réalisation de A. C'est le nombre de réalisation de A parmi n épreuves. k est une réalisation de K et peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et n.
  On montre facilement que :

$$p(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} avec \, C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Cette loi de probabilité est appelée loi Binomiale (binôme de Newton)
  - E(K) = n*p
  - Var(K) = n*p*q
- Si l'on ne considère plus la fréquence absolue k mais la fréquence relative (pourcentage) f = k/n et F une réalisation de f; on a :
  - E(F) = p
  - Var (F) = $\frac{p * q}{n}$
- Formule de récurrence

$$P(K = k+1) = \frac{p * (n-k)}{q * (k + 1)} * P(K=k)$$

Loi Binomiale : Résumé

- Variable binaire
- 2 paramètres
  - n : nombre de répétitions
  - p : probabilité de l'événement
- Loi
  - $P(K=k) = C_n^k \ p^k \ q^{n-k}$
  - Distribution asymétrique sauf pour p=q=0,5
- Formule de récurrence

$$P(K = k+1) = \frac{p * (n-k)}{q * (k+1)} * P(K=k)$$

- Moyenne E(K) = n*p
- Variance Var(K) = n*p*q
- Si l'on considère f = k/n; on a :
  - E(F) = p
  - Var (F) =

$$\frac{p * q}{n}$$

Exemple de distribution binomiale

- Nombre de garçons dans les familles de 4 enfants sachant que p = 0,5

$p = 0{,}5$
$q = 0{,}5$

$$P(K=0) = C_4^0 \; 0{,}5^0 \; * \; 0{,}5^4 \quad = 0{,}0625$$

$$P(K=1) = \frac{0{,}5 * (4-0)}{0{,}5 * (0+1)} * P(K=0) = 0{,}25$$

$P(K=2) = 0{,}375$
$P(K=3) = 0{,}25$
$P(K=4) = 0{,}0625$

- Nombre d'examens positifs sans qu'il y aie de maladie dans un bilan de 10 paramètres sachant que la spécificité est de 95 %

$p = 0{,}05$
$q = 0{,}95$

$$P(K=0) = C_{10}^0 \; 0{,}05^0 \; * \; 0{,}95^{10} \quad = 0{,}599$$

D'où $P(K>0) = 1- 0{,}598 = 0{,}401$

Loi de Poisson

- Variable discontinue pouvant prendre toutes les valeurs entières positives (0, + infini)
- Cas limite des distributions binomiales quand p est petit et n grand. Dans ce cas n*p tend vers m.
- $P(K=k) = C_n^k \, p^k \, q^{n-k}$ tend vers $e^{-m} * \dfrac{m^k}{k!}$
- Loi caractérisée par un seul paramètre m = np. La moyenne m est égale à la variance.
- On emploie la loi de Poisson tant que np (nq) est inférieur à 5; quand np et nq sont supérieur à 5 on utilise la loi normale
- Formule de récurrence :

$$P(K = k+1) = P(K=k) * \frac{m}{k+1}$$

- Loi tabulée, 1 ou 2 modes, forme en i
- Loi des événements rares
  - Désintégration nucléaire
  - Mort d'un individu dans un intervalle de temps
  - Théorie des catastrophes, recherche opérationnelle (sortie des ambulances…)

Table de la loi de Poisson

$$\Pr(X = k) = e^{-a}\,\frac{a^k}{k\,!}$$

k \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0
0	0,905	0,819	0,741	0,670	0,607	0,549	0,497	0,449	0,407	0,368	0,135
1	0,090	0,164	0,222	0,268	0,303	0,329	0,348	0,359	0,366	0,368	0,271
2	0,005	0,016	0,033	0,054	0,076	0,099	0,122	0,144	0,165	0,184	0,271
3	-	0,001	0,003	0,007	0,013	0,020	0,028	0,038	0,049	0,061	0,180
4	-	-	-	0,001	0,002	0,003	0,005	0,008	0,011	0,015	0,090
5	-	-	-	-	-	-	0,001	0,001	0,002	0,003	0,036
6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,001	0,012
7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,003
8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,001

k \ a	2,5	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	14,0	18,0
0	0,082	0,050	0,018	0,007	0,002	0,001	-	-	-	-	-
1	0,205	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0,003	0,001	-	-	-
2	0,257	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002	-	-
3	0,214	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008	-	-
4	0,134	0,168	0,195	0,175	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019	0,001	-
5	0,067	0,101	0,156	0,175	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038	0,004	-
6	0,028	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063	0,009	0,001
7	0,010	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090	0,017	0,002
8	0,003	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113	0,030	0,004
9	0,001	0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125	0,047	0,008
10	-	0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125	0,066	0,015
11	-	-	0,002	0,008	0,023	0,045	0,072	0,097	0,114	0,084	0,025
12	-	-	0,001	0,003	0,011	0,026	0,048	0,073	0,095	0,098	0,037
13	-	-	-	0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073	0,106	0,051
14	-	-	-	-	0,002	0,007	0,017	0,032	0,052	0,106	0,066
15	-	-	-	-	-	0,003	0,009	0,019	0,035	0,099	0,079
16	-	-	-	-	-	0,001	0,005	0,011	0,022	0,087	0,088
17	-	-	-	-	-	0,001	0,002	0,006	0,013	0,071	0,094
18	-	-	-	-	-	-	0,001	0,003	0,007	0,055	0,094
19	-	-	-	-	-	-	-	0,001	0,004	0,041	0,089
20	-	-	-	-	-	-	-	0,001	0,002	0,029	0,080
21	-	-	-	-	-	-	-	-	0,001	0,019	0,068
22	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,012	0,056
23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,007	0,044
24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,004	0,032
25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,002	0,024
26	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,001	0,016
27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,001	0,011
28	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,007
29	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,004
30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,003
31	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,002
32	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,001
											0,001

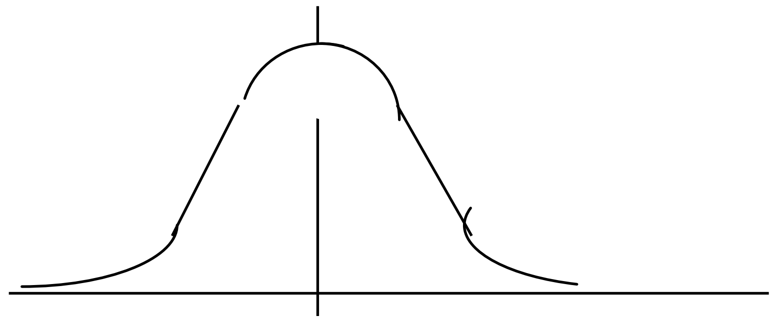
Loi Normale
Loi de Laplace-Gauss

- Variable continue, définie de $-\infty$ à $+\infty$ par sa densité de probabilité.
- $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$
- 2 paramètres μ et σ (moyenne et écart type)
- Toutes les lois normales se ramènent à la loi normale centrée réduite de moyenne 0 et d'écart type 1.
- Loi symétrique, mode = moyenne = médiane
- Deux points d'inflexion pour u = ± 1

$$u = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}u^2}$$

Loi Normale (suite)

- Représentation de f(u)



- Importance de la loi normale
  - Loi limite des lois binomiales et de poisson (np > 5 et nq >5 (10 pour certain).
  - Loi très fréquente dans les phénomènes biologiques et médicaux.
  - Si des variables sont gaussiennes (L. Normale = L. de Laplace Gauss) il en est de même de leur somme et de leur différence.
  - Attention, le mélange de deux groupes dans lesquels une variable suit une loi normale ne donne pas une distribution normale sauf si les deux groupes sont issus de distribution ayant même moyenne et même écart type.
  - La moyenne de n variables non gaussienne indépendantes tend à devenir gaussienne quand n (n>10) est grand.
  - Souvent une transformation simple (log, racine...) permet de mener à une distribution normale (loi log normale).

Loi Normale : valeurs remarquables

- $\mu \pm \sigma$

μ

0,16 0,34 0,34 0,16

16% 68 % 16%

$\mu - \sigma$ $\mu + \sigma$

- $\mu \pm 1{,}96 * \sigma$

μ

0,025 0,475 0,475 0,025

2,5% 95 % 2,5%

$\mu - 1{,}96\ \sigma$ $\mu + 1{,}96\ \sigma$

- $\mu \pm 2{,}6 * \sigma$

μ

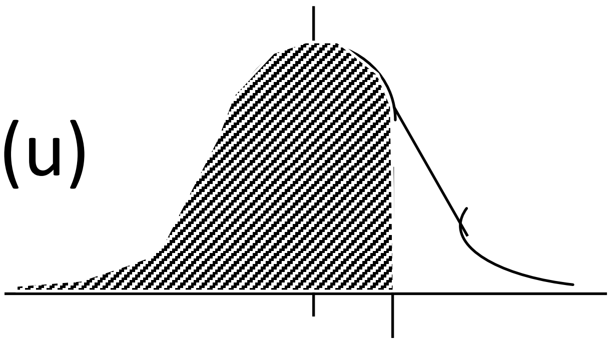
0,005 0,495 0,495 0,005

0,5% 99% 0,5%

$\mu - 2{,}6\ \sigma$ $\mu + 2{,}6\ \sigma$

Tables de la loi Normale

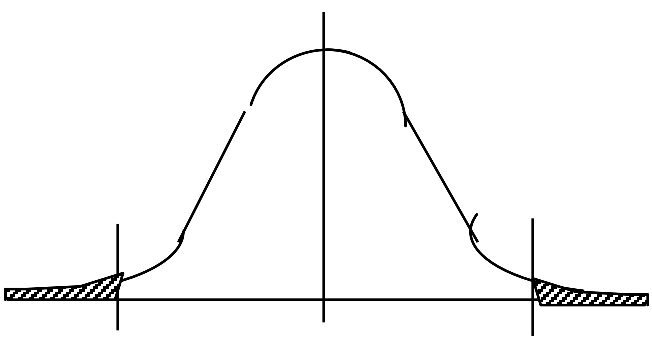
- f(u)



On lit u en additionnant entête de ligne et de colonne.
A l'intersection, on lit la probabilité P(U< u).
C'est à dire d'observer des valeurs inférieures à μ + u * σ pour des VA normales non centrées réduites.

- Écart réduit

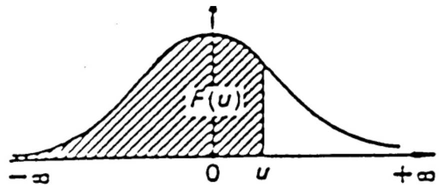
f(-u) = 1-f(u)



On lit la probabilité alpha d'être à l'extérieur de l'intervalle -ε , + ε en additionnant entête de ligne et de colonne.
A l'intersection, on lit ε .
Cette table permet de connaître pour alpha donné la distance $\varepsilon * \sigma$ telle que la probabilité d'être à l'intérieur de l'intervalle $\mu \pm \varepsilon * \sigma$ soit 1- alpha.

- phi(u) = f(u) -0,5

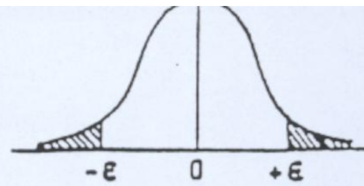
Table de la loi normale



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table de la loi normale

La table donne la probabilité α pour que l'écart-réduit égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée ε c'est-à-dire la probabilité extérieure à l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$.



α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,20	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,30	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,40	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,50	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,60	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,70	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,80	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,90	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

La probabilité α s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Exemple : pour $\varepsilon = 1{,}960$ la probabilité est $\alpha = 0{,}00 + 0{,}05 = 0{,}05$.

Table pour les petites valeurs de la probabilité.

α	0,001	0,000 1	0,000 01	0,000 001	0,000 000 1	0,000 000 01	0,000 000 001
ε	3,29053	3,89059	4,41717	4,89164	5,32672	5,73073	6,10941

Loi du khi2

- Une variable Khi 2 à n degrés de liberté (DDL) est une somme des n carrés de variables centrées réduites indépendantes.

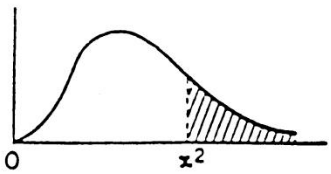
$$X^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2$$

- Densité de probabilité : une courbe pour chaque valeur de n
- Loi non symétrique
- Avec DDL = 1, le Khi 2 est le carré d'une variable centrée réduite (pour alpha = 0,05 u = 1, 96 , Khi2 = 3,84)
- Mode = n -2
- Moyenne = n
- Variance = 2 n
- Quand n > 30 la loi tend vers une loi normale

$$u = \frac{X^2 - n}{\sqrt{2*n}}$$

Table du Khi2

La table donne la probabilité α pour que χ^2 égale ou dépasse une valeur donnée, en fonction du nombre de degrés de liberté (d.d.l.).



d.d.l. \ α	0,90	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0.0158	0.455	1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635	10,827
2	0.211	1.386	2.408	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210	13,815
3	0.584	2.366	3.665	4.642	6.251	7.815	9.837	11.345	16,266
4	1.064	3.357	4.878	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277	18,467
5	1.610	4.351	6.064	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086	20,515
6	2.204	5.348	7.231	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812	22,457
7	2.833	6.346	8.383	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475	24,322
8	3.490	7.344	9.524	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090	26,125
9	4.168	8.343	10.656	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666	27,877
10	4.865	9.342	11.781	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209	29,588
11	5.578	10.341	12.899	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725	31,264
12	6.304	11.340	14.011	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217	32,909
13	7.042	12.340	15.119	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688	34,528
14	7.790	13.339	16.222	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141	36,123
15	8.547	14.339	17.322	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578	37,697
16	9.312	15.338	18.418	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000	39,252
17	10.085	16.338	19.511	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409	40,790
18	10.865	17.338	20.601	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805	42,312
19	11.651	18.338	21.689	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191	43,820
20	12.443	19.337	22.775	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566	45,315
21	13.240	20.337	23.858	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932	46,797
22	14.041	21.337	24.939	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289	48,268
23	14.848	22.337	26.018	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638	49,728
24	15.659	23.337	27.096	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980	51,179
25	16.473	24.337	28.172	30.675	34.382	37.652	41.556	44.314	52,620
26	17.292	25.336	29.246	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642	54,052
27	18.114	26.336	30.319	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963	55,476
28	18.939	27.336	31.391	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278	56,893
29	19.768	28.336	32.461	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588	58,302
30	20.599	29.336	33.530	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892	59,703

Exemple : avec d.d.l = 3 pour X^2 = 0,584, la probabilité est égale à 0,90
Quand le nombre de d.d.l. est > 30, X^2 est à peu prés distribué normalement autour de d.d.l. avec une variance égale à 2 d.d.l.

Loi t de Student

- Découverte par Gosset qui la publie sous le pseudonyme de Student.
- La loi de Student à n DDL est la loi d'une variable t :

$$t = \frac{u}{\sqrt{\frac{X_n^2}{n}}}$$

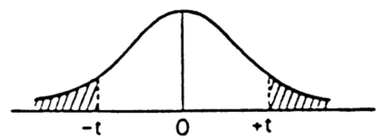
- X^2_n suit une loi du Kih2 à n DDL et U est une variable normale centrée réduite
- Densité de probabilité (n = DDL, C = cste dépendant de n pour que la somme des probabilité soit égale à 1)

$$f(t) = c(1 + t^2 / n)^{-(n+1)/2}$$

- Loi symétrique
- Pour n > 1 moyenne = 0, variance = n / (n-2)
- Tend vers une loi normale. Dès que n > 30 les deux lois sont pratiquement confondues
- Sert à la comparaison des moyennes
- Table la plus utilisée donne en fonction de n, et de la probabilité d'être à l'extérieur de l'intervalle -t,+t; la valeur de t.

Table du t de Student

La table donne la probabilité α pour que t égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée, en fonction du nombre de degrés de liberté (d.d.l.).



d.d.l. \ α	0,90	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,134	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,688	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,688	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,687	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,686	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,686	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,685	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,685	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,684	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,684	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,684	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,683	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,683	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,683	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
∞	0,126	0,674	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Exemple : avec d.d.l. = 10, pour t = 2,228 la probabilité est α = 0,05.

Loi F de Snedecor

- Densité de probabilité : formule compliquée caractérisée par les degrés de liberté n1 et n2
- Dissymétrie gauche comme le Khi2
- On montre que si deux variables indépendantes Y1 et Y2 suivent une distribution du khi2 à n1 et n2 DDL F suit une loi de F de Snedecor à n1 et n2 DDL, son inverse (1/F) suit également une loi de F à n2 et n1 DDL.

$$\boxed{F = \frac{\frac{Y1}{n1}}{\frac{Y2}{n2}}}$$

- Une table pour chaque probabilité alpha et uniquement pour F>1 (utilisation de la propriété précédente pour F<1)
- Un F à 1 et n2 DDL est le carré d'un t de Student à n2 DDL. F 1-n2, alpha = t^2n2, alpha/2
- Cette loi sert à la comparaison de variances en particulier dans la comparaison de deux variances et dans la comparaison de moyennes par la méthode de l'analyse de la variance.

Table de Fischer-Snedecor

ν_2	α \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14
13	0,050	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,60	2,55
	0,025	6,55	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,20	3,08
	0,010	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,86
	0,005	11,4	8,19	6,93	6,23	5,79	5,48	5,25	5,08	4,94	4,82	4,72	4,51
14	0,050	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,53	2,48
	0,025	6,41	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,24	3,21	3,15	3,09	2,98
	0,010	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,70
	0,005	11,1	7,92	6,68	6,00	5,56	5,26	5,03	4,86	4,72	4,60	4,51	4,30
15	0,050	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,42
	0,025	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,96	2,89
	0,010	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,56
	0,005	10,8	7,70	6,48	5,80	5,37	5,07	4,85	4,67	4,54	4,42	4,25	4,12
16	0,050	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,37
	0,025	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,89	2,82
	0,010	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,45
	0,005	10,6	7,51	6,30	5,64	5,21	4,91	4,69	4,52	4,38	4,27	4,10	3,97
18	0,050	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,29
	0,025	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,77	2,70
	0,010	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,85	3,71	3,60	3,51	3,37	3,27
	0,005	10,2	7,21	6,08	5,37	4,96	4,66	4,44	4,28	4,14	4,03	3,86	3,73
20	0,050	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,28	2,23
	0,025	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,68	2,60
	0,010	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,71	3,56	3,45	3,37	3,23	3,13
	0,005	9,94	6,99	5,82	5,17	4,76	4,47	4,26	4,09	3,96	3,85	3,68	3,55
22	0,050	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,47	2,40	2,35	2,30	2,23	2,18
	0,025	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70	2,60	2,53
	0,010	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	3,02
	0,005	9,73	6,81	5,65	5,02	4,61	4,32	4,11	3,94	3,81	3,70	3,54	3,41
25	0,050	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,41	2,34	2,28	2,24	2,16	2,11
	0,025	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68	2,61	2,51	2,44
	0,010	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,46	3,32	3,21	3,13	2,99	2,89
	0,005	9,48	6,60	5,46	4,84	4,43	4,15	3,94	3,78	3,64	3,54	3,37	3,25
30	0,050	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,16	2,09	2,04
	0,025	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,41	2,34
	0,010	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,06	2,98	2,84	2,74
	0,005	9,18	6,35	5,24	4,62	4,23	3,95	3,74	3,58	3,45	3,34	3,18	3,06
35	0,050	4,12	3,27	2,87	2,64	2,49	2,37	2,29	2,22	2,16	2,11	2,04	1,99
	0,025	5,48	4,11	3,52	3,18	2,96	2,80	2,68	2,58	2,50	2,44	2,34	2,27
	0,010	7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,20	3,07	2,96	2,88	2,74	2,64
	0,005	8,98	6,19	5,09	4,48	4,09	3,81	3,61	3,45	3,32	3,21	3,05	2,93
40	0,050	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,07	2,00	1,95
	0,025	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,29	2,21
	0,010	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,88	2,80	2,66	2,56
	0,005	8,83	6,07	4,98	4,37	3,99	3,71	3,51	3,35	3,22	3,12	2,95	2,83
45	0,050	4,06	3,20	2,81	2,58	2,42	2,31	2,22	2,15	2,10	2,05	1,97	1,92
	0,025	5,38	4,01	3,42	3,09	2,86	2,70	2,58	2,49	2,41	2,35	2,25	2,17
	0,010	7,23	5,11	4,25	3,77	3,45	3,23	3,07	2,94	2,83	2,74	2,61	2,51
	0,005	8,71	5,97	4,89	4,29	3,91	3,64	3,43	3,28	3,15	3,04	2,88	2,76
50	0,050	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2.07	2,02	1,95	1,90
	0,025	5,34	3,97	3,39	3,05	2,83	2,67	2,55	2,46	2,38	2,32	2,22	2,14
	0,010	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,18	3,02	2,88	2,78	2,70	2,56	2,46
	0,005	8,63	5,90	4,83	4,23	3,85	3,58	3,38	3,22	3,09	2,99	2,82	2,70
60	0,050	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,86
	0,025	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,17	2,09
	0,010	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,40
	0,005	8,49	5,79	4,73	4,14	3,76	3,49	3,29	3,13	3,01	2,90	2,74	2,62
80	0,050	3,96	3,11	2,72	2,48	2,33	2,21	2,12	2,05	1,99	1,95	1,88	1,82
	0,025	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,45	2,35	2,28	2,21	2,11	2,03
	0,010	6,96	4,88	4,04	3,56	3,25	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55	2,41	2,32
	0,005	8,33	5,67	4,61	4,03	3,65	3,39	3,19	3,03	2,91	2,80	2,64	2,52

TABLE VI — DISTRIBUTION DE FISHER-SNEDECOR

La table fournit, pour différents nombres de degrés de liberté (ν_1 : nombre de degrés de liberté du numérateur et ν_2 : nombre de degrés de liberté du dénominateur), la valeur critique $F_{\alpha(\nu_1,\nu_2)}$ correspondant à divers seuils de signification. La première colonne de la table indique la valeur de ν_1, la deuxième fournit celle de α et la première rangée donne celle de ν_2.

Exemple : pour $\nu_1 = 4$ et $\nu_2 = 18$: $F_{0,05} = 2,93$

ν_2	α \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14
1	0,050	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	245
	0,025	648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	977	983
2	0,050	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4
	0,025	38,5	39,0	39,2	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4
	0,010	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4
	0,005	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199
3	0,050	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,71
	0,025	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,6	14,5	14,5	14,4	14,3	14,3
	0,010	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2	27,1	26,9
	0,005	55,6	49,8	47,5	46,2	45,4	44,8	44,4	44,1	43,9	43,7	43,4	43,2
4	0,050	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,87
	0,025	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,75	8,68
	0,010	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5	14,4	14,2
	0,005	31,3	26,3	24,3	23,2	22,5	22,0	21,6	21,4	21,1	21,0	20,7	20,5
5	0,050	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,47	4,68	4,64
	0,025	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,52	6,46
	0,010	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1	9,89	9,77
	0,005	22,8	18,3	16,5	15,6	14,9	14,5	14,2	14,0	13,8	13,6	13,4	13,2
6	0,050	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,96
	0,025	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,37	5,30
	0,010	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,60
	0,005	18,6	14,5	12,9	12,0	11,5	11,1	10,8	10,6	10,4	10,2	10,0	9,88
7	0,050	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,52
	0,025	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,67	4,60
	0,010	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,35
	0,005	16,2	12,4	10,9	10,1	9,52	9,16	8,89	8,68	8,51	8,38	8,18	8,03
8	0,050	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,23
	0,025	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,20	4,13
	0,010	11,30	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,56
	0,005	14,70	11,0	9,60	8,81	8,30	7,95	7,69	7,50	7,34	7,21	7,01	6,87
9	0,050	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,03
	0,025	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,87	3,80
	0,010	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	5,01
	0,005	13,6	10,1	8,72	7,96	7,47	7,13	6,88	6,69	6,54	6,42	6,23	6,09
10	0,050	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,86
	0,025	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,62	3,55
	0,010	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,60
	0,005	12,8	9,43	8,08	7,34	6,87	6,54	6,30	6,12	5,97	5,85	5,66	5,53
11	0,050	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,79	2,74
	0,025	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,47	3,36
	0,010	9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,40	4,29
	0,005	12,2	8,91	7,60	6,88	6,42	6,10	5,86	5,68	5,54	5,42	5,32	5,10
12	0,050	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,64
	0,025	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,28	3,21
	0,010	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,05
	0,005	11,8	8,51	7,23	6,52	6,07	5,76	5,52	5,35	5,20	5,09	4,91	4,77

Table du Coefficient de corrélation

TABLE B.17 Critical Values of the Correlation Coefficient, r

ν	$\alpha(2)$: 0.50 $\alpha(1)$: 0.25	0.20 0.10	0.10 0.05	0.05 0.025	0.02 0.01	0.01 0.005	0.005 0.0025	0.002 0.001	0.001 0.0005
1	0.707	0.951	0.988	0.997	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	0.500	0.800	0.900	0.950	0.980	0.990	0.995	0.998	0.999
3	0.404	0.687	0.805	0.878	0.934	0.959	0.974	0.986	0.991
4	0.347	0.608	0.729	0.811	0.882	0.917	0.942	0.963	0.974
5	0.309	0.551	0.669	0.755	0.833	0.875	0.906	0.935	0.951
6	0.281	0.507	0.621	0.707	0.789	0.834	0.870	0.905	0.925
7	0.260	0.472	0.582	0.666	0.750	0.798	0.836	0.875	0.898
8	0.242	0.443	0.549	0.632	0.715	0.765	0.805	0.847	0.872
9	0.228	0.419	0.521	0.602	0.685	0.735	0.776	0.820	0.847
10	0.216	0.398	0.497	0.576	0.658	0.708	0.750	0.795	0.823
11	0.206	0.380	0.476	0.553	0.634	0.684	0.726	0.772	0.801
12	0.197	0.365	0.457	0.532	0.612	0.661	0.703	0.750	0.780
13	0.189	0.351	0.441	0.514	0.592	0.641	0.683	0.730	0.760
14	0.182	0.338	0.426	0.497	0.574	0.623	0.664	0.711	0.742
15	0.176	0.327	0.412	0.482	0.558	0.606	0.647	0.694	0.725
16	0.170	0.317	0.400	0.468	0.542	0.590	0.631	0.678	0.708
17	0.165	0.308	0.389	0.456	0.529	0.575	0.616	0.662	0.693
18	0.160	0.299	0.378	0.444	0.515	0.561	0.602	0.648	0.679
19	0.156	0.291	0.369	0.433	0.503	0.549	0.589	0.635	0.665
20	0.152	0.284	0.360	0.423	0.492	0.537	0.576	0.622	0.652
21	0.148	0.277	0.352	0.413	0.482	0.526	0.565	0.610	0.640
22	0.145	0.271	0.344	0.404	0.472	0.515	0.554	0.599	0.629
23	0.141	0.265	0.337	0.396	0.462	0.505	0.543	0.588	0.618
24	0.138	0.260	0.330	0.388	0.453	0.496	0.534	0.578	0.607
25	0.136	0.255	0.323	0.381	0.445	0.487	0.524	0.568	0.597
26	0.133	0.250	0.317	0.374	0.437	0.479	0.515	0.559	0.588
27	0.131	0.245	0.311	0.367	0.430	0.471	0.507	0.550	0.579
28	0.128	0.241	0.306	0.361	0.423	0.463	0.499	0.541	0.570
29	0.126	0.237	0.301	0.355	0.416	0.456	0.491	0.533	0.562
30	0.124	0.233	0.296	0.349	0.409	0.449	0.484	0.526	0.554
31	0.122	0.229	0.291	0.344	0.403	0.442	0.477	0.518	0.546
32	0.120	0.225	0.287	0.339	0.397	0.436	0.470	0.511	0.539
33	0.118	0.222	0.283	0.334	0.392	0.430	0.464	0.504	0.532
34	0.116	0.219	0.279	0.329	0.386	0.424	0.458	0.498	0.525
35	0.115	0.216	0.275	0.325	0.381	0.418	0.452	0.492	0.519
36	0.113	0.213	0.271	0.320	0.376	0.413	0.446	0.486	0.513
37	0.111	0.210	0.267	0.316	0.371	0.408	0.441	0.480	0.507
38	0.110	0.207	0.264	0.312	0.367	0.403	0.435	0.474	0.501
39	0.108	0.204	0.261	0.308	0.362	0.398	0.430	0.469	0.495
40	0.107	0.202	0.257	0.304	0.358	0.393	0.425	0.463	0.490
41	0.106	0.199	0.254	0.301	0.354	0.389	0.420	0.458	0.484
42	0.104	0.197	0.251	0.297	0.350	0.384	0.416	0.453	0.479
43	0.103	0.195	0.248	0.294	0.346	0.380	0.411	0.449	0.474
44	0.102	0.192	0.246	0.291	0.342	0.376	0.407	0.444	0.469
45	0.101	0.190	0.243	0.288	0.338	0.372	0.403	0.439	0.465
46	0.100	0.188	0.240	0.285	0.335	0.368	0.399	0.435	0.460
47	0.099	0.186	0.238	0.282	0.331	0.365	0.395	0.431	0.456
48	0.098	0.184	0.235	0.279	0.328	0.361	0.391	0.427	0.451
49	0.097	0.182	0.233	0.276	0.325	0.358	0.387	0.423	0.447
50	0.096	0.181	0.231	0.273	0.322	0.354	0.384	0.419	0.443
52	0.094	0.177	0.226	0.268	0.316	0.348	0.377	0.411	0.435
54	0.092	0.174	0.222	0.263	0.310	0.341	0.370	0.404	0.428
56	0.090	0.171	0.218	0.259	0.305	0.336	0.364	0.398	0.421
58	0.089	0.168	0.214	0.254	0.300	0.330	0.358	0.391	0.414
60	0.087	0.165	0.211	0.250	0.295	0.325	0.352	0.385	0.408

TABLE B.17 (cont.) Critical Values of the Correlation Coefficient, r

ν	$\alpha(2)$: 0.50 $\alpha(1)$: 0.25	0.20 0.10	0.10 0.05	0.05 0.025	0.02 0.01	0.01 0.005	0.005 0.0025	0.002 0.001	0.001 0.0005
62	0.086	0.162	0.207	0.246	0.290	0.320	0.347	0.379	0.402
64	0.084	0.160	0.204	0.242	0.286	0.315	0.342	0.374	0.396
66	0.083	0.157	0.201	0.239	0.282	0.310	0.337	0.368	0.390
68	0.082	0.155	0.198	0.235	0.278	0.306	0.332	0.363	0.385
70	0.081	0.153	0.195	0.232	0.274	0.302	0.327	0.358	0.380
72	0.080	0.151	0.193	0.229	0.270	0.298	0.323	0.354	0.375
74	0.079	0.149	0.190	0.226	0.266	0.294	0.319	0.349	0.370
76	0.078	0.147	0.188	0.223	0.263	0.290	0.315	0.345	0.365
78	0.077	0.145	0.185	0.220	0.260	0.286	0.311	0.340	0.361
80	0.076	0.143	0.183	0.217	0.257	0.283	0.307	0.336	0.357
82	0.075	0.141	0.181	0.215	0.253	0.280	0.304	0.333	0.328
84	0.074	0.140	0.179	0.212	0.251	0.276	0.300	0.329	0.349
86	0.073	0.138	0.177	0.210	0.248	0.273	0.297	0.325	0.345
88	0.072	0.136	0.174	0.207	0.245	0.270	0.293	0.321	0.341
90	0.071	0.135	0.173	0.205	0.242	0.267	0.290	0.318	0.338
92	0.070	0.133	0.171	0.203	0.240	0.264	0.287	0.315	0.334
94	0.070	0.132	0.169	0.201	0.237	0.262	0.284	0.312	0.331
96	0.069	0.131	0.167	0.199	0.235	0.259	0.281	0.308	0.327
98	0.068	0.129	0.165	0.197	0.232	0.256	0.279	0.305	0.324
100	0.068	0.128	0.164	0.195	0.230	0.254	0.276	0.303	0.321
105	0.066	0.125	0.160	0.190	0.225	0.248	0.270	0.296	0.314
110	0.064	0.122	0.156	0.186	0.220	0.242	0.264	0.289	0.307
115	0.063	0.119	0.153	0.182	0.215	0.237	0.258	0.283	0.300
120	0.062	0.117	0.150	0.178	0.210	0.232	0.253	0.277	0.294
125	0.060	0.114	0.147	0.174	0.206	0.228	0.248	0.272	0.289
130	0.059	0.112	0.144	0.171	0.202	0.223	0.243	0.267	0.283
135	0.058	0.110	0.141	0.168	0.199	0.219	0.239	0.262	0.278
140	0.057	0.108	0.139	0.165	0.195	0.215	0.234	0.257	0.273
145	0.056	0.106	0.136	0.162	0.192	0.212	0.230	0.253	0.269
150	0.055	0.105	0.134	0.159	0.189	0.208	0.227	0.249	0.264
160	0.053	0.101	0.130	0.154	0.183	0.202	0.220	0.241	0.256
170	0.052	0.098	0.126	0.150	0.177	0.196	0.213	0.234	0.249
180	0.050	0.095	0.122	0.145	0.172	0.190	0.207	0.228	0.242
190	0.049	0.093	0.119	0.142	0.168	0.185	0.202	0.222	0.236
200	0.048	0.091	0.116	0.138	0.164	0.181	0.197	0.216	0.230
250	0.043	0.081	0.104	0.124	0.146	0.162	0.176	0.194	0.206
300	0.039	0.074	0.095	0.113	0.134	0.148	0.161	0.177	0.188
350	0.036	0.068	0.088	0.105	0.124	0.137	0.149	0.164	0.175
400	0.034	0.064	0.082	0.098	0.116	0.128	0.140	0.154	0.164
450	0.032	0.060	0.077	0.092	0.109	0.121	0.132	0.145	0.154
500	0.030	0.057	0.074	0.088	0.104	0.115	0.125	0.138	0.146
600	0.028	0.052	0.067	0.080	0.095	0.105	0.114	0.126	0.134
700	0.026	0.048	0.062	0.074	0.088	0.097	0.106	0.116	0.124
800	0.024	0.045	0.058	0.069	0.082	0.091	0.099	0.109	0.116
900	0.022	0.043	0.055	0.065	0.077	0.086	0.093	0.103	0.109
1000	0.021	0.041	0.052	0.062	0.073	0.081	0.089	0.098	0.104