Exercices et Solutions

Série de TD N° 01 : Ex. 5

Une variable aléatoire continue *x* est caractérisée par la densité de probabilité

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,b} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} \quad ; \quad x \in]-\infty, +\infty[.$$

Vérifier que cette loi est bien normalisée. Calculer $< x >$ et $D(x) =< (x-< x >)^2 >$

Solution :

On sait que

$$dP = w(x) \cdot dx \;\; \Rightarrow \int dP = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,b} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} \cdot dx$$

On fait le changement de variable suivant :

$$\frac{x-a}{b} = y \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{b} = dy \quad \Rightarrow \; dx = b \cdot dy$$

$$dP = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot b \cdot dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy$$

Sachant que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\, y^2} \cdot dy = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \;\; ; \quad avec \quad \beta = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta y^2} \cdot dy = \sqrt{2\pi}$$

Alors

$$dP = 1$$

D’où cette loi est bien normalisée.

Le calcul de $< x >$

On sait que :

$$< x > = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot w(x) \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} \cdot dx$$

On utilise le changement de variable précédent, l'intégrale devient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} \cdot dx \qquad \rightarrow \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (by + a) \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot b \cdot dy$$

$$< x > = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b} \int_{-\infty}^{+\infty} (by + a) \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot b \cdot dy$$

$$< x > = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b} b \left(\int_{-\infty}^{+\infty} by \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy + \int_{-\infty}^{+\infty} a \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy \right)$$

$$< x > = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b} b \left(b \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy + a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy \right)$$

D'après les propriétés de ce genre d'intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy = \sqrt{2\pi}$$

$$\boxed{< x > = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(0 + a\sqrt{2\pi} \right) = a}$$

Le calcul de $D(x) = < (x - < x >)^2 >$:

$$D(x) = < (x - < x >)^2 > = < x^2 > - < x >^2$$

Puisque $< x > = a \;\Rightarrow\; < x >^2 = a^2$. Calculons alors $< x^2 > = ?$

$$< x^2 > = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot w(x) \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} \cdot dx \qquad (*)$$

Utilisons le changement de variable précédent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} \cdot dx \qquad \rightarrow \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (by+a)^2 \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot b \cdot dy$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (by+a)^2 \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot b \cdot dy = \int_{-\infty}^{+\infty} [(by)^2 + 2a \cdot b \cdot y + a^2] \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot b \cdot dy$$

$$= b \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(by)^2 e^{-\frac{y^2}{2}} + 2a \cdot b \cdot y e^{-\frac{y^2}{2}} + a^2 e^{-\frac{y^2}{2}}\right] \cdot dy$$

$$= b \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} (by)^2 e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy + \int_{-\infty}^{+\infty} 2a \cdot b \cdot y e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy + \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy\right\}$$

On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\beta\, y^2} \cdot dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \beta^{-3\backslash 2} \qquad avec\ \beta = 1\backslash 2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (by)^2 e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy = b^2 \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy = b^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1\backslash 2)^{-3\backslash 2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2a \cdot b \cdot y e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a^2 e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy = a^2 \sqrt{2\pi}$$

Alors

$$= b \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} (by)^2 e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy + \int_{-\infty}^{+\infty} 2a \cdot b \cdot y e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy + \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy\right\} =$$

$$= b\left\{b^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1\backslash 2)^{-3\backslash 2} + 0 + a^2 \sqrt{2\pi}\right\} = b(b^2 + a^2)\sqrt{2\pi}$$

Et en fin de $(*)$

$$< x^2 > = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b} b(b^2 + a^2)\sqrt{2\pi} = b^2 + a^2$$

Alors

$$D(x) = < (x - < x >)^2 > = < x^2 > - < x >^2 = b^2 + a^2 - a^2 = b^2$$

$$\boxed{D(x) = b^2}$$