نظرية التقدير و فترات الثقة

يوجد لدينا نوعان من التقدير الإحصائي:

1. **التقدير لنقطة Point estimate**
2. **التقدير لفترة Interval estimate أو مجال الثقة.**

- **التقدير لنقطة Point estimate**

المقصود بهذا النوع هو تقدير معلمة المجتمع المجهولة بإحصائية نحسب قيمتها من بيانات عينة عشوائية مسحوبة من هذا المجتمع.

نقوم بتقدير المعلمة بقيمة واحدة فقط مثلا عند سحب عينة من مجتمع ما و قمنا بحساب:

✓ المتوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$ فإنه يعتبر تقدير لنقطة معلمة المجتمع μ.

✓ تباين العينة S^2 فإنه يعتبر تقدير لنقطة لمعلمة المجتمع σ^2.

✓ النسبة $\hat{p}$ فإنها تعتبر تقديرا لنقطة لمعلمة المجتمع P.

○ التقدير لنقطة يعطي قيمة واحدة لمعلمة المجتمع الذي نريد تقديرها **حيث** لا يمكننا الحكم على مدى دقة هذه القيمة في تمثيل المعلمة الحقيقية في المجتمع **لذا** يفضل الاعتماد على النوع الثاني من التقدير الإحصائي ألا و هو التقدير لفترة او مجال الثقة.

- **التقدير لفترة Interval estimate**

هو عبارة عن تقدير معلمة المجتمع بمدى (فترة) معين من القيم باحتمال معين و هذا الاحتمال يسمى **مستوى الثقة** و يرمز له بالرمز **$(1-\alpha)\%$.** لذلك سميت الفترة بفترة الثقة.

مستوى الثقة يعطينا مدى ثقتنا أن هذه المعلمة ستقع بين الحد الأدنى و الحد الأعلى للفترة.

فيما يلي سنتعرف على كيفية التقدير بمجال ثقة (فترة ثقة) لكل من:

1. **إنشاء فترة الثقة لمتوسط المجتمع μ في حالة العينات الكبيرة و العينات الصغيرة الحجم.**
2. **إنشاء فترة ثقة للنسبة في المجتمع P.**

3. إنشاء فترة ثقة للفرق بين متوسطين في مجتمعين.

4. إنشاء فترة ثقة للفرق بين نسبتين لظاهرة ما في مجتمعين.

1) فترة الثقة للوسط الحسابي للمجتمع μ (في حالة العينات الكبيرة) n≥30

إذا كانت العينة المسحوبة من المجتمع كبيرة (n≥30) فإن توزيع معاينة $\bar{X}$ يتبع توزيع طبيعي بمتوسط حسابي = **μ** و انحراف معياري (خطأ معياري) = $\sigma_{\bar{X}}$ أو $S_{\bar{X}}$ حيث:

✓ إذا كانت **σ** للمجتمع معلومة $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow$

فإن فترة الثقة للوسط الحسابي بمستوى ثقة (1-α)% هي: $\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} * \sigma_{\bar{X}}$

حيث: الحد الأعلى = $\bar{X} + Z_{\alpha/2} * \sigma_{\bar{X}}$

الحد الأدنى = $\bar{X} - Z_{\alpha/2} * \sigma_{\bar{X}}$

✓ إذا كانت **σ** للمجتمع غير معلومة $S_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} \Rightarrow$

في هذه الحالة نستعمل تباين وانحراف العينة كتقدير لتباين وانحراف المجتمع المجهول، ويكون مجال الثقة كمايلي:

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} * S_{\bar{X}}$$

الحد الأعلى = $\bar{X} + Z_{\alpha/2} * S_{\bar{X}}$

الحد الأدنى = $\bar{X} - Z_{\alpha/2} * S_{\bar{X}}$

قيم Z لأكثر معاملات الثقة استخداما في الواقع العملي:

1-α	α	$Z_{\alpha/2}$
90%	10%	1.65
95%	5%	1.96
99%	1%	2.58

2) فترة الثقة للوسط الحسابي للمجتمع μ (في حالة العينات الصغيرة n<30 و σ للمجتمع غير معلومة)

عندما تكون n < 30 ، σ للمجتمع غير معلومة فإن فترة الثقة ل μ هي: $\bar{X} \pm t_{(n-1),\alpha/2} * S_{\bar{X}}$

- توزيع t هو توزيع شبيه بالتوزيع الطبيعي المعياري في أنه توزيع متصل و متماثل و وسطه الحسابي يساوي 0 إلا أن انحرافه المعياري لا يساوي 1.
- لتوزيع t معلمة واحدة فقط تسمى درجة الحرية df.
- في حالة إنشاء فترة الثقة لمتوسط المجتمع فإن درجة الحرية =حجم العينة- 1 أي أن: Df = n-1

3) فترة الثقة للنسبة في المجتمع P (حالة العينات الكبيرة)

في هذه الحالة فإن توزيع معاينة $\hat{P}$ يتبع توزيع طبيعي بوسط P و انحراف معياري $\sigma_{\hat{P}}$ حيث:

✓ إذا كانت P للمجتمع معلومة $\Rightarrow \sigma_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{P*(1-P)}{n}}$

✓ إذا كانت P للمجتمع غير معلومة $\Rightarrow \sigma_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{\hat{P}*(1-\hat{P})}{n}}$

الصيغة الثانية هي التي سوف تستخدم في إنشاء فترة الثقة ل P لأن P عندما نقوم بتقديرها فإنها تكون غير معلومة.

و بالتالي فإن فترة الثقة ل P بمستوى معنوية % (1-α) هي: $\hat{P} \pm Z_{\alpha/2} * \sigma_{\hat{P}}$

4) فترة الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين (μ1-μ2) في حالة العينات الكبيرة ($n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$).

إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين كل منها يتبع التوزيع الطبيعي الأول بمتوسط = μ_1 و تباين = σ_1^2 و الثاني بمتوسط= μ_2 و تباين = σ_2^2 . تم سحب من المجتمع الأول عينة حجمها n_1 بمتوسط $\bar{X}_1$ و سحب من المجتمع الثاني عينة حجمها n_2 بمتوسط $\bar{X}_2$ فإن:

توزيع معاينة الفرق $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يتبع توزيعا طبيعيا بمتوسط = μ_1 - μ_2 و تباين $\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}2}$ حيث:

$$\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

الانحراف المعياري (الخطأ المعياري) للفرق $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ هو $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

في حالة عدم معلومية كل من σ^2_1، σ^2_2 فإننا نستخدم بدلا منها S_1^2، S_2^2 على الترتيب و تصبح $\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}2}$ هي $S^2_{\bar{X}_1-\bar{X}2}$ حيث:

$$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

فترة الثقة تكون في هذه الحالة:

- ✓ **في حالة معلومية σ_2، σ_1** $\Rightarrow (\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm Z_{\alpha/2}*\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$

- ✓ **في حالة عدم معلومية σ_2، σ_1** $\Rightarrow (\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm Z_{\alpha/2}*S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$

التحويل من توزيع طبيعي الى توزيع طبيعي قياسي للمتوسط $\bar{X}$	التحويل من توزيع طبيعي الى توزيع طبيعي قياسي للمتغير X (الدرجة المعيارية)	الخطأ المعيارى
$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$	$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

تحويل لحساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي القياسي من الجدول

$$P(Z < a) = \Phi(a), \qquad P(Z > a) = 1 - P(Z < a) = 1 - \Phi(a),$$
$$P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

المساحة التقريبية تحت المنحنى الطبيعي

الطبيعي القياسي	الطبيعي	المساحة
(-1,1)	$(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$	68%
(-2,2)	$(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$	95%
(-3,3)	$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$	99.7%

مستوى المعنوية	درجة الثقة	قيمة $Z_{\alpha/2}$
0.10	0.90	1.65
0.05	0.95	1.96
0.01	0.99	2.58

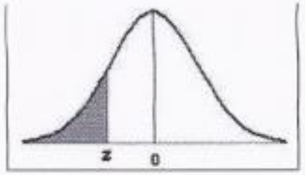
تقدير فترة الثقة

$$\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

نظرية النهاية المركزية

$$\mu(\bar{X}) = \mu, \ \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

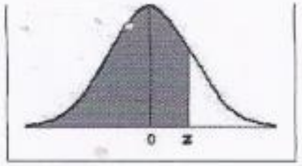
جدول التوزيع الطبيعي القياسي



المساحة المظللة تمثل $\Phi(a) = P(Z < a)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

جدول التوزيع الطبيعي القياسي



المساحة المظللة تمثل $\Phi(a) = P(Z < a)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

جدول التوزيع الطبيعي

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

حلول سلسلة تمارين رقم 02: نظرية التقدير

حل التمرين الثالث: (الوظيفة الثانية)

.1

المجتمع الأول U1	**3**	**7**	**8**
المجتمع الثاني U2	**2**	**4**	

الفرق بين المجتمعين

U1-U2		
	2	**4**
3	1	-1
7	5	3
8	6	4

اللون الرمادي عبارة عن حاصل الفرق بين المجتمعين

$$\mu_{U1-U2}=\frac{1+5+6-1+3+4}{6}=3=\mu_{U1}-\mu_{U2}=6-3=3$$

متوسط الفرق بين المجتمعين

$$\mu_{U1}=\frac{3+7+8}{3}=6 \qquad \mu_{U2}=\frac{2+4}{2}=3$$

متوسط المجتمع الأول

متوسط المجتمع الثاني

حساب التباين للمجتمع الأول، المجتمع الثاني و تباين الفرق بين المجتمعين

المجتمع الأول	∑(xi-µ1)^2	
3	**9**	
7	**1**	
8	**4**	
المجموع	**14**	
		التباين **4,67**
		∑(xi-µ1)^2/N1

المجتمع الثاني	∑(xi-μ2)^2		
2	**1**		
4	**1**		
	2		
		1	**التباين**
			∑(xi-μ2)^2/N2

حساب تباين الفرق بين المجتمعين:

الفرق بين المجتمعين			
1	**4**		
5	**4**		
6	**9**		
-1	**16**		
3	**0**		
4	**1**		
	34		
		5,67	**التباين**

يمكن ببساطة ملاحظة أن:

تباين الفرق بين المجتمعين هو مجموع تباين المجتمعين

$$\delta_{U1-U2}^{2} = \delta_{U1}^{2} + \delta_{U2}^{2} = 5.67 = 4.67 + 1$$

تباين الفرق بين المجتمعين

تباين المجتمع الأول

تباين المجتمع الثاني

2. بعد اثبات العلاقات السابقة يمكن تطبيقها عدديا كما يلي:

لدينا المعطيات الاتية:

$$\mu_1 = 27.3 \qquad \mu_2 = 15.6 \qquad \delta_1 = 0.16 \qquad \delta_2 = 0.08$$

$$\mu_{U1-U2} = \mu_1 - \mu_2 = 27.3 - 15.6 = 11.7$$

$$\delta^2_{U1-U2} = \delta^2_1 + \delta^2_2 = (0.16)^2 + (0.08)^2 = 0.032 \Leftrightarrow \delta = 0.18$$

يمكن ببساطة شديدة أن يتم التأكد من العلاقة التالية وذلك باستعمال الجدول الاحتمالي للتوزيع الطبيعي المعياري:

$$P(-1.96 \le Z \le 1.96) = 0.95$$
$$P(-1.96 \le Z \le 1.96) = \Phi(1.96) - \Phi(-1.96) = \Phi(1.96) - (1 - \Phi(1.96))$$
$$= \Phi(1.96) - 1 + \Phi(1.96) = 2 * \Phi(1.96) - 1 = 2 * 0.9750 - 1 = 0.95$$

بعد التأكد من العلاقة السابقة، يمكن تعويض القيمة المعيارية Z بالإضافة الى إجراء بعض العمليات للحصول على ما يلي:

$$P\left(-1.96 \le \frac{\bar{x} - \mu}{\delta / \sqrt{n}} \le 1.96\right) = 0.95$$

$$P\left(-1.96 * \delta/\sqrt{n} \le \bar{x} - \mu \le 1.96 * \delta/\sqrt{n}\right) = 0.95$$
$$P\left(-1.96 * \delta/\sqrt{n} - \bar{x} \le -\mu \le 1.96 * \delta/\sqrt{n} - \bar{x}\right) = 0.95$$
$$P\left(\bar{x} + 1.96 * \delta/\sqrt{n} \ge \mu \ge \bar{x} - 1.96 * \delta/\sqrt{n}\right) = 0.95$$
$$P\left(\bar{x} - 1.96 * \delta/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{x} + 1.96 * \delta/\sqrt{n}\right) = 0.95$$

الان يمكننا كتابة مجال الثقة (فترة الثقة) لتقدير متوسط المجتمع وفق العلاقة الاتية:

$$P\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} * \delta_{\bar{x}} \le \mu \le \bar{x} + Z_{\alpha/2} * \delta_{\bar{x}}\right)$$

حيث:

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

يمكن إعادة صياغة مجال الثقة على النحو الاتي:

$$\mu \in \left[\bar{x} \pm Z_{\alpha/2} * \delta_{\bar{x}} \right]$$

في حالة:

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

يصبح مجال الثقة يكتب على الشكل الأتي:

$$P\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} * \frac{\delta}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\alpha/2} * \frac{\delta}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \right)$$

ملاحظة01: كي لا تختلط الأمور(الرموز الرياضية المستعملة في المراجع المختلفة لمادة الاحصاء، الاحصاء الرياضي، الاحصاء الاستدلالي والاحصاء التطبيقي)- يمكن للطالب الاستفادة من الرموز الاتية-.

$$Z_{\alpha/2} = -Z_{\alpha/2} = Z_{1-\alpha/2} = -Z_{1-\alpha/2} = Z_{\frac{1-\alpha}{2}} = -Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$$
$$\alpha = 5\% = 0.05 \Leftrightarrow 1-\alpha = 95\% = 0.95$$
$$Z_{0.05/2} = -Z_{0.05/2} = Z_{1-0.05/2} = -Z_{1-0.05/2} = Z_{\frac{1-0.05}{2}} = -Z_{\frac{1-0.05}{2}}$$
$$Z_{0.025} = -Z_{0.025} = Z_{0.9750} = -Z_{0.9750} = Z_{0.475} = -Z_{0.475}$$
$$1.96 = 1.96 = 1.96 = 1.96 = 1.96 = 1.96$$

الأمر يرجع الى اختلاف جداول التوزيع الطبيعي المعياري المستعملة

ملاحظة02: ما تم ذكره بالنسبة لتقدير متوسط المجتمع باستعمال مجال الثقة ينطبق على تقدير كل من:

النسبة، الفرق بين متوسطي مجتمعين، الفرق بين نسبتين.

مثلا: لتقدير النسبة بمجال نستعمل العلاقة الاتية.

$$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

ملاحظة03: فترة الثقة للمتوسط μ في حالة σ غير معلومه.

في هذه الحالة يجب التفرقة بين حالتين هما: الاولى في حال ان حجم العينة اكبر من (30) والثانية في حال ان حجم العينة اقل من (30).

1. **إذا كان حجم العينة (n≥30)** نستخدم الفترة في الحالة الاولى مع استخدام قيمة s (انحراف العينة) بدلاً من انحراف المجتمع σ المجهول. وبالتالي تصبح فترة للمتوسط الثقة كالتالي:

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

2. **عندما يكون التوزيع طبيعياً ولكن قيمة الانحراف المعياري للمجتمع غير معلومة وحجم العينة صغير** فإننا لا نستطيع استخدام التوزيع الطبيعي لتحديد فترات الثقة لمتوسط المجتمع، ولكن يمكننا استخدام توزيع ***t***.

هذا التوزيع متماثل حول متوسط الصفر ولكنه منبسط عن التوزيع الطبيعي القياسي ، ولهذا فان جزاءاً أكبر من مساحته تقع عند الأطراف.

وبينما يوجد توزيع طبيعي قياسي واحد ، فإن هناك توزيعاً ***t*** مختلفاً لكل حجم للعينة **n** . ولكن مع تزايد **n** فإن توزيع ***t*** يقترب من التوزيع الطبيعي القياسي.

وتكون فترة الثقة **95%** لوسط المجتمع غير المعلوم عند استخدام توزيع ***t*** هى :

$$\bar{x} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

تقدير الفترة لمتوسط المجتمع: وجدنا فيما سبق أن تقدير النقطة نادراً ما يساوي المعلمة التي نرغب في تقديرها، لذلك فإننا نحدد فترة تحتوي على مجموعة من القيم تتضمن فيما بينها قيمة معلمة المجتمع، وتسمى هذه الفترة **بتقدير (فترة) الثقة**، **واحتمال** وقوع المعلمة في هذه الفترة يسمى **درجة الثقة**.

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

حيث تتحدد قيمة $Z_{\alpha/2}$ حسب درجة الثقة (أو مستوى المعنوية) كما يلي:

إذا كانت درجة الثقة 90% فإن $Z_{\alpha/2} = 1.65$

وإذا كانت درجة الثقة 95% فإن $Z_{\alpha/2} = 1.96$

وإذا كانت درجة الثقة 99% فإن $Z_{\alpha/2} = 2.58$

درجة الثقة	قيمة α (مستوى المعنوية) المناظر
0.99	0.01
0.95	0.05
0.90	0.1

ملاحظات هامة

- **إذا كانت قيمة المعلمة σ مجهولة نستخدم قيمة الانحراف المعياري للعينة S بدلا عنها كتقدير لها.**
- **قيم $Z_{\alpha/2}$ ستستخدم في كثير من العلاقات تحت موضوع التقدير واختبارات الفروض.**

مثال: حل التمرين 04 من سلسلة التمارين رقم 02 والمتعلقة بنظرية التقدير.

حل التمرين 04:

$n=100 \qquad \bar{X}=1200 \qquad S=250 \qquad \alpha=0.05 \qquad 1-\alpha=0.95$

$$\mu \in \left(\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} * S_{\bar{x}}\right) \Leftrightarrow \mu \in \left(\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} * S/\sqrt{n}\right)$$

$$\mu \in \left(1200 \pm 1.96 * 250/\sqrt{100}\right) \Leftrightarrow \mu \in (\underbrace{1200-1.96*25}_{\text{الحد الأدنى لمجال الثقة}};\underbrace{1200+1.96*25}_{\text{الحد الأعلى لمجال الثقة}})$$

$$\mu \in (1151 \quad ; \quad 1249)$$

$$1-\alpha=95\% \qquad \alpha=5\% \qquad Z_{\alpha/2}=Z_{0.05/2}=Z_{0.025}=\pm 1.96$$

ملاحظة01: تم استعمال تباين العينة كتقدير لتباين المجتمع المجهول.

ملاحظة02: قيم Z يتم استخراجها من الجدول المخصص للتوزيع المعياري.

ملاحظة03: يمكن حساب $Z_{1-\alpha/2}$ و $Z_{\alpha/2}$ من الجدول للقيم الموجبة وللقيم السالبة، او نكتفي باستخراج قيمة واحدة ونستنتج القيمة الاخرى.

$$Z_{\alpha/2}=-1.96 \qquad Z_{1-\alpha/2}=+1.96$$

كما يمكننا عرض طريقة الحل على النحو الاتي:

$$n = 100, \quad \bar{x} = 1200, \quad S = 250, \quad 1-\alpha = 0.95 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$P\left[\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[1200 - (1.96)\frac{250}{\sqrt{100}} \le \mu \le 1200 + (1.96)\frac{250}{\sqrt{100}}\right] = 0.95$$

$$P\left[1200 - 49 \le \mu \le 1200 + 49\right] = 0.95$$

$$P\left[1151 \le \mu \le 1249\right] = 0.95$$

مثال اخر: حل التمرين 05 من سلسلة التمارين رقم 02 والمتعلقة بنظرية التقدير.

$$\bar{x} = 11.6 \quad , S = 4.1$$

$$n = 225, \quad 1-\alpha = 0.90 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1.65$$

$$P\left[\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[11.6 - (1.65)\frac{4.1}{\sqrt{225}} \le \mu \le 11.6 + (1.65)\frac{4.1}{\sqrt{225}}\right] = 0.90$$

$$P\left[11.6 - 0.45 \le \mu \le 11.6 + 0.45\right] = 0.90$$

$$P\left[11.15 \le \mu \le 12.05\right] = 0.90$$

عدد الاسر ذات الدخل المحدود

حل التمرين 07:

$$n = 500 \qquad 200 \qquad \alpha = 5\% \Leftrightarrow 1-\alpha = 95\%$$

نسبة الاسر ذات الدخل المحدود

$$\pi = \frac{200}{500} = 0.4 \qquad 1-\pi = 1-0.4 = 0.6$$

$$\delta_\pi = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} = \sqrt{\frac{0.4*0.6}{500}} = \sqrt{0.00048} = 0.022$$

خطأ المعاينة وهو الخطأ المعياري

$$IC = [0.4 - 1.96*0.022; 0.4 + 1.96*0.022]$$

$$IC = [0.36; 0.44]$$

مجال الثقة

حل التمرين09: (الوظيفة رقم 03).

$$N = 194 \qquad n = 40$$

حجم المجتمع   **حجم العينة**

عدد المؤسسات التي ستستفيد من الاعفاء الضريبي هي 9 مؤسسات(هي المؤسسات التي توظف اكثر من 135 عامل واكثر)

1.التقدير النقطي هو نسبة المؤسسات التي توظف 135 عامل وأكثر $\pi = 9/40 = 0.225$ أي 22.5 %

2.خطأ المعاينة وهو الخطأ المعياري: $\delta_\pi = \sqrt{\frac{\pi*(1-\pi)}{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\frac{0.225*0.775}{40}} * \sqrt{\frac{194-40}{194-1}}$
$= 0.92$

3.التقدير بمجال عند مستوى ثقة 95%:

$$IC = [\pi - 1.96*\delta_\pi ; \pi + 1.96*\delta_\pi]$$
$$IC = [0.225 - 1.96*0.92 ; 0.225 + 1.96*0.92]$$
$$IC = [-1.57 ; 2.02]$$