

## الفصل الثاني: دراسة استقرارية السلاسل الزمنية

قبل القيام بنمذجة السلسلة الزمنية و التنبؤ يجب في البداية التأكد من الخصائص العشوائية للسلسلة، فإذا كان الأمل الرياضي و التباين للسلسلة ثابتين عبر الزمن نقول عندئذٍ أن السلسلة مستقرة و مقبولة للنمذجة و التنبؤ. فالسلسلة الزمنية المستقرة هي التي تتغير مستوياتها عبر الزمن مع ثبات الأمل و التباين عبر الزمن أي عدم وجود اتجاه عام لا بزيادة لا بنقصان.

### 1. الخصائص الإحصائية لاستقرارية السلسلة الزمنية

نقول عن السلسلة  $Y_t$  أنها مستقرة إذا حققت الشروط التالية:

$$E(Y_t) = E(Y_{t+h}) = \mu \quad \text{A. ثبات المتوسط عبر الزمن:}$$

$$\text{Var}(Y_t) = \text{Var}(Y_{t+h}) = \sigma^2 \quad \text{B. ثبات التباين عبر الزمن:}$$

C. استقلال التباين المشترك عن الزمن:

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+h} - \mu)] = \gamma_h$$

إن التمثيل البياني للسلسلة يعطينا أحياناً عن استقرارية السلسلة من عدمه، غير أن هذا لا يكفي بل يجب الاعتماد على اختبارات إحصائية متخصصة سنتعرف عليها فيما بعد.

### 2. سلسلة التشويش الأبيض أو الضجة البيضاء (Un Bruit Blanc)

تعرف سلسلة الضجة البيضاء أو التشويش الأبيض على أنها عبارة عن متتابعة من المشاهدات المستقلة فيما بينها و لها توزيعات متطابقة بمتوسط معدوم و تباين ثابت و نرسم لها بالرمز (BB)، فإذا كانت  $\zeta_t$  سلسلة تشويش ابيض يكون:

$$E(\zeta_t) = 0, \quad \forall t \quad \text{A. متوسط معدوم:}$$

$$\text{Var}(\zeta_t) = \sigma^2, \quad \forall t \quad \text{B. ثبات التباين عبر الزمن:}$$

$$\text{Cov}(\zeta_t, \zeta_s) = 0, \quad \forall t \neq s \quad \text{C. التباين المشترك معدوم:}$$

$$\zeta_t \rightarrow BB(0, \sigma^2) \quad \text{و يمكننا أن نكتب:}$$

### ملاحظة

من تعريف سلسلة الضجة البيضاء فان كل من الأمل و التباين و التباين المشترك لهذه السلسلة هي ثوابت و تختلف عن الزمن و بالتالي فهي تحقق شروط الاستقرارية، و عليه يمكننا القول أن أي سلسلة تشويش ابيض فهي مستقرة بالتعريف و لا نحتاج إلى إثبات ذلك.

### 3. دالة الارتباط الذاتي (FAC)

دالة الارتباط الذاتي (FAC) هي الدالة التي تقيس الارتباط بين السلسلة  $Y_t$  و نفس السلسلة بتأخير قدره  $h$  أي  $Y_{t-h}$  و نرمز لها بالرمز  $\rho_h$  و نكتب:

$$\rho_h = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-h})}{\sigma_{Y_t} \times \sigma_{Y_{t-h}}}$$

و عملياً فإننا نستعمل مقدر دالة الارتباط الذاتي و هي:

$$r_h = \hat{\rho}_h = \frac{\sum_{t=h+1}^n (y_t - \bar{y})(y_{t-h} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}$$

#### مثال 1

احسب قيمة دالة الارتباط الذاتي عند تأخيرات قدرها  $h = 1, h = 2, h = 3$  أي  $r_1, r_2, r_3$  للسلسلة التالية:

Obs	1	2	3	4	5	6
$Y_t$	12	11	10	10	8	9

حساب قيمة دالة الارتباط الذاتي عند تأخير قدره  $h = 1$  أي  $r_1$

Obs	$Y_t$	$Y_{t-1}$	$Y_{t-m}$	$Y_{t-1-m}$	$(Y_{t-m}) * (Y_{t-1-m})$	$(Y_{t-m})^2$
1	12		2.00			4.00
2	11	12	1.00	2.00	2.00	1.00
3	10	11	0.00	1.00	0.00	0.00
4	10	10	0.00	0.00	0.00	0.00
5	8	10	-2.00	0.00	0.00	4.00
6	9	8	-1.00	-2.00	2.00	1.00
<b>m</b>	<b>10.00</b>				<b>4.00</b>	<b>10.00</b>

حيث أن  $m$  تعبر عن متوسط  $Y$

$$r_1 = \hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{t=2}^6 (y_t - \bar{y})(y_{t-1} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^6 (y_t - \bar{y})^2} = \frac{4}{10} = 0.4$$

حساب قيمة دالة الارتباط الذاتي عند تأخير قدره  $h = 2$  أي  $r_2$

Obs	$Y_t$	$Y_{t-2}$	$Y_{t-m}$	$Y_{t-2-m}$	$(Y_{t-m})*(Y_{t-2-m})$
1	12		2.00		
2	11		1.00		
3	10	12	0.00	2	0
4	10	11	0.00	1	0
5	8	10	-2.00	0	0
6	9	10	-1.00	0	0
<b>m</b>	<b>10.00</b>				<b>0</b>

$$r_2 = \hat{\rho}_2 = \frac{\sum_{t=3}^6 (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-2} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^6 (Y_t - \bar{Y})^2} = \frac{0}{10} = 0$$

حساب قيمة دالة الارتباط الذاتي عند تأخير قدره  $h = 3$  أي  $r_3$

Obs	$Y_t$	$Y_{t-3}$	$Y_{t-m}$	$Y_{t-3-m}$	$(Y_{t-m})*(Y_{t-3-m})$
1	12		2		
2	11		1		
3	10		0		
4	10	12	0	2	0
5	8	11	-2	1	-2
6	9	10	-1	0	0
<b>m</b>	<b>10.00</b>				<b>-2.00</b>

$$r_3 = \hat{\rho}_3 = \frac{\sum_{t=4}^6 (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-3} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^6 (Y_t - \bar{Y})^2} = \frac{-2}{10} = -0.2$$

### 1.3. خواص دالة الارتباط الذاتي

A. دالة الارتباط الذاتي متناظرة حول الصفر:  $\rho(h) = \rho(-h)$

B. دالة الارتباط الذاتي محصورة بين 1 و -1:  $-1 \leq \rho_h \leq 1$

C. لما  $h = 0$  فإن  $\rho_0 = 1$ :  $\rho_0 = \frac{Cov(Y_t, Y_t)}{\sigma_{Y_t} \times \sigma_{Y_t}} = \frac{Var(Y_t)}{Var(Y_t)} = 1$

D. يسمى التمثيل البياني لقيم دالة الارتباط الذاتي بـ (Correlogramme) وتتراوح قيمه بين 1 و -1

E. تحديد قيمة التأخير  $h$ : إذا كان طول السلسلة المدروسة يقل عن 150 مشاهدة فإن قيمة التأخير

تكون:  $n/6 \leq h \leq n/3$  ، أما إذا كان طول السلسلة اكبر عن 150 مشاهدة فإن قيمة التأخير تكون:

$h = n/5$  . و عملياً إذا كانت المعطيات شهرية أو فصلية نأخذ  $h = 24$  من اجل ملاحظة كل التغيرات الشهرية و الفصلية، أما إذا كانت المعطيات يومية نأخذ قيمة التأخير  $30 \leq h \leq 36$ ، أما في حالة المعطيات السنوية فنأخذ  $15 \leq h \leq 20$  .

### 2.3. تحليل دالة الارتباط الذاتي

لقيم دالة الارتباط الذاتي (FAC) دور كبير في تحليل مركبات السلسلة الزمنية و دراسة مدى استقراريته.

A. مجال الثقة لدالة الارتباط الذاتي (FAC): في حالة العينات الكبرى اي لما يفوق حجم العينة 30 مشاهدة فان  $r_h$  تتوزع حسب التوزيع الطبيعي بمتوسط معدوم، و نكتب:

$$r_h \rightarrow N \left( 0, \text{Var} (r_h) = \frac{1}{n} \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^h r_i^2 \right) \right)$$

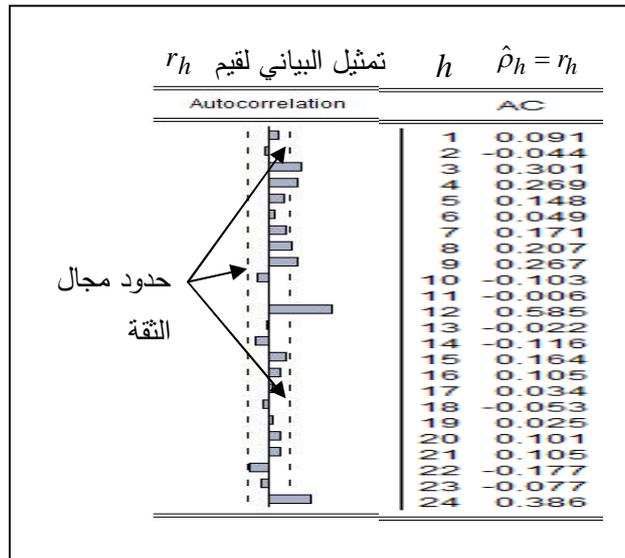
و يكون مجال الثقة بمستوي معنوية 5% هو:

$$r_h \in \left[ -1.96 \sqrt{\text{Var} (r_h)} , 1.96 \sqrt{\text{Var} (r_h)} \right]$$

فإذا كانت  $r_h$  تقع داخل مجال الثقة فإننا نقبل فرضية العدم و التي تنص على أن  $\rho_h = 0$  بمستوي معنوية 5% . و لما تكون كل معاملات الارتباط تقع داخل مجال الثقة فهي إحصائياً معدومة، و بالتالي يمكن القول أن السلسلة  $Y_t$  بدون ذاكرة و لا وجود لمركبة الاتجاه العام و لا المركبة الفصلية و بالتالي فهي مستقرة، و قيمها تقع داخل المجال:

$$r_h \in \left[ -1.96 / \sqrt{n} , 1.96 / \sqrt{n} \right]$$

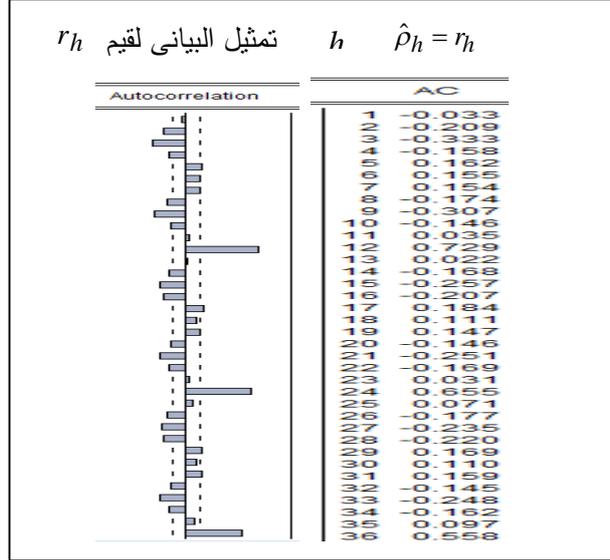
الشكل (1.2): التمثيل البياني لدالة الارتباط الذاتي (Correlogramme)



B. في حالة دراسة سلسلة ذات مشاهدات شهرية و لاحظنا أن  $r_{12}, r_{24}, \dots$  معنوياً تختلف عن الصفر أي أنها تقع خارج مجال الثقة يمكننا القول أن السلسلة تتضمن المركبة الفصلية؛

الشكل (2.2): التمثيل البياني لدالة الارتباط الذاتي (Correlogramme)

مع وجود المركبة الفصلية ضمن السلسلة المدروسة (بيانات شهرية)

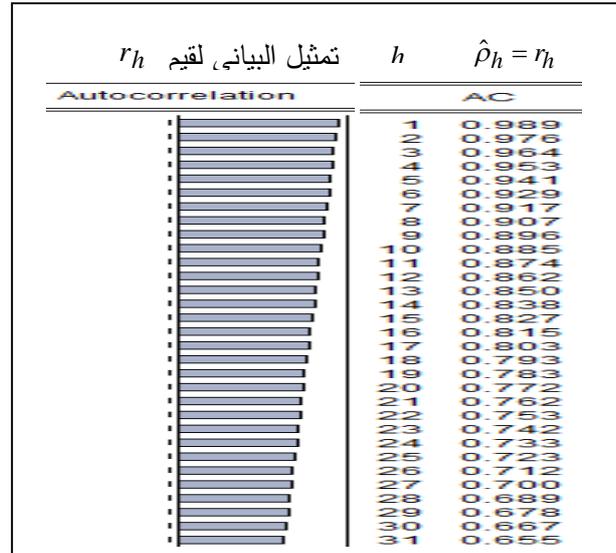


C. أو في حالة دراسة سلسلة ذات مشاهدات ربع سنوية و لاحظنا أن  $r_4, r_8, r_{12}, \dots$  معنوياً تختلف عن الصفر أي أنها تقع خارج مجال الثقة يمكننا القول أن السلسلة تتضمن المركبة الفصلية.

D. أما في حالة إذا لاحظنا أن قيم دالة الارتباط الذاتي  $r_h$  تقع خارج مجال الثقة أي أنها ذات معنوية إحصائية تختلف عن الصفر غير أنها تتناقص ببطء مع ارتفاع قيم  $h$  فان هذا يوحي بوجود مركبة الاتجاه العام ضمن السلسلة المدروسة و بان السلسلة غير مستقرة.

الشكل (3.2): التمثيل البياني لدالة الارتباط الذاتي (Correlogramme)

مع وجود مركبة الاتجاه العام ضمن السلسلة المدروسة

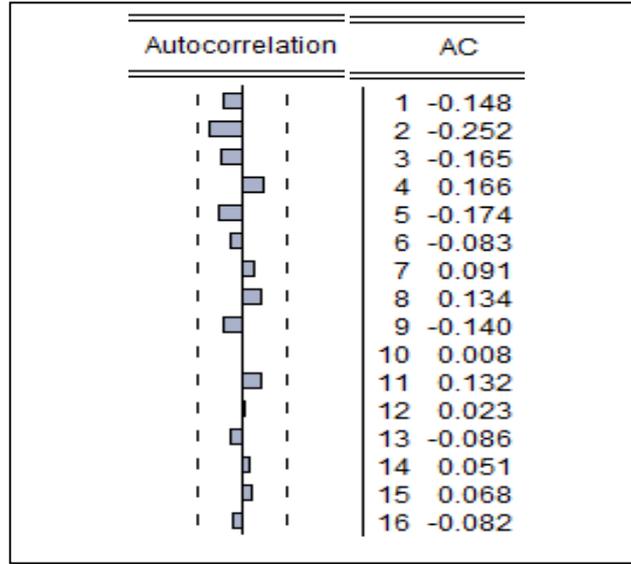


### 3.3. دالة الارتباط الذاتي للضجة البيضاء

في حالة التشويش الأبيض فان التباين المشترك معدوم أي أن:  $Cov(Y_t, Y_{t-h})=0$  و تكون دالة الارتباط الذاتي لهذا النوع من السلاسل على النحو التالي:

$$\rho_h = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{\sigma^2} & si \quad h = 0 \\ \frac{Cov(Y_t, Y_{t-h})}{\sigma_{Y_t} \times \sigma_{Y_{t-h}}} & si \quad h \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & si \quad h = 0 \\ 0 & si \quad h \neq 0 \end{cases}$$

الشكل (4.2): التمثيل البياني لدالة الارتباط الذاتي (Correlogramme) للضجة البيضاء



كل قيم دالة الارتباط الذاتي من اجل تأخيرات غير معدوم للضجة البيضاء تقع داخل مجال الثقة أي أنها ذات معنوية إحصائية معدومة.

### 4. دالة الارتباط الذاتي الجزئي (FACP)

إن دالة الارتباط الذاتي الجزئي (FACP) تقيس الارتباط بين السلسلة  $Y_t$  و نفس السلسلة بتأخير قدره  $h$  أي  $Y_{t-h}$  بعد إزالة تأثير الترابط الناتج عن القيم التي بينهما:  $(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-h+1})$  و يرمز لها بالرمز  $\phi_{hh}$  و نكتب:

$$\hat{\phi}_{hh} = \hat{\phi}_{00} = 1 \quad \text{لما } h = 0 \text{ فان:}$$

$$\hat{\phi}_{hh} = \hat{\phi}_{11} = r_1 \quad \text{لما } h = 1 \text{ فان:}$$

$$\hat{\phi}_{hh} = r_{hh} = \frac{|P_h^*|}{|P_h|} \quad \text{لما } h = 2, 3, 4, \dots \text{ فان:}$$

| | يرمز إلى محدّد المصفوفة و  $P_h$  هي مصفوفة مربعة و متناظرة ذات البعد  $h$ .

حيث أن:

$$|P_h| = \begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \cdot & \cdot & r_{h-2} & r_{h-1} \\ r_1 & 1 & r_1 & r_2 & \cdot & \cdot & r_{h-2} \\ r_2 & r_1 & 1 & r_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & r_1 & \cdot & r_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & r_1 & \cdot & r_1 & r_2 \\ r_{h-2} & r_{h-3} & \cdot & \cdot & r_1 & 1 & r_1 \\ r_{h-1} & r_{h-2} & \cdot & \cdot & \cdot & r_1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|P_h^*| = \begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \cdot & \cdot & r_{h-2} & r_1 \\ r_1 & 1 & r_1 & r_2 & \cdot & \cdot & r_2 \\ r_2 & r_1 & 1 & r_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & r_1 & \cdot & r_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & r_1 & \cdot & r_1 & \cdot \\ r_{h-2} & r_{h-3} & \cdot & \cdot & r_1 & 1 & r_{h-1} \\ r_{h-1} & r_{h-2} & \cdot & \cdot & \cdot & r_1 & r_h \end{vmatrix}$$

## مثال 2

احسب قيمة دالة الارتباط الذاتي الجزئي عند تأخير قدره  $h=2$  أي  $r_{22}$  في المثال 1 لدينا:

$$\hat{\phi}_{22} = r_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2}$$

و على أساس قيم دالة الارتباط الذاتي عند التأخيرات 1، 2 نعوض في العبارة أعلاه نجد أن:

$$\hat{\phi}_{22} = r_{22} = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2} = \frac{0 - (0.4)^2}{1 - (0.4)^2} = -0.19$$

### مثال 3

احسب قيمة دالة الارتباط الذاتي الجزئي عند تأخير قدره  $h=3$  أي  $r_{33}$  في المثال 1 لدينا:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_{33} = r_{33} &= \frac{|P_3^*|}{|P_3|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_1 \\ r_1 & 1 & r_2 \\ r_2 & r_1 & r_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 1 & r_1 \\ r_2 & r_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1 \times \begin{vmatrix} 1 & r_2 \\ r_1 & r_3 \end{vmatrix} - r_1 \times \begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_2 & r_3 \end{vmatrix} + r_1 \times \begin{vmatrix} r_1 & 1 \\ r_2 & r_1 \end{vmatrix}}{1 \times \begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & 1 \end{vmatrix} - r_1 \times \begin{vmatrix} r_1 & r_1 \\ r_2 & 1 \end{vmatrix} + r_2 \times \begin{vmatrix} r_1 & 1 \\ r_2 & r_1 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{1 \times (r_3 - r_1 r_2) - r_1 \times (r_1 r_3 - r_2^2) + r_1 \times (r_1^2 - r_2)}{1 \times (1 - r_1^2) - r_1 \times (r_1 - r_1 r_2) + r_2 \times (r_1^2 - r_2)} \\ &= \frac{r_1^3 - r_1 r_2 (2 - r_2) + r_3 (1 - r_1^2)}{1 - r_2^2 - 2 r_1^2 (1 - r_2)}\end{aligned}$$

و على أساس قيم دالة الارتباط الذاتي عند التأخيرات 1، 2 و 3 نعوض في العبارة أعلاه نجد أن:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_{33} = r_{33} &= \frac{r_1^3 - r_1 r_2 (2 - r_2) + r_3 (1 - r_1^2)}{1 - r_2^2 - 2 r_1^2 (1 - r_2)} \\ &= \frac{(0.4)^3 - 0.4 \times 0 \times (2 - 0) - 0.2 \times (1 - (0.4)^2)}{1 - (0)^2 - 2 \times (0.4)^2 \times (1 - 0)} = -0.15\end{aligned}$$

و باستعمال برنامج Eviews9.0 تحصلنا على نفس النتائج:

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC
1	0.400	0.400	0.400
2	0.000	-0.190	-0.190
3	-0.200	-0.153	-0.153
4	-0.500	-0.442	-0.442
5	-0.200	0.208	0.208

#### 1.4. خواص دالة الارتباط الذاتي الجزئي

A. مجال الثقة لدالة الارتباط الذاتي الجزئي (FACP) في حالة العينات الكبرى أي لما يفوق حجم العينة 30 مشاهدة فإن  $r_{hh}$  تنتوزع حسب التوزيع الطبيعي بمتوسط معدوم (Quenouille, 1949)، و

$$r_{hh} \rightarrow N\left(0, \text{Var}(r_{hh}) = \frac{1}{n}\right) \quad \text{نكتب:}$$

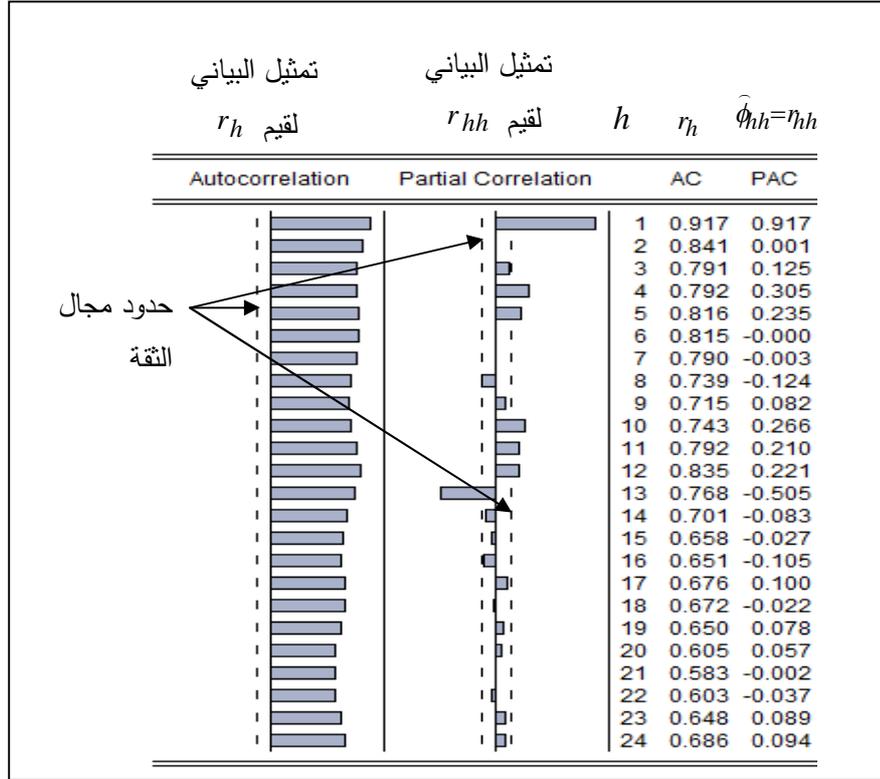
و يكون مجال الثقة بمستوي معنوية 5% هو:

$$r_{hh} \in \left[ -1.96 / \sqrt{n}, 1.96 / \sqrt{n} \right]$$

فإذا كانت  $r_{hh}$  تقع داخل مجال الثقة فإننا نقبل فرضية العدم و التي تنص على أن  $\phi_{hh} = 0$

بمستوي معنوية 5%.

B. يسمى التمثيل البياني لقيم دالة الارتباط الذاتي الجزئي بـ (Correlogramme Partielle) الشكل (5.2): التمثيل البياني لدالة الارتباط الذاتي الجزئي (Correlogramme Partielle)



#### 2.4. طريقة (Yule-Walker) لحساب دالة الارتباط الذاتي الجزئي

إن العبارة السابقة لحساب دالة الارتباط الذاتي الجزئي تتميّز بصعوبة الاستخدام عند قيم  $h$  الكبيرة، ولهذا فإن هناك تعريفاً آخر لحساب (FACP) يعتمد على معادلات (Yule-Walker) من العلاقة التالية :

$$\hat{\phi}_{ii} = r_{ii} = \frac{r_i - \sum_{j=1}^{i-1} (r_{i-1,j} \times r_{i-j})}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} (r_{i-1,j} \times r_j)} \quad i = 2,3,\dots, h$$

$$r_{ij} = r_{i-1,j} - r_{ii} r_{i-1,i-j} \quad j = 1,2,\dots, i-1 \quad \text{avec} \quad r_{i,i} = r_{ii} \quad \text{حيث أن:}$$

#### ملاحظة

إن تحليل كل من دالتي الارتباط الذاتي البسيط (FAC) و الجزئي (FACP) دور كبير و أساسي في تحديد نوع النموذج المعتمد في تقدير السلسلة الزمنية المدروسة كما سنرى ذلك لاحقاً.

## 5. توصيف حالات النماذج غير مستقرة

تسمى اختبارات الاستقرارية باختبارات جذر الوحدة و من أهمها: ديكي فولر (DF)، ديكي فولر المطور (ADF)، فيليبس بيرون (PP) و (KPSS). ولا يقتصر دور هذه الاختبارات في الكشف عن استقرارية السلسلة فقط بل لها دور في تحديد سبب عدم الاستقرارية و الطريقة المثلى في جعل السلسلة مستقرة في حالة ثبوت عدم استقراريته. و بغرض فهم هذه الاختبارات نعمل في البداية على تعريف نوعين من النماذج غير مستقرة وهما:

### 1.5. نموذج TS (Trend Stationary)

هذا النوع من النماذج يكتب على النحو التالي:

$$Y_t = f(t) + \zeta_t = a_0 + a_1t + \zeta_t$$

حيث أن:  $\zeta_t$  هو تشويش ابيض، و  $f(t)$  دالة في الزمن.

$$E(Y_t) = a_0 + a_1t \quad \text{هو: لدينا الأمل للسلسلة } Y_t$$

أي أن متوسط السلسلة  $Y_t$  مرتبط بالزمن و بالتالي فالسلسلة  $Y_t$  غير مستقرة، غير انه يمكننا جعل السلسلة  $Y_t$  مستقرة عن طريق تقدير  $\hat{a}_0$  و  $\hat{a}_1$  بطريقة MCO ثم نقوم بنزع مركبة الزمن من السلسلة الأصلية:  $[Y_t - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1t)]$  و هي مساوية لسلسلة التشويش الأبيض و بالتالي هي مستقرة بالتعريف. و على اعتبار أن سبب عدم الاستقرارية في السلسلة  $Y_t$  معلومة يسمى هذا النوع من عدم الاستقرارية بعدم الاستقرارية التحديدية (La non stationnarité déterministe).

### 2.5. نموذج DS (Differency Stationary)

يكتب هذا النوع من النماذج على النحو التالي:

$$Y_t = Y_{t-1} + \zeta_t$$

حيث أن:  $\zeta_t$  هو تشويش ابيض:  $\zeta_t \rightarrow BB(0, \sigma_\zeta^2)$

و على أساس أن  $\zeta_t$  هو تشويش ابيض و بالتالي فان السلسلة  $Y_t$  تمثل صيرورة عشوائية، و يعتبر هذا النوع من النماذج الأكثر استعمالاً و الأكثر شيوعاً في التطبيقات المالية.

$$Y_t = Y_{t-1} + \zeta_t \Rightarrow Y_{t-1} = Y_{t-2} + \zeta_{t-1} \quad \text{لدينا:}$$

$$Y_t = Y_{t-2} + \zeta_{t-1} + \zeta_t \Rightarrow Y_{t-2} = Y_{t-3} + \zeta_{t-2} \quad \text{نعوض في عبارة } Y_t \text{ نجد أن:}$$

$$Y_t = Y_{t-3} + \zeta_{t-2} + \zeta_{t-1} + \zeta_t \quad \text{نعوض في عبارة } Y_t \text{ نجد أن:}$$

$$Y_t = Y_0 + \sum_{i=1}^t \zeta_i \quad \text{و هكذا بتكرار هذه العملية نجد أن:}$$

$$\text{Var}(Y_t) = t \times \sigma_\zeta^2 \quad \text{و يكون:}$$

و بالتالي فان السلسلة  $Y_t$  غير مستقرة، و على أساس الكتابة الأخيرة للسلسلة  $Y_t$  فان  $Y_t$  هي مجموع الأخطاء للسلسلة من 1 إلى  $t$ ، فإذا حدث اضطراب في توقيت ما فان هذا يستمر فيما بعد و يبعد السلسلة عن المتوسط  $Y_0$  و هذا يؤدي إلى عدم ثبات التباين عبر الزمن و بالتالي عدم استقرارية السلسلة. و على اعتبار أن سبب عدم الاستقرارية في هذا النوع من النماذج ناتج عن الاضطرابات العشوائية، فإنها تسمى بعدم الاستقرارية العشوائية (La non stationnarité Aléatoire).

و بصفة عامة يمكننا كتابة نماذج DS على النحو التالي:  $Y_t = c + Y_{t-1} + \zeta_t$  حيث أن:  $c$  يمثل الحد الثابت، و نميز الحالتين:

- إذا كان:  $c = 0$  فان النموذج من نوع DS بدون مشتق؛
- إذا كان:  $c \neq 0$  فان النموذج من نوع DS مع مشتق.

لاحظ أنه يمكننا كتابة:  $Y_t - Y_{t-1} = \Delta Y_t = c + \zeta_t$

و بالتالي فان السلسلة  $\Delta Y_t$  هي سلسلة مستقرة، و نسمي عندئذ السلسلة  $Y_t$  بأنها سلسلة متكاملة من الدرجة الأولى، و نكتب:

$$Y_t \rightarrow I(1)$$

و بصفة عامة يمكننا اخذ الفروق من الدرجة  $d$  اللازمة و الضرورية فقط لجعل السلسلة مستقرة، و

يمكننا أن نكتب:  $\nabla^d Y_t = c + \zeta_t$

و بالتالي يمكننا القول أن السلسلة  $\nabla^d Y_t$  هي سلسلة مستقرة، و نسمي عندئذ السلسلة  $Y_t$  بأنها سلسلة متكاملة من الدرجة  $d$ ، و نكتب:

$$Y_t \rightarrow I(d)$$

$$d = 1 \Rightarrow \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

$$d = 2 \Rightarrow \nabla^2 Y_t = (Y_t - Y_{t-1}) - (Y_{t-1} - Y_{t-2}) \quad \text{حيث أن:}$$

## 6. اختبار ديكي فولر البسيط (Dickey et Fuller, 1979)

يرتكز اختبار DF على أن سبب عدم الاستقرارية في نماذج DS هو أن معامل  $Y_{t-1}$  يساوي 1، غير أن تقدير هذا النوع من النماذج على ارض الواقع قد يعطي نتائج مغايرة، و عليه يكون النموذج الموجه للتقدير هو على النحو التالي:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \zeta_t \Leftrightarrow \Delta Y_t = (\phi_1 - 1) Y_{t-1} + \zeta_t$$

و بصفة عامة يمكننا إضافة الحد الثابت و مركبة الاتجاه العام و هذا بغرض البحث عن سبب عدم الاستقرارية إن وجدة و تحديد نوعها هل هي تحديديه أم عشوائية؟ و بالتالي فان النماذج الثلاثة التي يرتكز عليها هذا الاختبار هي:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \zeta_t \Leftrightarrow \Delta Y_t = (\phi_1 - 1) Y_{t-1} + \zeta_t \quad \text{النموذج 1:}$$

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + c + \zeta_t \Leftrightarrow \Delta Y_t = (\phi_1 - 1) Y_{t-1} + c + \zeta_t \quad \text{النموذج 2:}$$

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + c + bt + \zeta_t \Leftrightarrow \Delta Y_t = (\phi_1 - 1) Y_{t-1} + c + bt + \zeta_t \quad \text{النموذج 3:}$$

حيث أن:  $\zeta_t$  هو تشويش ابيض يخضع للتوزيع الطبيعي:  $\zeta_t \rightarrow BB(0, \sigma^2)$

و الفرضية المدومة لهذا الاختبار تنص على أن السلسلة المدروسة  $Y_t$  تقبل جذر وحدة و  $(H_0: |\phi_1| = 1)$  وبالتالي فهي غير مستقرة، اما الفرضية البديلة فتعني السلسلة مستقرة  $(H_1: |\phi_1| < 1)$ .

$$t_{\hat{\phi}_1} = \frac{\hat{\phi}_1 - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_1}} \quad \text{و الإحصائية المحسوبة لهذا الاختبار هي:}$$

أما الإحصائية المجدولة لهذا الاختبار فلقد قام كل من ديكي و فولر بإنشاء جدول خاص بالاختبار و هذا بالاعتماد على مقارنة مونت كارلو (Monte-Carlo)، و عن قاعدة القرار فان هذا الاختبار يختلف عن الاختبارات الأخرى فإذا كانت الإحصائية المحسوبة  $t_{\hat{\phi}_1}$  اكبر من الإحصائية المجدولة نقبل الفرضية المدومة و نقول أن السلسلة  $Y_t$  تملك جذر وحدة وبالتالي فهي غير مستقرة. و عملياً فإننا نعتد على منهجية ديكي فولر الموضحة في الشكل 15 من اجل اختبار استقرارية السلسلة المدروسة و تحديد سبب عدم الاستقرارية في حالة ثبوتها.

### 7. اختبار ديكي فولر المطور (Dicky et Fuller, 1981)

في نماذج اختبار DF البسيط حد الخطأ العشوائي  $\varepsilon_t$  هو تشويش ابيض بالفرض، غير أن هذا عملياً غير محقق في كل الحالات، و عليه فان ديكي و فولر يقترحان في حالة و جود ارتباط ذاتي للأخطاء ضمن نماذج جذر الوحدة استعمال  $\Delta Y_{t-j}$  كمتغيرات مساعدة ضمن نماذج الاختبار يمكنها إصلاح الارتباط الذاتي للأخطاء، ويسمى هذا الاختبار بديكي فولر المطور ADF، و عليه فان نماذج هذا الاختبار تكون على النحو التالي:

$$\Delta Y_t = (\phi_1 - 1)Y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \gamma_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t \quad \text{النموذج 4:}$$

$$\Delta Y_t = (\phi_1 - 1)Y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \gamma_j \Delta Y_{t-j} + c + \varepsilon_t \quad \text{النموذج 5:}$$

$$\Delta Y_t = (\phi_1 - 1)Y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \gamma_j \Delta Y_{t-j} + c + bt + \varepsilon_t \quad \text{النموذج 6:}$$

حيث أن:  $\varepsilon_t$  هو تشويش ابيض يخضع للتوزيع الطبيعي:  $(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$   $BBN$

(P) تمثل قيمة التأخير اللازمة لتصحيح مشكل الارتباط الذاتي للبواقي ضمن النماذج الثلاثة السابقة.

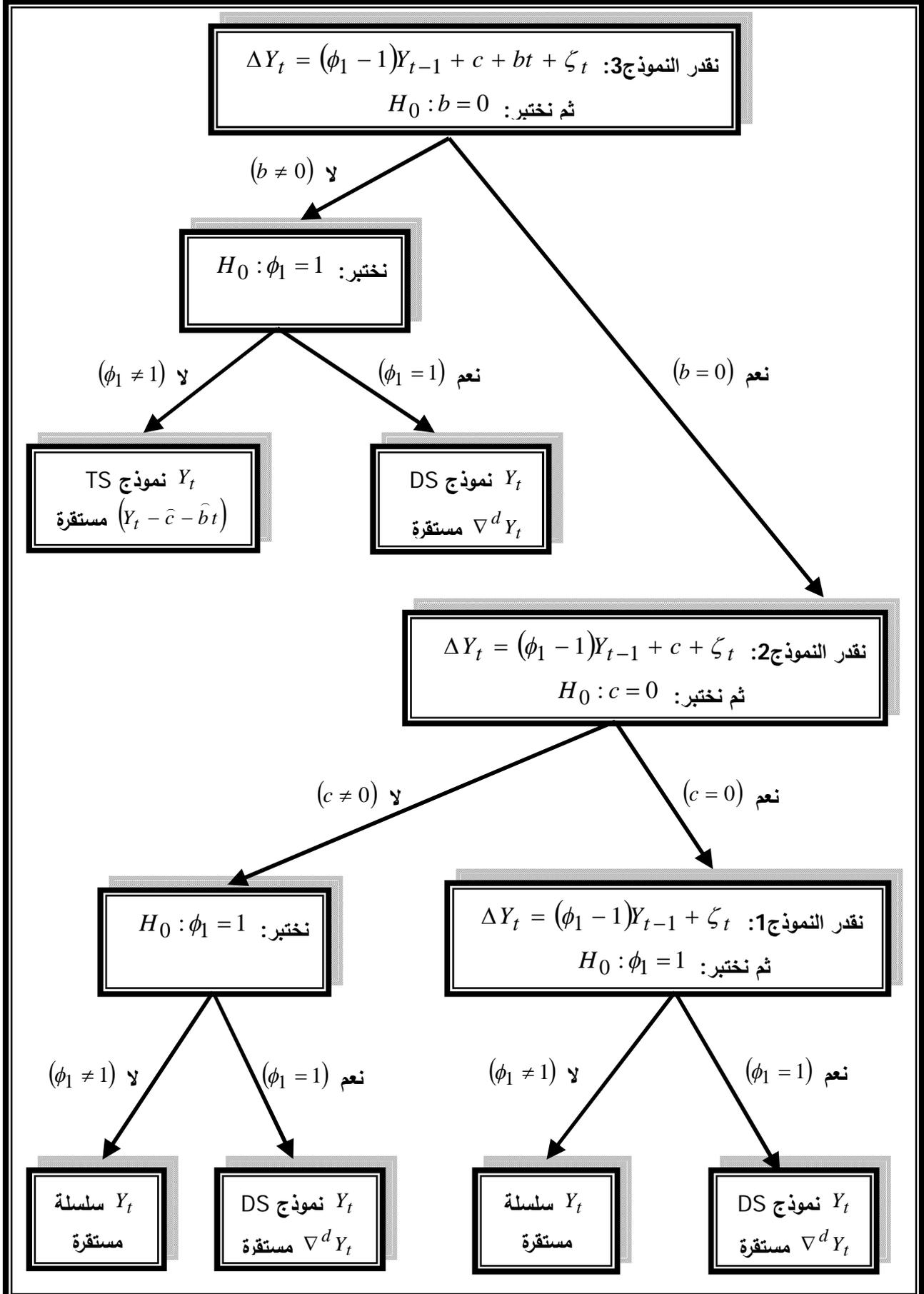
و تتم منهجية اختبار ديكي فولر المطور ADF بنفس طريقة اختبار DF، غير أن تحديد قيمة التأخير P اللازمة تتحدد على أساس تقليل قيم المعيارين: Akaike و Schwarz حيث أن:

$$AIC = n \ln \left( \frac{SCR}{n} \right) + 2K \quad \bullet \text{ قيمة إحصائية معيار Akaike:}$$

• قيمة إحصائية معيار Schwarz:  $SIC = n \ln \left( \frac{SCR}{n} \right) + K \ln(n)$

حيث أن:  $n$ : تمثل حجم عينة الدراسة،  $SCR$  مجموع مربعات البواقي،  $K$  عدد معاملات النموذج.

الشكل (6.2): المنهجية المبسطة لاختبار جذر الوحدة لديكي فولر



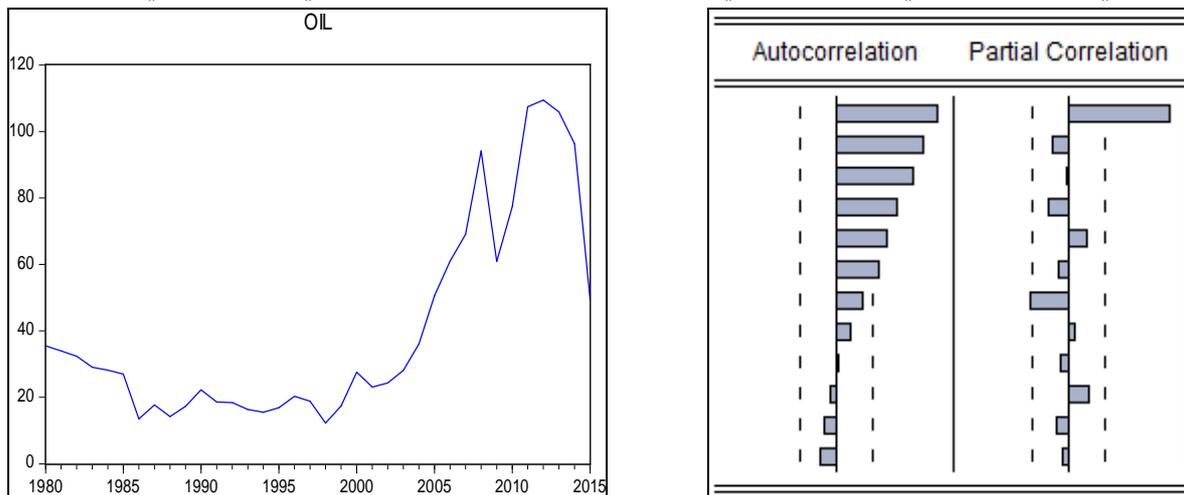
#### مثال 4

نعمل في هذا المثال على دراسة استقرارية سلسلة سعر برميل البترول *OIL* حسب سلة OPEC خلال الفترة 1980 إلى غاية 2015، و الجدول التالي يوضح قيم السلسلة:

وحدة القياس: دولار أمريكي\$/ برميل

ans	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
OIL	35.52	34	32.38	29.04	28.2	27.01	13.53	17.73	14.24	17.31	22.26	18.62
ans	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
OIL	18.44	16.33	15.53	16.86	20.29	18.86	12.28	17.44	27.6	23.12	24.36	28.1
ans	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
OIL	36.05	50.59	61	69.04	94.1	60.86	77.38	107.46	109.45	105.87	96.29	49.49

نعتمد في تحليل هذه السلسلة على برنامج Eviews9.0، حيث في البداية نعرض بيانياً التطور التاريخي للسلسلة و دالتي الارتباط الذاتي البسيطة و الجزئية لهذه السلسلة في الشكل التالي:



من خلال تتبعنا لتطور التاريخي لأسعار البترول يمكننا التأكيد على أنها خضعت لتغيرات كبيرة خلال فترة الدراسة، ففي البداية عانت أسعار البترول من انخفاض شديد حيث سجلت اقل قيمة لها بـ 12 دولار للبرميل سنة 1998 لنتزايد فيما بعد خلال الفترة من 2000 إلى 2014 وبلغت أعلى قيمة لها عام 2012 بـ 109 دولار للبرميل. و إحصائياً يفسر هذا الاضطراب الكبير في قيم السلسلة بعدم ثبات التباين مما يوحي بعدم استقرارية هذه السلسلة، و هذا ما سنتأكد منه باستعمال الاختبارات الإحصائية.

أما فيما يخص دالة الارتباط الذاتي، نلاحظ أن معاملات الارتباط المحسوبة من أجل الفجوات  $h=12$  اغلبها معنوياً تختلف عن الصفر (تقع خارج مجال الثقة)، ويظهر عدم استقرارية السلسلة مع الانخفاض السريع لقيم دالة الارتباط الذاتي مع تزايد قيم التأخيرات.

و بغرض القيام باختبار ADF لجذر الوحدة يجب في البداية تحديد درجة التأخير في فروق السلسلة اللازمة لتصحيح الارتباط الذاتي للأخطاء المحتمل، و من اجل الكشف عن ذلك فإننا نعتمد على النموذج الأعم أي النموذج 3 و 6. و النتائج مسجلة في الجدول التالي:

Schwarz	Akaike	المعيار قيمة التأخير
8.19	8.05	P=0
8.31	8.13	P=1
8.44	8.22	P=2
8.54	8.27	P=3
8.64	8.31	P=4

و بالاعتماد على المعيارين: Akaike، Schwarz يمكننا القول انه لا وجود للارتباط الذاتي للأخطاء ضمن النموذج و بالتالي لا داعي لاستعمال فروق السلسلة و قيمة التأخير الأمثل هي P=0. و من اجل تأكيد هذه النتيجة فإننا نعين دالة الارتباط الذاتي لسلسلة بواقي النموذج الثالث في اختبار DF، و في الشكل أدناه نلاحظ أن معاملات الارتباط الذاتي المحسوبة من أجل الفجوات h=12 كلها ذات معنوية احصائية معدومة (تقع داخل مجال الثقة)، و بالتالي يمكننا قبول الفرضية المعدومة بمستوى معنوية 5% و الإقرار بعدم وجود ذاكرة ضمن سلسلة بواقي النموذج 3 أي أنها مستقلة عن بعض و تمثل تشويش ابيض (Un Bruit blanc).

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.055	0.055	0.1168	0.733
		2	-0.049	-0.052	0.2113	0.900
		3	0.063	0.069	0.3703	0.946
		4	-0.214	-0.227	2.2860	0.683
		5	-0.005	0.034	2.2873	0.808
		6	0.277	0.260	5.7173	0.456
		7	-0.208	-0.248	7.7199	0.358
		8	-0.041	-0.030	7.8015	0.453
		9	-0.178	-0.248	9.3863	0.402
		10	-0.186	-0.007	11.183	0.343
		11	-0.005	-0.106	11.185	0.428
		12	-0.012	-0.103	11.193	0.512

و بإتباع منهجية ديكي فولر لدراسة الاستقرارية نعمل في البداية على تقدير النموذج 3 و نتيجة التقدير مسجلة في الجدول التالي:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
OIL(-1)	-0.218725	0.107417	-2.036211	0.0501
C	0.097721	4.508389	0.021675	0.9828
@TREND("1980")	0.501807	0.320788	1.564295	0.1276
R-squared	0.114986	Mean dependent var		0.399143
Adjusted R-squared	0.059673	S.D. dependent var		13.45780
S.E. of regression	13.05009	Akaike info criterion		8.057284
Sum squared resid	5449.759	Schwarz criterion		8.190600
Log likelihood	-138.0025	Hannan-Quinn criter.		8.103305
F-statistic	2.078818	Durbin-Watson stat		1.537774
Prob(F-statistic)	0.141644			

إن اختبار المعنوية لمعامل مركبة الزمن يؤدي بنا إلى قبول فرضية عدم بمستوى معنوية 5%، و الإقرار بعدم وجود مركبة الاتجاه العام ضمن السلسلة المدروسة و بالتالي فان سبب عدم الاستقرارية ليس تحديدي و إنما عشوائي و النموذج من نوع DS. و تكون الخطوة الموالية تقدير النموذج 2 و النتيجة في الجدول الموالي.

و بنفس الطريقة استعمال اختبار المعنوية للثابت يؤدي بنا إلى قبول فرضية عدم بمستوى معنوية 5%، و الإقرار بعدم وجود الحد الثابت في نموذج جذر الوحدة و بالتالي فان النموذج من نوع DS بدون مشتق.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
OIL(-1)	-0.095656	0.074723	-1.280140	0.2094
C	4.217568	3.738505	1.128143	0.2674
R-squared	0.047310	Mean dependent var		0.399143
Adjusted R-squared	0.018441	S.D. dependent var		13.45780
S.E. of regression	13.33314	Akaike info criterion		8.073828
Sum squared resid	5866.498	Schwarz criterion		8.162705
Log likelihood	-139.2920	Hannan-Quinn criter.		8.104508
F-statistic	1.638759	Durbin-Watson stat		1.555482
Prob(F-statistic)	0.209422			

و تكون الخطوة الأخيرة هي تقدير النموذج 1 و النتيجة في الجدول التالي:

Null Hypothesis: OIL has a unit root		
Exogenous: None		
Lag Length: 0 (Fixed)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-0.627899	0.4381
Test critical values:		
1% level	-2.632688	
5% level	-1.950687	
10% level	-1.611059	

\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

و بالاعتماد على الاحتمال المرافق لاختبار جذر الوحدة يمكننا قبول فرضية عدم بمستوى معنوية 5%، و الإقرار بوجود جذر وحدة ضمن السلسلة المدروسة و بالتالي فهي غير مستقرة و من نوع DS بدون مشتق، و من اجل جعل هذه السلسلة مستقرة نخضعها للفرق الأول ثم ندرس استقراريتها في النموذج 1 الذي تم قبول شكله و نتيجة هذا الاختبار للفرق الأول هي:

Null Hypothesis: D(OIL) has a unit root		
Exogenous: None		
Lag Length: 0 (Fixed)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-4.432267	0.0001
Test critical values:		
1% level	-2.634731	
5% level	-1.951000	
10% level	-1.610907	

\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

و بالاعتماد على الاحتمال المرافق لاختبار جذر الوحدة يمكننا رفض فرضية عدم بمستوى معنوية 1%، و الإقرار بعدم وجود جذر وحدة ضمن السلسلة المدروسة و بالتالي فهي مستقرة.

### 8. اختبار فيليبس بيرون (Phillips et Perron, 1988)

يعتمد اختبار فيليبس بيرون (PP) على التصحيح غير معلمي لتحيز الموجود في إحصائية اختبار ديكي فولر و الناتج عن مشكلتي الارتباط الذاتي و عدم تجانس التباين لبواقي نماذج جذر الوحدة، و يضم هذا الاختبار أربعة خطوات هي:

- تقدير النماذج الثلاثة لاختبار ديكي فولر بطريقة MCO و استخراج قيم الإحصائيات المحسوبة  $t_{\hat{\phi}_1}$  و بواقي النماذج  $e_t$ .

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2$$

• تقدير التباين قصير المدى للبواقي:

- تقدير معامل التصحيح أو التباين طويل المدى للبواقي:

$$S_t^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2 + 2 \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{i}{l+1}\right) \frac{1}{n} \sum_{t=i+1}^n e_t e_{t-i}$$

حيث أن قيمة التأخير  $l$  تتحدد على أساس العلاقة التالية:  $l \approx 4(n/100)^{2/9}$

- و عليه تكون الإحصائية المحسوبة لاختبار فيليبس بيرون (PP) على النحو التالي:

$$t_{\hat{\phi}_1}^* = \sqrt{\theta} \times \frac{(\hat{\phi}_1 - 1)}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_1}} + \frac{n(\theta - 1)\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_1}}{\sqrt{\theta}}$$

$$\theta = \frac{\hat{\sigma}_{\xi}^2}{S_t^2}$$

حيث أن:

و يتم مقارنة الإحصائية المحسوبة  $t_{\hat{\phi}_1}^*$  بالإحصائية المجدولة لماكي نمون (MacKinnon)، و منهجية هذا الاختبار هي نفس منهجية اختبار ديكي فولر.

### 9. اختبار KPSS (Kwiatkowski, Phillips, Schmidt et Shin, 1992)

يعتمد اختبار (KPSS) على الفرضية المعدومة التي تنص على أن السلسلة مستقرة، و يتم اختبار هذه الفرضية على أساس نموذجين فقط النموذج 2 مع وجود ثابت و النموذج 3 مع ثابت و اتجاه عام، و تحديد الإحصائية المحسوبة لهذا الاختبار يعتمد على التباين طويل المدى للبواقي  $S_t^2$  لاختبار (PP) و هي:

$$LM = \frac{1}{S_t^2} \frac{\sum_{t=1}^n \tau_t^2}{n^2}$$

$$\tau_t = \sum_{i=1}^t e_i \quad \text{حيث أن: } t = 1, 2, \dots, n$$

إذا كانت  $LM$  اكبر من الإحصائية المجدولة نرفض الفرضية المعدومة و نقول أن السلسلة غير مستقرة. و منهجية هذا الاختبار هي نفس منهجية اختبار ديكي فولر.

الجدول (1.2): الإحصائية المجدولة لاختبار (KPSS)

10%	5%	1%	مستوى المعنوية النموذج
0.347	0.463	0.739	النموذج 2
0.119	0.146	0.216	النموذج 3