حلول السلسلة رقم 01/مقياس رياضيات المؤسسة

ت01:

تحديد متغيرات القرار (Decision Variables):

X_1: عدد الوحدات المنتجة من الآلات A

X_2: عدد الوحدات المنتجة من الآلات B.

X_3: عدد الوحدات المنتجة من الآلاتC.

X_4: عدد الوحدات المنتجة من الآلاتD

2. تحديد دالة الهدف (Objective Function):

يمكن حساب هوامش الربح لكل آلة: بحيث هامش الربح يمثل الفرق بن سعر السوق و التكلفة أي:

$$MB_I = PV_i - C_i$$

$$\begin{aligned}
c_A &= (18 \times 2000) + (8 \times 4000) + (6 \times 100) = 68600 \\
c_B &= (24 \times 2000) + (12 \times 4000) + (4 \times 100) = 96400 \\
c_C &= (20 \times 2000) + (21 \times 4000) + (7 \times 100) = 124700 \\
c_D &= (16 \times 2000) + (18 \times 4000) + (5 \times 100) = 104500
\end{aligned}$$

أي:

$$\begin{cases}
MB_A = 120000 - 68600 = 51400 \\
MB_B = 116000 - 96400 = 19600 \\
MB_C = 136000 - 124700 = 11300 \\
MB_D = 150000 - 104500 = 45500
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&Max\,Z = MB_A X_1 + MB_B X_2 + MB_C X_3 + MB_D X_4 \\
&\Rightarrow Max\,Z = 51400 X_1 + 19600 X_2 + 11300 X_3 + 45500 X_4
\end{aligned}$$

3. القيود المفروضة على النموذج (The Constraints):

$$s/c \begin{cases}
18X_1 + 24X_2 + 20X_3 + 16X_4 \leq 800 \cdots \text{م}_1 \\
8X_1 + 12X_2 + 21X_3 + 18X_4 \leq 400 \cdots \text{م}_2 \\
6X_1 + 4X_2 + 7X_3 + 5X_4 \leq 40 .... l \quad \text{س} \\
X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \quad non-negative\,condition
\end{cases}$$

ت02:

تحديد متغيرات القرار (Decision Variables):

X_1: عدد الوحدات المنقولة من المستودع الأول.

X_2: عدد الوحدات المنقولة من المستودع الثاني.

2. تحديد دالة الهدف (Objective Function):

$$Max\,Z = C_1X_1 + C_2X_2$$
$$\Rightarrow Max\,Z = 10X_1 + 5X_2$$

3. القيود المفروضة على النموذج (Constraints):

$$s/c\begin{cases}1.5X_1 + X_2 \geq 30\\ X_1 + 2X_2 \quad \geq 36\\ X_1 \qquad\quad \geq 8\\ X_2 \qquad\quad \geq 6\\ X_1, X_2 \geq 0 \quad non-negative\,condition\end{cases}$$

ت03: متروك حله للطالب...

ت04:

***صياغة البرنامج الخطي:**

1.تحديد متغيرات القرار (Decision Variables):

X_1: عدد الوحدات من المنتج A.

X_2: عدد الوحدات من المنتج B.

2. تحديد دالة الهدف (Objective Function):

$$Max\,Z = C_1X_1 + C_2X_2$$
$$\Rightarrow Max\,Z = 4X_1 + 6X_2$$

3. القيود المفروضة على النموذج (Constraints):

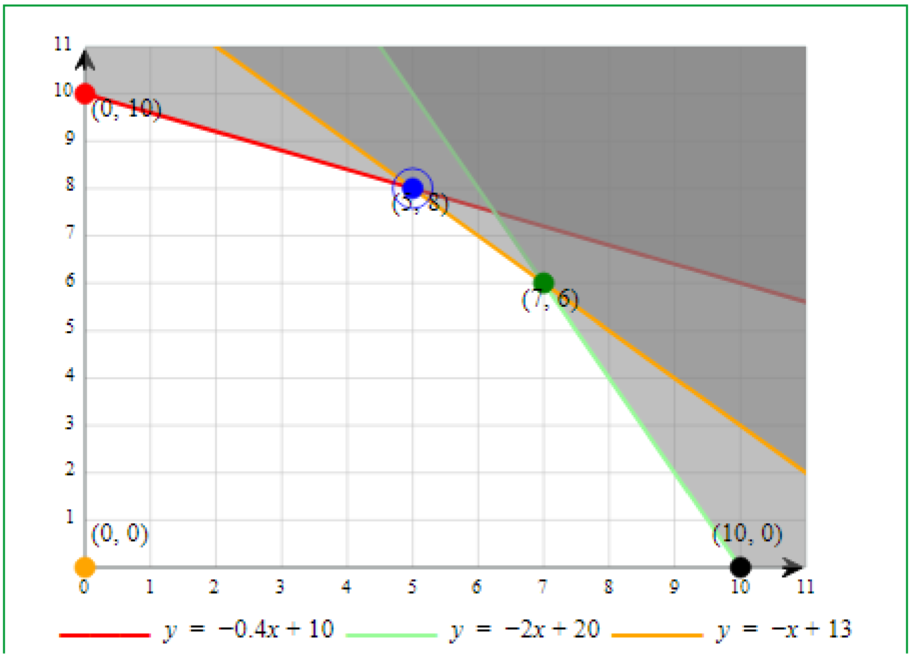
$$s/c\begin{cases}4X_1 + 10X_2 \leq 100\\ 2X_1 + X_2 \quad \leq 20\\ 3X_1 + 3X_2 \ \leq 39\\ X_1, X_2 \geq 0 \quad non-negative\,condition\end{cases}$$

***تحديد الحل الأمثل –بيانيـــا–:**

–تحويل القيود إلى معادلات :

$$s/c\begin{cases}4X_1+10X_2=100\\2X_1+X_2\quad=20\\3X_1+3X_2\ =39\\X_1,X_2\geq 0\quad non-negative\,condition\end{cases}$$

–التمثيل البياني:



تحديد قيمة دالة الهدف عند النقاط الزاوية(المنطقة المضللة تمثل المنطقة المرفوضة أما الأخرى فتمثل منطقة الحلول المقبولة):

Vertex	Lines through vertex	Value of objective
(5, 8)	$4x+10y=100$ $3x+3y=39$	68 Maximum
(0, 10)	$4x+10y=100$ $x=0$	60
(7, 6)	$2x+y=20$ $3x+3y=39$	64
(10, 0)	$2x+y=20$ $y=0$	40
(0, 0)	$x=0$ $y=0$	0

و بالتالي يكون الحل الأمثل:

Z*=68um x1=5 x2=8

ت 05: تمرين مقترح مرفق بالحل

ليكن البرنامج الخطي:

$$\min Z = 300X_1 + 800X_2$$
$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 200 \\ X_1 \le 80 \\ X_2 \ge 60 \\ X_1 ; X_2 \ge 0 \end{cases}$$

المطلوب:

1.الحل البياني

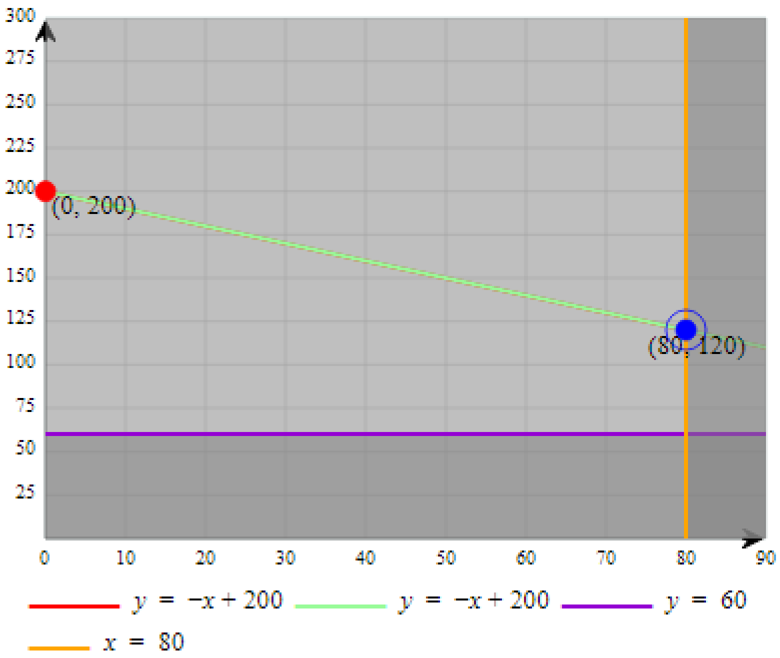
2. الحل باستخدام الطريقة المبسطة Simplex Method.

الحل البياني:

تحويل القيود إلى معادلات:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 200 \\ X_1 = 80 \\ X_2 = 60 \\ X_1 ; X_2 \ge 0 \end{cases}$$

التمثيل البياني:



Xmin: 0 Xmax: 90

Ymin: 0 Ymax: 300

Gridlines X: 10 Y: 25

تحديد قيمة دالة الهدف عند النقاط الزاوية:

Vertex	Lines through vertex	Value of objective
(80, 120)	$x + y = 200$ $x = 80$	120000 Minimum
(0, 200)	$x + y = 200$ $x = 0$	160000

الحل الأمثل :

Z*=120000 x1=80 x2=120

2. الحل باستخدام الطريقة المبسطةSimplex Method:

بما أنه يوجد قيد مساواة و قيد من شكل أكبر أو يساوي فإن الحل يكون بإستخدام طريقة BIG M

الشكل الموسع:.......راجع المحاضرة

$$\min Z = 300X_1 + 800X_2 + 0S_2 + 0S_3 + MR_1 + MR_3$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + R_1 = 200 \\ X_1 + S_2 \leq 80 \\ X_2 - S_3 + R_3 \geq 60 \\ X_1; X_2; S_2; S_3; R_1; R_3 \geq 0 \end{cases}$$

الحل الأساسي:

$$X_1 = 0 \; X_2 = 0 \quad S_2 = 80 \quad S_3 = 0 \quad R_1 = 200 \quad R_3 = 60 \quad Z = 260M$$

الجداول المبسطة:

Tab01

C_j / V de base		300 X1	800 X2	0 S_2	0 S_3	+M R_1	+ M R_3	bi
+M	R_1	1	1	0	0	1	0	200
0	S_2	1	0	1	0	0	0	80
+M	R_3	0	1	0	-1	0	1	60
Z_j		M	2M	0	-M	M	M	Z= 260M
Δj		300-M	800-2M	0	M	0	0	

TAB02

C_j / V de base		300 X1	800 X2	0 S_2	0 S_3	+M R_1	bi
+M	R_1	1	0	0	1	1	140
0	S_2	1	0	1	0	0	80
800	X_2	0	1	0	-1	0	60
Z_j		M	800	0	M-800	M	Z= 140M+48000
Δj		300-M	0	0	800-M	0	

TAB03

C_j / V de base		300 X1	800 X2	0 S_2	0 S_3	+M R_1	bi
+M	R_1	0	0	-1	1	1	60
300	X_1	1	0	1	0	0	80
800	X_2	0	1	0	-1	0	60
Z_j		300	800	-M+300	M-800	M	Z= 60M+72000
Δj		0	0	M-300	-M+800	0	

TAB04

C_j / V de base		300 X1	800 X2	0 S_2	0 S_3	bi
0	S_3	0	0	-1	1	60
300	X_1	1	0	1	0	80
800	X_2	0	1	-1	0	120
Z_j		300	800	-500	0	Z= 120000
Δj		0	0	500	0	

بما أن المسألة تقليل التكاليف نتوقف عندما تكون جميع قيم السطر Δj موجبة و يكون الحل الأمثل:

$$X^*_1 = 80 \; X^*_2 = 120 \quad S_2 = 0 \quad S_3 = 60 \qquad Z^* = 120000$$

****

تمارين مقترحة بالطريقة المبسطة

تمرين 01: ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$MaxW = 8X_1 + 6X_2$$
$$S/C\begin{cases}4X_1 + 2X_2 \leq 60\\ 2X_1 + 4X_2 \leq 48\\ X_1, X_2 \geq 0\end{cases}$$

المطلوب: إيجاد الحل الأمثل باستخدام الطريقة المبسطة؟

1-الشكل الموسع (SF) :

$$MaxW = 8X_1 + 6X_2 + 0S_1 + 0S_2$$
$$S/C\begin{cases}4X_1 + 2X_2 + S_1 = 60\\ 2X_1 + 4X_2 + S_2 = 48\\ X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0\end{cases}$$

2-الحل الأساسي(BS) :

$$X_1 = 0, X_2 = 0, S_1 = 60, S_2 = 48, Z = 0$$

3-**الجدول الأولي:**

VE

	Cj		8	6	0	0	
	Basic V		X1	X2	S_1	S_2	bi
VS	0	S_1	(Pivot) 4	2	1	0	60
	0	S_2	2	4	0	1	48
	Z_j		0	0	0	0	$Z = 0$
	$\Delta_j = C_j - Z_j$		8	6	0	0	

الجدول الثاني:

VE

C_J / Basic V		X1	X2	S_1	S_2	bi
		8	6	0	0	
8	X_1	1	1/2	1/4	0	15
0	S_2	0	3	-1/2	1	18
Z_j		8	4	2	0	$Z=120$
$\Delta_j = C_j - Z_j$		0	2	-2	0	

VS

الجدول الثالث:

C_J / Basic V		X1	X2	S_1	S_2	bi
		8	6	0	0	
8	X_1	1	0	1/3	-1/6	12
6	X_2	0	1	-1/6	1/3	6
Z_j		8	6	4/3	2/3	$Z=132$
$\Delta_j = C_j - Z_j$		0	0	$-4/3$	$-2/3$	

من خلال الجدول يتبين لنا أن: $\Delta_j \le 0$ و بالتالي نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل:

$$X_1^* = 12, X_2^* = 6, S_1 = 0, S_2 = 0, Z^*(Optimal) = 132$$

تمرين02: ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$MaxW = 7X_1 + 5X_2 + 9X_3$$

$$S/C\begin{cases} 2X_1 + X_2 + 3X_3 \le 46 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 \le 27 \\ X_1 + X_3 \le 15 \\ X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{cases}$$

المطلوب:إيجاد الحل الأمثل باستخدام الطريقة المبسطة(Simplex Method)؟

1-الشكل الموسع (SF) :

$$MaxW = 7X_1 + 5X_2 + 9X_3 + 0.\sum_{i=1}^{3} S_i$$

$$S/C\begin{cases} 2X_1 + X_2 + 3X_3 + S_1 = 46 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 + S_2 = 27 \\ X_1 + X_3 + S_3 = 15 \\ X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \ge 0 \end{cases}$$

2-الحل الأساسي(BS) :

$$X_1 = 0, X_2 = 0,, X_3 = 0, S_1 = 46, S_2 = 27, S_3 = 15, Z = 0$$

-الجدول الأولي:

VE

C_J		7	5	9	0	0	0	bi
Basic V		X1	X2	X3	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	2	1	3	1	0	0	46
	S_2	1	2	1	0	1	0	27
0	S_3	1	0	1	0	0	1	15
Z_j		0	0	0	0	0	0	$Z=0$
$\Delta_j = C_j - Z_j$		8	6	9	0	0	0	

VS

الجدول الثاني:

VE

VS

Basic V \ C_J		7	5	9	0	0	0	bi
		X1	X2	X3	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	-1	1	0	1	0	-3	1
0	S_2	0	2	0	0	1	-1	12
9	X_3	1	0	1	0	0	1	15
Z_j		9	0	9	0	0	9	$Z=135$
$\Delta_j = C_j - Z_j$		-2	5	0	0	0	-9	

الجدول الثالث:

VE

VS

Basic V \ C_J		7	5	9	0	0	0	bi
		X1	X2	X3	S_1	S_2	S_3	
5	X_2	-1	1	0	1	0	-3	1
0	S_2	2	0	0	-2	1	5	10
9	X_3	1	0	1	0	0	1	15
Z_j		4	5	9	5	0	-6	$Z=140$
$\Delta_j = C_j - Z_j$		3	0	0	-5	0	6	

الجدول الرابع:

VE

VS

	C_J	7	5	9	0	0	0	bi
Basic V		X1	X2	X3	S_1	S_2	S_3	
5	X_2	0.2	1	0	-0.2	0.6	0	7
0	S_3	0.4	0	0	-0.4	0.2	1	2
9	X_3	0.6	0	1	0.4	-0.2	0	13
Z_j		6.4	5	9	2.6	1.2	0	$Z=152$
$\Delta_j = C_j - Z_j$		0.6	0	0	-2.6	-1.2	0	

الجدول الخامس:

	C_J	7	5	9	0	0	0	bi
Basic V		X1	X2	X3	S_1	S_2	S_3	
5	X_2	0	1	0	0	0.5	-0.5	6
7	X_1	1	0	0	-1	0.5	2.5	5
9	X_3	0	0	1	1	-0.5	-1.5	10
Z_j		7	5	9	2	1.5	1.5	$Z=155$
$\Delta_j = C_j - Z_j$		0	0	0	-2	-1.5	−1.5	

من خلال الجدول يتبين لنا أن: $\Delta_j \leq 0$ و بالتالي نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل:

$$X_1^* = 5, X_2^* = 6, X_3^* = 10, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0 \, , Z^*(Optimal) = 155$$