Corrigé Série d'exercices N°1

Exercice (01)

1. $\forall a \in]0,+\infty[; \exists x \; x^2+ax+1=0$.

la négation: $\exists a \in]0,+\infty[; \forall x \; x^2+ax+1 \neq 0$.

2. $\exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, e+2ex=4x+2$.

la négation: $\forall e \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, e+2ex \neq 4x+2$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2<0$

la négation: $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.

4. $a \in \mathbb{R}$ est une solution de $x^2-x-6<0 \Rightarrow \begin{cases} a \leq -2 ; \\ \vee \\ a \geq 3. \end{cases}$

la négation:

$a \in \mathbb{R}$ est une solution de $x^2-x-6<0$ et $\begin{cases} a > -2 ; \\ \wedge \\ a < 3. \end{cases}$

5. $\forall x ; x^2+x+1=0 \Rightarrow x \in \mathbb{C}$.

la négation: $\forall x ; x^2+x+1$ et $x \notin \mathbb{C}$.

6. $z=\bar{z} \Rightarrow z \in \mathbb{C}$.

la négation: $z=\bar{z}$ et $z \in \mathbb{C}$.

7. $\exists a \in]0,+\infty[; f(a)=g(a)$.

la négation: $\forall a \in]0,+\infty[; f(a) \neq g(a)$.

8. $\forall x \in \mathbb{R}_+ ; f(x) \neq 0$.

la négation : $\exists x \in \mathbb{R}_+ ; f(x)=0$.

9. $\exists a,b \in \mathbb{R} ; f(a) \neq f(b)$.

la négation: $\forall a,b \in \mathbb{R} \; f(a)=f(b)$.

10. $\exists x \in [-1,4] ; f(x) > g(x)$.

la négation: $\forall x \in [-1,4] ; f(x) \leq g(x)$.

11. $\forall y \in \mathbb{R} ; \exists x \in \mathbb{R} \; f(x) > y$.

la négation : $\exists y \in \mathbb{R} ; \forall x \in \mathbb{R} \; f(x) \leq y$.

12. $\forall x ; -1 \leq f(x) \leq 1$.

la négation: $\exists x ; f(x) \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

un escemple: la fonction : cosinus.

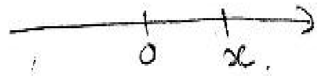
Exercice N°2:

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$; $y = 2x - 5$.
donc elle est vraie.

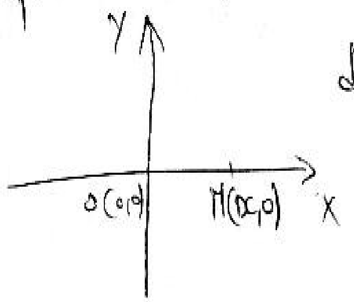
2. Soit $x \in \mathbb{R}$; $e(1+2x) = 4x+2$
$= 2(1+2x)$.

$\exists e = 2$ tel que $e(1+2x) = 4x+2$
donc elle est vraie.

3. la valeur absolu $|x|$ est la distance entre x et 0



et ~~on~~ peut dire aussi la distance entre le point $M(x,0)$ et $O(0,0)$ est $\sqrt{x^2+0} = \sqrt{x^2}$



donc $|x| = \sqrt{x^2}$.
Alors elle est vraie

4. Soit $n \in \mathbb{N}$
Si n est pair alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$

$n^2 = 4k$ donc $4 / n^2$.
Si n est impair alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$
$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2+k) + 1$ donc $n^2 - 1 = 4(k^2+k)$
alors $4 / n^2 - 1$.
Alors elle est vraie.

5. Soit $\varepsilon > 0$ est ce que il esciste $\alpha > 0$ tel que $\forall x \; / |x| < \alpha \Rightarrow |x^2| < \varepsilon$.
Soit x on cherche a trouver α tel que
$|x| < \alpha \Rightarrow |x^2| < \varepsilon$.
$|x| < \sqrt{\varepsilon}$ on choisit $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$.
alors elle est vraie.

Exercice (03):

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$, on a $4xy - 6x - 6y + 12 \neq 3$

4. $\alpha_1 = (20 + 14\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$
On suppose que α_1 est rationnel c.à.d. il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $\alpha_1 = \frac{p}{q}$
alors $20 + 14\sqrt{2} = \left(\frac{p}{q}\right)^3$ alors $\sqrt{2} = \frac{1}{14}\left(\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 20\right)$

On conclue que $\sqrt{2}$ est rationnel contradiction donc α_1 irrationnel.
la même chose pour α_2.

5. $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

$\alpha^3 = (\alpha_1 + \alpha_2)^3 = \alpha_1^3 + 3\alpha_1^2\alpha_2 + 3\alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2^3$

$= 20 + \cancel{14\sqrt{2}} + 3\left[(20+14\sqrt{2})^2(20-14\sqrt{2})\right]^{\frac{1}{3}}$

$+ 3\left[(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})^2\right]^{\frac{1}{3}} + 20 - \cancel{14\sqrt{2}}$

$= 40 + 3\left[(20+14\sqrt{2})(20^2 - (14\sqrt{2})^2)\right]^{\frac{1}{3}}$

$+ 3\left[(20-14\sqrt{2})(20^2 - (14\sqrt{2})^2\right]^{\frac{1}{3}}$

$= 40 + 3(20^2 - (14\sqrt{2})^2)^{\frac{1}{3}}\left[(20+14\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} + (20-14\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\right]$

$= 40 + 24$

6. par réccurrence :

Soit $P(n)$: $n^2 \leq 2^n \leq n!$; $n \in \mathbb{N} - \{0,1,2,3\}$

pour $n = 4$ $\quad 4^2 \leq 2^4 \leq 4!$

$16 \leq 2^4 \leq 1\times2\times3\times4$

$16 \leq 16 \leq 24$ (juste)

donc $P(n)$ elle est vraie pour $n = 4$.

On suppose que $P(k)$ est vraie pour $0 \leq k$ et on prouve que $P(n+1)$ est vraie.

On a $\quad n^2 \leq 2^n \leq n!$.

$2\times n^2 \leq 2^n \times 2 \leq 2\times n! \leq (n+1).n!$

$n^2 + \underline{2n+1} \leq n^2 + \underline{n^2} \leq 2^{n+1} \leq (n+1)!$.

$(n+1)^2 \leq 2^{n+1} \leq (n+1)!$.

Alors $P(n+1)$ est vraie.

On conclue que : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1,2,3\}\ P(n)$.

7. Soit $x > 1$ donc $0 < \frac{1}{x} < 1$.

Alors $E\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (car $E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$ et $E\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{Z}$).

8. On démontre n est impair $\Rightarrow$ (n^2-1 est divisible par 8)

pour démontrer $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ il suffit de démontrer $q \Rightarrow p$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ est impair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.

$$n^2-1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2+4k+1-1$$
$$= 4k^2+4k$$
$$= 4(k^2+k)$$

On a deux cas :

* k est pair alors $\exists k' \in \mathbb{N}$ $k = 2k'$

$$n^2-1 = 4(4k'^2+2k') = 8(2k'^2+k')$$

donc $8 / (n^2-1)$

* k est impair alors $\exists k' \in \mathbb{N}$ $k = 2k'+1$

$$n^2-1 = 4(4k'^2+4k'+1+2k'+1) = 8(2k'^2+3k'+1)$$

donc $8 / (n^2-1)$.

Alors n^2-1 n'est pas divisible par 8 $\Rightarrow$ n est pair

9. par récurrence :

Soit $P(n)$ $\sum_0^n k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 14

pour $n=0$ $P(0)$: $\sum_0^0 k^2 = \dfrac{0}{6}$

$0 = 0$ est vraie.

On suppose que $P(k)$ est vraie pour $0 \leq l \leq n$ est on prouve que $P(n+1)$ est vraie.

$$P(n+1) : \sum_0^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\sum_0^{n+1} k^2 = 0^2+1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2$$
$$= \sum_0^n k^2 + (n+1)^2$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$
$$= \frac{(n+1)\big(n(2n+1)+6(n+1)\big)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

$\boxed{4}$ Alors $P(n+1)$ est vraie donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$, Soit $\varepsilon > 0, |a| < \varepsilon$.

et on suppose que $a \neq 0$ si on choisit

$\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0$. on a $|a| < \frac{|a|}{2}$ contraduction

alors $a = 0$.

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$, on a $4xy - 6x - 6y + 12 \neq 3$.

Soit $x, y \in \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$ et on suppose que

$$4xy - 6x - 6y + 12 = 3.$$

$$y(-6 + 4x) = 6x - 9.$$

on a $x \in \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$ donc

$$y = \frac{6x - 9}{4x - 6} \quad (x \neq \tfrac{3}{2}).$$

$$y = \frac{3(2x - 3)}{2(2x - 3)} = \frac{3}{2} \text{ contraduction}$$

$y \neq \frac{3}{2}$ alors

$\forall x, y \in \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$ $4xy - 6x - 6y + 12 \neq 3$.