Correction de Série d'Algèbre 1 N°2

Exercice N°1

- On suppose que $g \circ f$ est injective. Alors
Soient $x, y \in A$ tels que $f(x) = f(y)$

$g \circ f : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

On veut démontrer que $x = y$.

On a $g(f(x)) = g(f(y))$ [g est une application]

puisque $g \circ f$ est injective alors $x = y$

donc f est injective.

- On suppose que $g \circ f$ est surjective et on veut démontrer que g est surjective
Soient $y \in C$ est ce qu'il existe $x \in B$ tel que $y = g(x)$.

Puisque $g \circ f$ est surjective alors il existe $x \in A$ tel que $y = (g \circ f)(x)$

$= g[f(x)]$

On note $z = f(x)$ alors on a trouvé $z \in B$ tel que $y = g(z)$ on conclue que g est surjective.

- Si f, g et h sont bijectives alors $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives (c'est évident)

- On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives
D'après la première question on trouve que

$\left\{\begin{array}{l} g \circ f \text{ est injective} \Rightarrow f \text{ injective} \\ g \circ f \text{ est surjective} \Rightarrow g \text{ surjective} \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} h \circ g \text{ est injective} \Rightarrow g \text{ injective} \\ h \circ g \text{ est surjective} \Rightarrow h \text{ surjective} \end{array}\right.$

g est bijective

- Soit $y \in B$. puisque g est bijective alors $\exists! z \in C$ tel que $z = g(y)$. d'autre part. $g \circ f$ est bijective alors $\exists x!$ tel que $z = (g \circ f)(x)$ alors $g \circ f(x) = g(y)$

d'où $g(f(x)) = g(y) \xRightarrow{g \text{ est injective}} f(x) = y$

alors f est ~~bijecti~~ surjective donc bijective

- Soient $z_1, z_2 \in C$ tels que $h(z_1) = h(z_2)$ et on veut prouver que $z_1 \overset{?}{=} z_2$.

On a g est bijective alors il existe $y_1, y_2 \in B$ tels que $g(y_1) = z_1$, $g(y_2) = z_2$.

$h(z_1) = h(z_2) \Leftrightarrow h(g(y_1)) = h(g(y_2))$

$\Leftrightarrow h \circ g(y_1) = h \circ g(y_2)$.

puisque $h \circ g$ est injective alors $y_1 = y_2$

On conclut que $g(y_1) = g(y_2)$ (g est une applicatio

donc $z_1 = z_2$.

Alors h est injective donc h est bijective.

Exercice N°2

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

- Soit $y \in \mathbb{R}$ est ce il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = \frac{2x}{1+x^2}$ c, à, d

$$y x^2 + y - 2x = 0.$$

$$\Delta = 4 - 4y^2$$

y	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	0	$-$	

quand $y \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ $\Delta < 0$

donc $yx^2 + y - 2x = 0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$ alors pour $y \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

n'admet pas des antécedents dans $\mathbb{R}$.

alors $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas surjective.

- Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f(y)$

c.à.d $\dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{2y}{1+y^2}$. alors

$$2x(1+y^2) = 2y(1+x^2) \iff 2x + 2xy^2 = 2y + 2yx^2$$

D'autre part on a.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Si on prend $y = -2$

$$f(x) = -2 \iff \frac{2x}{1+x^2} = -2$$
$$\iff -2x^2 - 2x - 2 = 0$$
$$\iff x^2 + x + 1 = 0$$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

alors $y = -2$ n'admet pas des antécedents dans $\mathbb{R}$ alors f n'est pas surjective.

Exercice N°3

$(1) \iff (2)$

$*(1) \Rightarrow (2)$

On suppose que f est injective est on démontre que $\forall A, B \subset X$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Soient $A, B \subset X$, Soit $y \in f(A \cap B)$.

c.à.d $y = f(c)$ et $c \in A \cap B$ i.e $c \in A$ et $c \in B$

donc $y \in f(A) \cap f(B)$ donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Soit $y \in f(A) \cap f(B)$ c.à.d $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$

i.e. $y = f(a)$; $a \in A$ et $y = f(b)$; $b \in B$ mais

f est injective et $f(a) = f(b) = y$ alors $a = b$.

donc $y \in f(A \cap B)$ alors $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$

on conclut que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

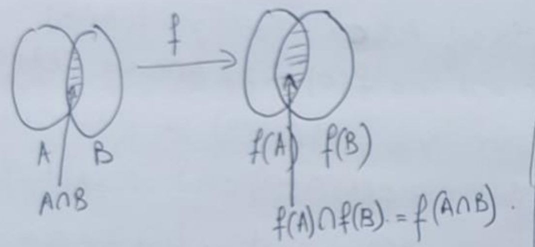
$*(2) \Rightarrow (1)$

On suppose que $\forall A, B \subset X$ $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ et on démontre que f est injective.

- Soient $a, b \in X$ tels que $f(a) = f(b)$.

On note $A, B \subset X$ tels que $a \in A$ et $b \in B$

on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$



on a $f(a) = f(b)$ donc $f(a)$ et $f(b) \in f(A) \cap f(B)$

$f(a) \in f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$

$f(b) \in f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$.

donc $f(A) \subset f(A \cap B)$ alors $A = A \cap B$

donc $A = B$ i.e $a = b$.

donc f est injective..

Exercice N°04

1/ On suppose que $A \subset B$ et on veut démontrer $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

Soit $x \in f^{-1}(A)$ i.e $x \in E$, $f(x) \in A \subset B$.

donc $x \in E$; $f(x) \in B$ i.e $x \in f^{-1}(B)$.

alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

- La réciproque n'est pas toujours vraie

car par exemple :

$E = \{1, 2, 3, 4\}$, $F = \{a, b, c, d\}$.

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e, F\}$. $f(3) = e$, $f(4) = F$

$f(3) = a$, $f(4) = b$, $f(2) = c$, $f(2) = d$

donc $f^{-1}(A) = \{3, 4\}$ $f^{-1}(B) = \{2, 3, 4\}$

On a $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ mais A n'est pas inclut dans B.

2/ pour démontrer que:

$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ il faut

démontrer que $\begin{cases} f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \\ \text{et} \\ f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B) \end{cases}$

* Soit $x \in f^{-1}(A \cap B)$ i.e il $y \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. donc $y \in A$ et $y \in B$ alors $x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$ alors $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ alors $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

* Soit $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ alors $x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$ donc il existe $y_1 \in A$ tel que $y_1 = f(x)$ et il existe $y_2 \in B$ tel que $y_2 = f(x)$ donc $y_1 = y_2$ alors $y_1 = y_2 \in A \cap B$ alors $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

On conclue que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$

Alors $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

3/ à l'étudiant.

<u>Exercice N°5</u>

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \boxed{]1, +\infty[}$ | $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^x}$

. f est bijective car:

* f est injective car:

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = f(y)$.

c.à.d. $\dfrac{e^x + 2}{e^x} = \dfrac{e^y + 2}{e^y}$.

d'où $e^x e^y + 2e^y = e^x e^y + 2e^x$

donc $e^y = e^x \Rightarrow x = y$.

* f est surjective car

Soit $y \in \boxed{]1,+\infty[}$ est ce que il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$

$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x+2}{e^x} > 1$

$\Leftrightarrow ye^x = e^x + 2$

$\Leftrightarrow (y-1)e^x = 2$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{2}{y-1}$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{2}{y-1}\right)$; $y > 1$

La bijection réciproque f^{-1}

$$f^{-1} :]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{2}{y-1}\right)$$

Exercice N° 6

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
$x \longmapsto f(x) = 2x$

$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
$x \longmapsto \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ pair} \\ 0 & \text{si } x \text{ impair} \end{cases}$

· $g \circ f$

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N}$$
$$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow g(f(x))$$

Soit $x \in \mathbb{N}$; $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= g(2x)$

$= \frac{2x}{2}$ (car $2x$ est pair)

$(g \circ f)(x) = x$

· $f \circ g$

$$\mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$$
$$x \longmapsto g(x) \longmapsto f(g(x))$$

Soit $x \in \mathbb{N}$;

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= \begin{cases} f\left(\frac{x}{2}\right) & \text{si } x \text{ pair;} \\ f(0) & \text{si } x \text{ impair.} \end{cases}$

$(f \circ g)(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ pair,} \\ 0 & \text{si } x \text{ impair.} \end{cases}$

· f n'est pas surjective car

Exercice 08

1. $f^{-1}(\{2\}) = \{3,4\}; f^{-1}(\{1,2\}) = \{2,3,4\}\,; f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$
2. $$f^{-1}(\{1\}) = \{-1,1\}$$
$$f^{-1}([1,2]) = \left[-\sqrt{2},-1\right] \cup \left[1,\sqrt{2}\right]$$

Exercice 09

1. Pour tout $y \in f(A \cup B)$, il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.
Comme $x \in A$, $y = f(x) \in f(A)$, comme $x \in B$, $y = f(x) \in f(B)$ par conséquent
$$y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$$
Cela montre que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$
Pour tout $y \in f(A) \cup f(B)$, $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$
Si $y \in f(A)$ alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, mais $x \in A \subset A \cup B$ donc $y = f(x) \in f(A \cup B)$
Si $y \in f(B)$ alors il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$, mais $x \in B \subset A \cup B$ donc $y = f(x) \in f(A \cup B)$
Cela montre que s tous les cas $y \in f(A \cup B)$ et que donc
$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$$
Finalement $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Exercice 09

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

$f(-1) = f(1)$ donc f n'est pas injective.
-4 n'a pas d'antécédent, car $f(x) = -4 \Leftrightarrow x^2 = -4$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. f n'est pas surjective.
Une fonction est bijective si et seulement si elle est injective et surjective donc cette fonction n'est pas bijective.

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto x^2$$
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$$

Car $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$. f est injective.
Pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, (celui de l'ensemble d'arrivée), il existe $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}^*$, (celui de l'ensemble de départ) tel que : $y = f(x)$, en effet $f(x) = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$ donc f est surjective.
f est bijective.

$$f: [0,1] \to [0,2]$$
$$x \mapsto x^2$$
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$$

Car $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$. f est injective.
2 n'a pas d'antécédent, car $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $[0,1]$. f n'est pas surjective.

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x + x^3$$

g est une fonction dérivable, $g'(x) = 1 + 3x^2 > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
La contraposée de $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ est $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$
Supposons que $x_1 \neq x_2$, alors $x_1 < x_2$ (ou $x_2 < x_1$, ce que revient au même), on en déduit que $g(x_1) < g(x_2)$ car g est strictement croissante, par conséquent $g(x_1) \neq g(x_2)$, g est injective.

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

g est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, par conséquent pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = g(x)$, g est surjective. Mais l'unicité du « x » fait que g est bijective donc il était inutile de montrer l'injectivité de g.

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 + x^3$$

On va étudier (sommairement) cette fonction et dresser son tableau de variation.
h est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. $h'(x) = 2x + 3x^2 = x(2 + 3x)$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$$

Le « x^3 » l'emporte sur le « x^2 ».

$$h(0) = 0 \quad \text{et} \quad h\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27}$$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Les seules bijections de $E \subset \mathbb{R}$ sur $F \subset \mathbb{R}$ sont les fonctions strictement monotones dont l'image de E est F.
h n'est pas une bijection.
Comme $h(-1) = 0 = h(0)$, h n'est pas injective.
Pour tout $y \in \mathbb{R}$ il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = h(x)$, et bien il n'y a pas unicité sinon h serait bijective.
Pour tout $y \in \left[0, \frac{4}{27}\right[$ il existe trois valeurs x tel que $y = h(x)$, pour $y = \frac{4}{27}$, il y en a deux pour les autres y n'a qu'un antécédent.

$$k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto x+x^4$$

On va étudier cette fonction, k est dérivable et $k'(x)=1+4x^3$

$$k'(x)=0\Leftrightarrow 1+4x^3=0\Leftrightarrow x^3=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=\left(-\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{1}{3}}=-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}$$

$$k\left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)=\left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)\left(1+\left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)^3\right)=\left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)\times\frac{3}{4}=-\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$$

Le « x^4 » l'emporte sur le « x ».

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour tout $y>-\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$, y admet deux antécédents, k est ni surjective ni injective.

Exercice 10

1.

$$C_{\mathbb{R}}A_1=]0,+\infty[\,;\ C_{\mathbb{R}}A_2=[0,+\infty[\,;\ C_{\mathbb{R}}A_3=]-\infty,0]\,;\ C_{\mathbb{R}}A_4=]-\infty,0[;$$
$$C_{\mathbb{R}}A_5=]-\infty,1]\cup[2,+\infty[;\ C_{\mathbb{R}}A_6=]-\infty,1[\cup[2,+\infty[$$

2.

$$C_{\mathbb{R}}A=[1,2];\quad C_{\mathbb{R}}B\cap C_{\mathbb{R}}C=[1,+\infty[\cap]2,+\infty[=[1,2]$$

Remarque :

$$C_{\mathbb{R}}B\cap C_{\mathbb{R}}C=C_{\mathbb{R}}(B\cup C)=C_{\mathbb{R}}A$$