Catalogue

Correction de série d'Algèbre 1 N°3

ercice N°1

$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a - b < 0$.

$\mathcal{R}$ n'est pas réflexive car :

Soit $a \in \mathbb{Z}$ $\quad a \mathcal{R} a \Leftrightarrow a - a < 0$

$\Leftrightarrow 0 < 0$ (impossible)

* $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique car

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ $\begin{cases} a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a - b < 0 \\ \text{et} \\ b \mathcal{R} a \Leftrightarrow b - a < 0 \end{cases}$

mais $a \neq b$.

* $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique car :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ $\quad a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a - b < 0$

$\Leftrightarrow b - a > 0$

donc b n'est pas en relation avec a.

$\mathcal{R}$ est transitive car :

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que :

$\left.\begin{array}{l} a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a - b < 0 \\ \text{et } b \mathcal{R} c \Leftrightarrow b - c < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a - c < 0$.

donc $a \mathcal{R} c$.

Exercice N°2.

$E = \{ n \in \mathbb{N} ; n \geq 2 \}$

$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow$ a et b admettent un diviseur commun premier

$\Leftrightarrow \exists p$ premier tel que p / a et p / b

$\Leftrightarrow \exists p$ premier tel que $a = pa'$ et $b = pb'$
$a', b' \in \mathbb{N}$

$\mathcal{R}$ est réflexive car :

$a \mathcal{R} a \Leftrightarrow \exists p$ premier tel que p / a

Si a est premier alors $p = a$.
Si a n'est pas premier alors $\exists\, a' \in \mathbb{N}$ tel que $a = pa'$.

* $\mathcal{R}$ est symétrique car :

Soient $a, b \in E$ $\quad a \mathcal{R} b \Leftrightarrow \exists p$ premier tel que p/a et p/b

$\Leftrightarrow \exists p$ premier tel que p/b et p/a

$\Leftrightarrow b \mathcal{R} a$.

* $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique car :

Soient $a, b \in E$ $\quad a \mathcal{R} b \Leftrightarrow \exists p$ premier tel que p/a et p/b.

$b \mathcal{R} a \Leftrightarrow \exists p$ premier tel que p/a et p/b.

$\not\Rightarrow a = b$ un contre exemple

$a = 2$, $b = 4$, $p = 2$ p/a et p/b.

mais $a \neq b$.

* $\mathcal{R}$ n'est pas transitive car.

Soient $a, b, c \in E$ tels que

$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow \exists p_1$ premier p_1/a et p_1/b.

et $b \mathcal{R} c \Leftrightarrow \exists p_2$ premier p_2/b et p_2/c.

$\Rightarrow a \mathcal{R} c \Leftrightarrow \exists p_3$ premier tel p_3/a et p_3/c

un contre exemple :

$a = 2$, $b = 6$, $c = 9$.

$a \mathcal{R} b$ car $\exists\, 2$ premier tel que $2/2$ et 2

$b \mathcal{R} c$ car $\exists\, 3$ premier tel que $3/6$ et 3

mais 2 n'est pas en relation avec 9.

car il n'existe pas p premier tel que $p/2$ et $p/9$.

Exercice N°3

$E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* = \mathbb{R}-\{0\} \times \mathbb{R}-\{0\}$.

$(a,b) \mathcal{R} (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$.

* $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence

car :

1/ $\mathcal{R}$ est réflexive car :

Soit $(a,b) \in E$:

$(a,b) \mathcal{R} (a,b) \Leftrightarrow ab = ba$ c'est juste.

2/ $\mathcal{R}$ est transitive car :

Soient $(a_1,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_3) \in E$ tels que

$(a_1,b_1) \mathcal{R} (a_2,b_2) \Leftrightarrow a_1 b_2 = b_1 a_2$.

$(a_2,b_2) \mathcal{R} (a_3,b_3) \Leftrightarrow a_2 b_3 = b_2 a_3$.

donc $a_1 b_2 a_2 b_3 = b_1 a_2 b_2 a_3$.

alors $a_1 b_3 = b_1 a_3$ d'où $(a_1,b_1) \mathcal{R} (a_3,b_3)$

3/ $\mathcal{R}$ est symétrique car :

Soient $(a,b), (c,d) \in E$.

$(a,b) \mathcal{R} (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$.

$\Leftrightarrow cb = da$.

$\Leftrightarrow (c,d) \mathcal{R} (b,a)$.

* la classe d'équivalence $\overline{(1,-2)}$

$\overline{(1,-2)} = \{(a,b) \in E / (a,b) \mathcal{R} (1,-2)\}$.

$(a,b) \mathcal{R} (1,-2) \Leftrightarrow -2a = b$.

$\overline{(1,-2)} = \{(a,-2a) / a \in \mathbb{R}^*\}$

$= \{a(1,-2) / a \in \mathbb{R}^*\}$.

. la classe d'équivalence de $\overline{(a$

$\overline{(a,b)} = \{(c,d) \in E \,/\, (c,d)\, \mathcal{R}\, (a,b)\}$.

$(c,d)\, \mathcal{R}\, (a,b) \Leftrightarrow cb = da$.

$\Leftrightarrow c = d\,\frac{a}{b}$ (car $b \neq 0$).

$\overline{(a,b)} = \{(d\frac{a}{b}, d) \,/\, d \in \mathbb{R}^*\}$

$= \{d(\frac{a}{b}, 1) \,/\, d \in \mathbb{R}^*\}$.

Exercice N°4

$E = \mathbb{R}^*$

$a, b \in E$: $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow \frac{b}{a} \in \mathbb{N}^*$.

* $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre car :

- $\mathcal{R}$ est réflexive car :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$

$a \mathcal{R} a \Leftrightarrow \frac{a}{a} = 1 \in \mathbb{N}^*$.

- $\mathcal{R}$ est antisymétrique :

Soient $a, b \in E$ tels que

$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow \alpha = \frac{b}{a} \in \mathbb{N}^*$

et $b \mathcal{R} a \Leftrightarrow \alpha' = \frac{a}{b} \in \mathbb{N}^*$. on a $\alpha' \alpha = 1$

donc $\alpha' = \alpha = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{a} = 1 \Rightarrow a = b$.

- $\mathcal{R}$ est transitive : car.

Soient $a, b, c \in E$ tels que

$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow \frac{b}{a} \in \mathbb{N}^*$

et $b \mathcal{R} c \Leftrightarrow \frac{c}{b} \in \mathbb{N}^*$

donc $\frac{b}{a} \times \frac{c}{b} \in \mathbb{N}^*$.

d'où $\frac{c}{a} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a \mathcal{R} c$

* $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partielle car :

$\exists (-2) \in E$ et $\exists 3 \in E$ $\frac{-2}{3} \notin \mathbb{N}^* \Leftrightarrow 3$ n'est pas en relation avec (-2) et $\frac{3}{-2} \notin \mathbb{N}^* \Leftrightarrow (-2)$ n'est pas en relation avec 3.

Exercice N° 5

$E = \mathbb{R}^2$

$(a,b) \mathcal{R} (c,d) \Leftrightarrow |a-c| \leq d-b$.

. $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre car

1/ $\mathcal{R}$ est réflexive :

Soit $(a,b) \in E$.

$(a,b) \mathcal{R} (a,b) \Leftrightarrow |a-a| \leq b-b$.

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq 0$ c'est juste.

2/ $\mathcal{R}$ est antisymétrique :

Soient $(a,b), (c,d) \in E$.

$(a,b) \mathcal{R} (c,d) \Leftrightarrow |a-c| \leq d-b$.

$(c,d) \mathcal{R} (a,b) \Leftrightarrow |c-a| \leq b-d$.

$\Leftrightarrow |a-c| \leq -(d-b)$.

$\Rightarrow d-b = 0$ et $a-c=0$

$\Rightarrow (a,b) = (c,d)$.

$\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'ordre total car :

$\exists (-2,1) \in E$ et $(3,0) \in E$ tels que

$|-2-3| = 5 \leq 0-1$
≤ -1 impossible.

$|3-(-2)| = 5 \leq 1-0$
≤ 1 impossible.