Chapitre II

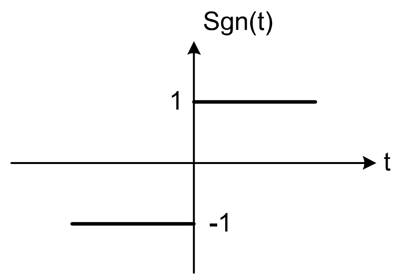
LES SIGNAUX DETERMINISTES

II.1. Introduction :

L'évolution des signaux déterministes ou certains en fonction du temps peut être parfaitement modélisé par une fonction mathématique. On l'utilise pour alléger la représentation mathématique de certains signaux rencontrés souvent en théorie du signal.

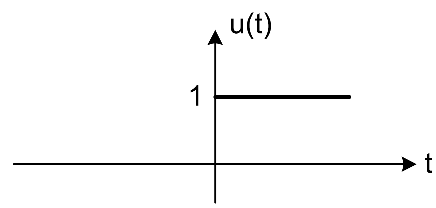
II.2. Fonction signe :

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$$



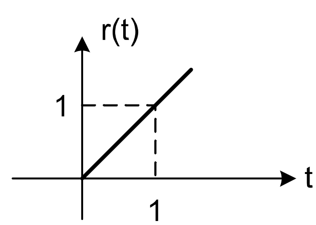
II.3. Echelon unité (échelon de Heaviside) :

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

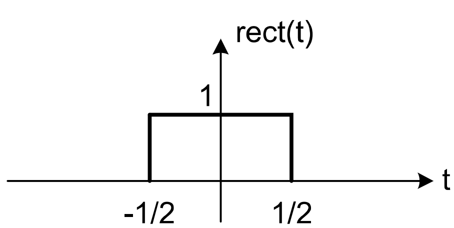


II.4. Fonction de Rampe :

$$r(t)=\begin{cases}t & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



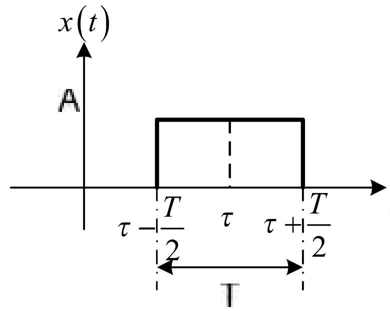
II.5. Fonction Rectangulaire :



On l'appelle également Fenêtre

$$x(t)=A.rect\left(\frac{t-\tau}{T}\right)$$

A : Amplitude.

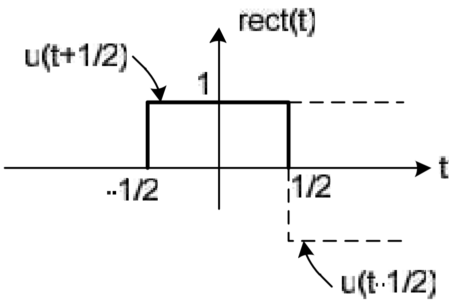


τ : Centre de symétrie.

T : Largeur.

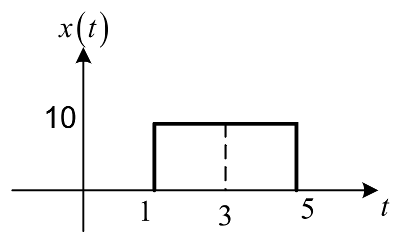
On peut définir la fonction rectangulaire en fonction de l'échelon

$$rect(t) = u\left(t+\frac{1}{2}\right) - u\left(t-\frac{1}{2}\right)$$



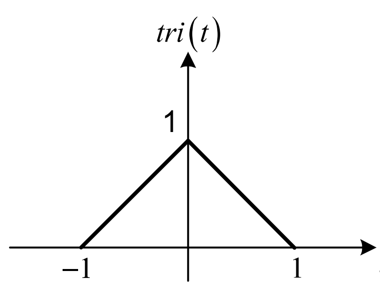
Exemple : représenter $x(t)$ graphiquement :

$$x(t) = 10.rect\left(\frac{t-3}{4}\right)$$

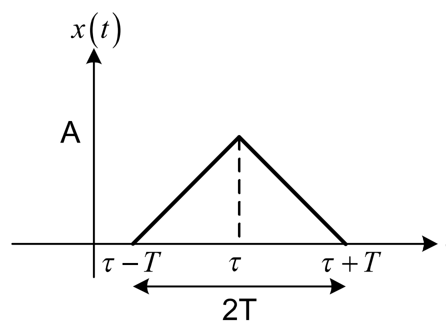


II.6. Fonction Triangulaire :

$$Tri(t) = \begin{cases} 1-|t| & |t| < 0 \\ 0 & |t| > 0 \end{cases}$$



$$x(t) = A.tri\left(\frac{t-\tau}{T}\right)$$

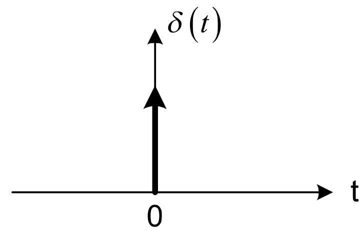


A : Amplitude.

τ : Centre de symétrie.

T : La demi-largeur.

II.7. Impulsion de Dirac :



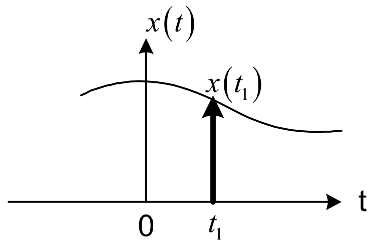
Impulsion de Dirac $\equiv$ Distribution de Delta

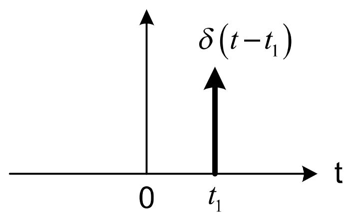
$\equiv$ Impulsion unité

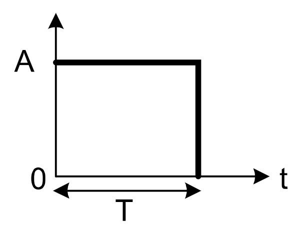
Elle peut être définie par le produit scalaire :

$$\boxed{\langle x(t),\delta(t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\delta(t)\,dt = x(0)} \qquad \text{(II.1)}$$

$\delta(t)$: est un opérateur d'échantillonnage

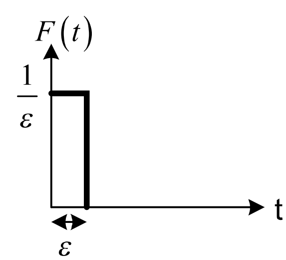






$$\boxed{\langle x(t),\delta(t-t_1)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\delta(t-t_1)\,dt = x(t_1)}$$

Dans l'équation (II.1) si $x(t)=1$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1 = u(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{0} \delta(t)\,dt = 0 & t<0 \\ \int_{0}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1 & t>0 \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F(t) = \delta(t)$$

$$\boxed{\Rightarrow \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}}$$

Pratiquement l'impulsion du Dirac peut être considérer comme une fonction rectangulaire de surface unité dont la durée tend vers zéro.

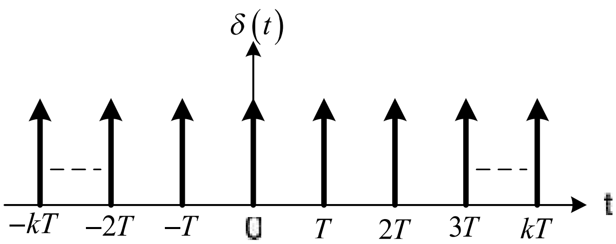
II.7.1. Produit d'une fonction continue par une impulsion de Dirac :

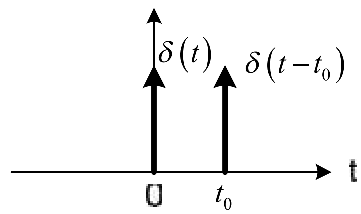
$$x(t).\delta(t) = x(0).\delta(t) \qquad \text{(II.2)}$$

$$x(t).\delta(t-t_0) = x(t_0).\delta(t-t_0) \qquad \text{(II.3)}$$

II.7.2. Peigne de Dirac :

On appelle peigne de Dirac une succession périodique d'impulsions de Dirac.





$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$$

T : est période de peigne.

Cette suite est parfois appelée fonction d'échantillonnage ou train d'impulsions.

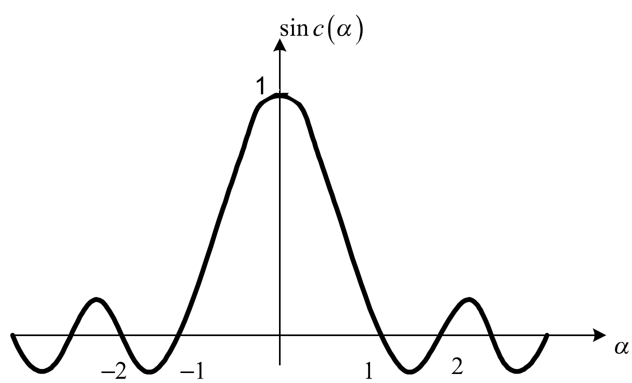
De l'équation (II.2) et (II.3) on peut avoir :

$$x(t).\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT).\delta(t-kT) \qquad \text{(II.4)}$$

II.8. Sinus cardinal :

C'est le rapport entre une fonction sinusoïdale et son argument :

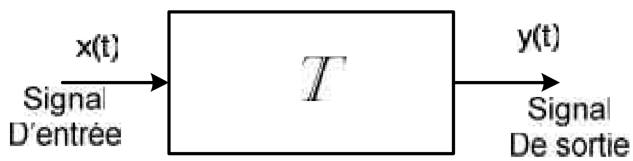
$$\boxed{\sin c(\alpha) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}} \quad \sin_{\alpha \to 0}(\alpha) \simeq \alpha$$



II.9. Systèmes :

II.9.1. Définition d'un Système :

Mathématiquement un système est un opérateur, ou une transformation qui à partir d'un signal d'entrée $x(t)$ fournit un signal de sortie $y(t)$.



On note $y(t)=T\left[x(t)\right]$

II.9.2. Système linéaire:

Un système T est linéaire si :

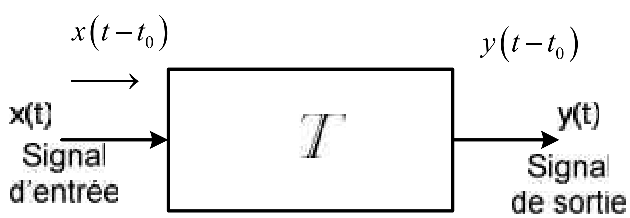
$$\boxed{\forall a_1 \in R\ ,\forall a_2 \in R\ ,T\left[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\right]=\underbrace{a_1T\left[x_1(t)\right]}_{y_1(t)}+\underbrace{a_2T\left[x_2(t)\right]}_{y_2(t)}} \qquad \text{(II.5)}$$

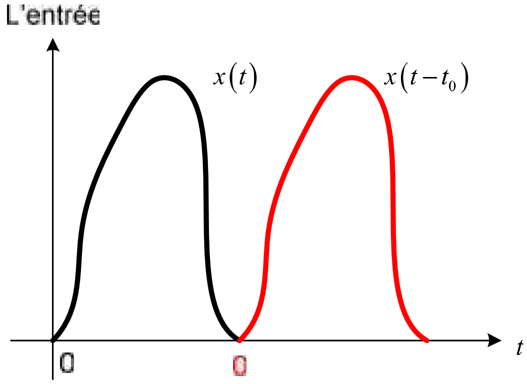
II.9.3. Système invariant:

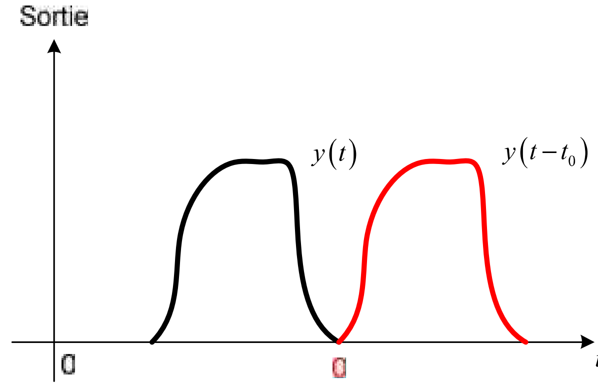
Un système est dit invariant dans le temps si et seulement si :

$$\boxed{T\left[x(t-t_0)\right]=y(t-t_0);\forall t_0 \in R} \qquad \text{(II.6)}$$

Un décalage à l'entrée correspond le même décalage à la sortie.




L'entrée
$x(t)$
$x(t-t_0)$
0
t


Sortie
$y(t)$
$y(t-t_0)$
0
t