Chapitre IV

ANALYSE DE FOURIER

IV.1.Introduction:

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), plus communément appelé Joseph Fourier, est un mathématicien et physicien français connu pour ses travaux sur la décomposition des fonctions périodiques en séries trigonométriques convergentes appelées séries de Fourier et leurs applications au problème de la propagation de la chaleur.

IV.2. L'analyse de Fourier :

L'analyse de Fourier est l'outil mathématique principal qui permet le passage de la représentation temporelle à la représentation fréquentiel. On effet ce passage permet de décomposer un signal en éléments sinusoïdaux, chaque sinusoïde représente une fréquence, ce qui permet d'obtenir les renseignements sur la distribution fréquentielle.

IV.3. Transformation de Fourier des fonctions périodiques : série de Fourier :

La transformée et la série de Fourier permet de donner une autre représentation des signaux très intéressante pour la théorie de l'information du signal. Cette décomposition exponentielle ou trigonométrique permet d'exprimer le signal en fonction de ses harmoniques. L'analyse de Fourier est très utilisée en électricité comme en physique.

IV.3.1. Définition du spectre d'un signal :

Le spectre d'un signal n'est rien d'autre que la représentation en fréquence des sinusoïdes qui le compose.

Une sinusoïde $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$

A : Amplitude

$\omega = 2\pi f$: Pulsation

ϕ :La phase

La représentation de l'amplitude en fonction de $f \rightarrow$ spectre d'amplitude.

La représentation de la phase en fonction de $f \rightarrow$ spectre de phase.

IV. 3.2. Les harmoniques :

On appelle les différentes sinusoïdes qui composent le signal harmonique. On le numérote en fonction de leurs fréquences.

L'harmonique numéro n à une fréquence égale à n multiple celle de la fréquence de départ (fondamentale).

L'harmonique n=1 s'appelle le fondamentale.

IV. 3.3. Première forme de la décomposition en série de Fourier (série de Fourier trigonométrique condensé) :

Un signal $x(t)$ périodique de fréquence f_0 peut s'écrire comme la somme :

D'un terme constant $\rightarrow$ c'est la valeur moyenne.

Plus, un nombre (infini) de sinusoïdes de fréquences multiple de f_0 se sont les harmoniques

Première forme de la décomposition en série de Fourier :

$$\boxed{x(t) = \langle x \rangle + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n.\cos(n\omega_0 t + \phi_n)} \qquad \text{(IV.1)}$$

IV. 3.4. Série de Fourier trigonométrique (d'Euler) :

La deuxième forme de la décomposition en série de Fourier :

$$\boxed{x(t) = \langle x \rangle + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n.\cos(n\omega_0 t) + b_n.\sin(n\omega_0 t) \right]} \qquad \text{(IV.2)}$$

Avec $\omega_0 = 2\pi f_0$, $T_0 = \dfrac{1}{f_0}$

$$\boxed{\langle x \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,dt = \overline{x}_{T_0}} \qquad \text{(IV.3)}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t).\cos(n\omega_0 t)\,dt} \qquad \text{(IV.4)}$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t).\sin(n\omega_0 t)\, dt} \qquad \text{(IV.5)}$$

Par identification entre (IV.1) et (IV.2) et en utilisant l'identité $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, On obtient :

$$\boxed{a_n = C_n \cos(\phi_n)} \qquad \text{(IV.6)}$$

Et

$$\boxed{b_n = C_n \sin(\phi_n)} \qquad \text{(IV.7)}$$

$$Z = a_n + jb_n = C_n e^{-j\phi_n} \qquad \text{(IV.8)}$$

$$|Z| = C_n \Rightarrow C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \text{(IV.9)}$$

$$\phi_n = -Arg(Z) = -Arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \qquad \text{(IV.10)}$$

Propriété :

1) Si $x(t)$ est paire $\left(x(t) = x(-t)\right) \Rightarrow b_n = 0 \quad \forall t$
2) Si $x(t)$ est impaire $\left(x(t) = -x(-t)\right) \Rightarrow a_n = 0 \quad \forall t$
3) Si on ajoute une constante à $x(t)$, c'est la valeur moyenne qui change et non pas a_n et b_n.
4) Si on change l'origine des temps de $x(t)$, le spectre de phase est modifié et non pas le spectre d'amplitude.

IV. 3.5. Forme complexe de la série de Fourier :

3^{ieme} forme de série de Fourier :

$$\boxed{x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}} \qquad \text{(IV.11)}$$

C_n sont les coefficients de la série de Fourier complexe. La suite des coefficients complexes C_n constituent le spectre (raies) du signal périodique $x(t)$.

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha \qquad \text{(IV.12)}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\left[\cos n\omega_0 t + j\sin n\omega_0 t\right] \qquad \text{(IV.13)}$$

$$\boxed{C_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt} \qquad \text{(IV.14)}$$

Si $n = 2$

$$\begin{aligned} x(t) &= C_{-2}\left[\cos 2\omega_0 t - j\sin 2\omega_0 t\right] + C_{-1}\left[\cos\omega_0 t - j\sin\omega_0 t\right] + C_0 \\ &+ C_1\left[\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t\right] + C_2\left[\cos 2\omega_0 t + j\sin 2\omega_0 t\right] \end{aligned} \qquad \text{(IV.15)}$$

$$x(t) = \underbrace{\left[C_{-2} + C_2\right]}_{a_2}\cos 2\omega_0 t + \underbrace{\left[C_{-1} + C_1\right]}_{a_1}\cos\omega_0 t + \underbrace{C_0}_{a_0} + \underbrace{j\left[C_2 - C_{-2}\right]}_{b_2}\sin 2\omega_0 t + \underbrace{j\left[C_1 - C_{-1}\right]}_{b_1}\sin\omega_0 t$$

$$x(t) = a_0 + a_1\cos\omega_0 t + a_2\cos 2\omega_0 t + b_1\sin\omega_0 t + b_2\sin 2\omega_0 t \qquad \text{(IV.16)}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\omega_0 t + b_n\sin n\omega_0 t\right] \qquad \text{(IV.17)}$$

$$a_n = C_n + C_{-n} = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt + \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{jn\omega_0 t}dt \qquad \text{(IV.18)}$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_T x(t)\left[e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}\right]dt \qquad \text{(IV.19)}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos(n\omega_0 t)dt} \qquad \text{(IV.20)}$$

$$\boxed{b_n = j\left(C_n - C_{-n}\right) = \frac{2}{T}\int_T x(t)\sin(n\omega_0 t)dt} \qquad \text{(IV.21)}$$

$$\boxed{a_0 = C_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt} \qquad \text{(IV.22)}$$

$$C_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \qquad C_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} \qquad \text{(IV.23)}$$

Propriété :

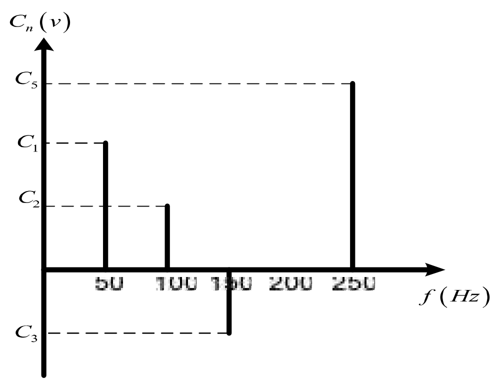
Si $x(t)$ est réel $\Rightarrow A_n, B_n$ réels $\Rightarrow C_{-n} = C_n^*$

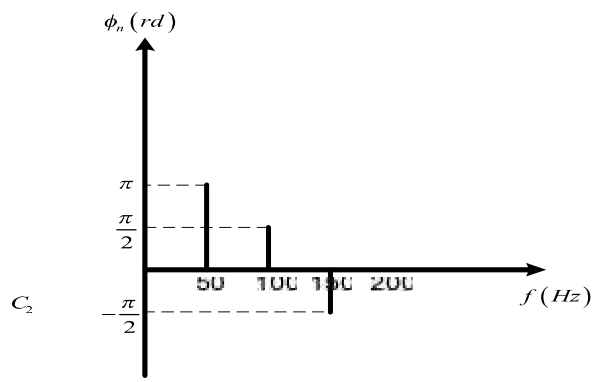
Si $x(t)$ pair $\Rightarrow B_n = 0 \; \forall n \;\; \Rightarrow C_{-n} = C_n$

Si $x(t)$ impair $\Rightarrow A_n = 0 \; \forall n \;\; \Rightarrow C_{-n} = -C_n$

Exemple :

$x(t)$ est une tension en sortie d'un circuit $\left(f_0 = 50Hz\right)$





Spectre d'amplitude (Spectre discret)

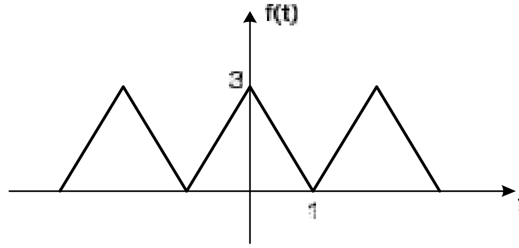
Spectre de phase (Spectre discret)

On peut remarquer qu'on obtient des raies correspondantes aux harmoniques 1,2,3,….pour les autres fréquences les sinusoïdes ne sont pas définis, on dit que le spectre est discret c'est le cas de tout les signaux périodiques.

IV. 3.6. Condition d'existence de la série de Fourier :

- Le signal $x(t)$ doit être périodique.
- La condition de convergence $\left|x(t)\right| < \infty$.

Application :



Calculer a_0, a_n et b_n

La période est : $T = 2s$; la pulsation est : $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$; $f(t)$ est une fonction paire : $b_n = 0$.

La valeur moyenne est :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} f(t)dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(t)dt$$

$\forall t \in [-1,0]$ et $\forall t \in [0,1]$

$f(t) = at + b \Rightarrow f(t) = 3t + 3$ $\quad$ $f(t) = ct + d \Rightarrow f(t) = -3t + 3$

D'où :

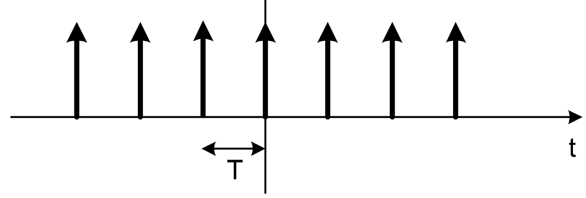
$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(3t+3)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}t^2 + 3t\right]_{-1}^{0} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(-3t+3)dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{3}{2}t^2 + 3t\right]_{0}^{1} = \frac{3}{4}$$

$$a_0 = 3/4 + 3/4 = 3/2 \qquad \boxed{a_0 = 3/2}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{0}^{T_0} f(t).\cos(2n\pi f_0 t)\,dt \Rightarrow a_n = \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} f(t).\cos(2n\pi t)\,dt$$

$$a_n = \int_{-1}^{0}(3t+3).\cos(n\pi t)\,dt + \int_{0}^{1}(-3t+3).\cos(n\pi t)\,dt$$



En intégrant par partie, on trouve

$$a_n = \frac{3}{(n\pi)^2}\left[1-(-1)^n\right] + \frac{3}{(n\pi)^2}\left[1-(-1)^n\right]$$

D'où : $a_n = \dfrac{6}{(n\pi)^2}\left[1-(-1)^n\right]$

Exemple :

Soit un signal $x(t) = \delta_T(t)$

1. Décomposer ce signal en série de Fourier complexe.
2. Déterminer les coefficients de la série de Fourier trigonométrique.
3. Tracer le spectre de ce signal.

1) $x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$

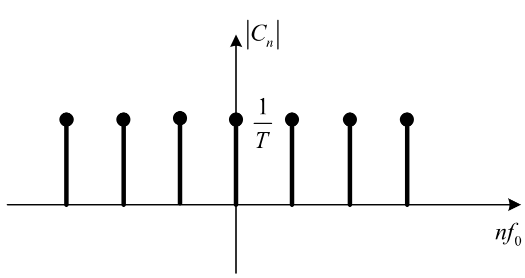
$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\underbrace{e^{-jn\omega_0 t}}_{y(t)}dt = \frac{1}{T}y(0) = \frac{1}{T} \quad \text{car} \quad \boxed{\int \delta(t-t_0)\,y(t)\,dt = y(t_0)}$$

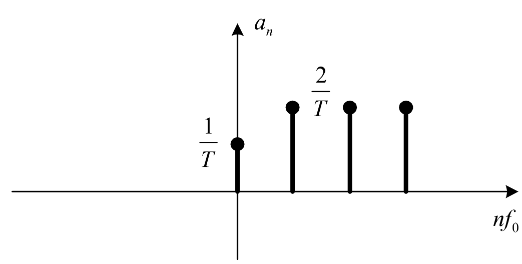
2) $a_n = C_n + C_{-n} = \dfrac{1}{T} + \dfrac{1}{T} = \dfrac{2}{T}$ $\quad \boxed{a_n = \dfrac{2}{T}} \quad \boxed{a_0 = C_0 = \dfrac{1}{T}}$

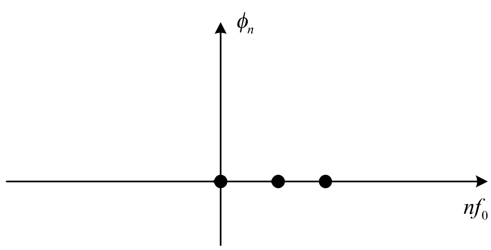
$$b_n = 0 = j\left(C_n - C_{-n}\right) = j\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T}\right) = 0$$

Sinon $a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt = \dfrac{2}{T}\cos(0) = \dfrac{2}{T}$

On remarque que dans ce cas que $C_n = \dfrac{1}{T}$ quel que soit n cela veut dire que les C_n sont réels (phase nulle).







IV. 3.7. Limitation de la série de Fourier :

La série de Fourier s'applique uniquement aux signaux :

- périodiques (intégrale sur une période)
- Continue
- Non aléatoire

IV. 3.8. L'égalité de Parseval

L'**égalité de Parseval** dite parfois **théorème de Parseval** est une formule fondamentale de la théorie des séries de Fourier.

Dans de nombreuses applications physiques (courant électrique par exemple), cette formule peut s'interpréter comme suit : l'énergie totale s'obtient en sommant les contributions des différents harmoniques.

L'énergie totale d'un signal ne dépend pas de la représentation choisie : fréquentielle ou temporelle.

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|x(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|X(f)\right|^2 df$$

Soit *f* une fonction périodique continue par morceaux.

$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right)$, est sa série de Fourier, alors on a :

$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)}$ Remarque : l'intégrale peut être prise sur n'importe quel intervalle de longueur T.

En utilisant la forme complexe des séries de Fourier, on montre que l'égalité de **Parseval** s'écrit aussi :

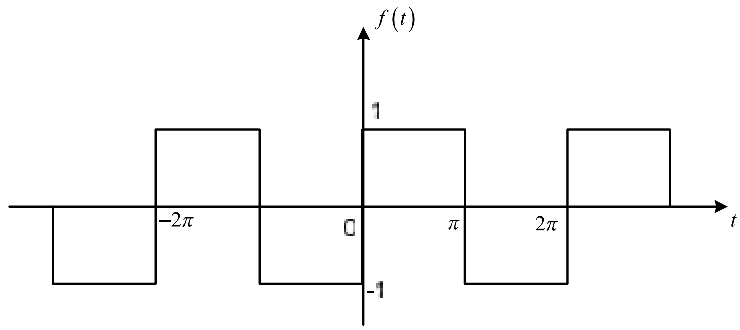
$$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|C_n\right|^2}$$

La formule de **Parseval** permet de calculer la somme de certaines séries numériques.

Exemple :

On considère la fonction périodique de période 2π définie comme suit :

$$f(t)=\begin{cases} 1 & \text{sur} \quad [0;\pi[\\ -1 & \text{sur} \quad [\pi;2\pi[\end{cases}$$



Cette fonction est monotone par morceaux et bornée. Calculons ses coefficients de Fourier:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dt+\int_{0}^{\pi}dt\right]=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos(nt)\,dt+\int_{0}^{\pi}\cos(nt)\,dt\right]=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin(nt)\,dt+\int_{0}^{\pi}\sin(nt)\,dt\right]=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

Soit : $b_n=\begin{cases} 0, & \text{si n est pair} \\ \dfrac{4}{n\pi}, & \text{si n est impair} \end{cases}$

La série de Fourier de la fonction considérée s'écrit donc :

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin t}{1}+\frac{\sin 3t}{3}+\ldots+\frac{\sin(2p+1)t}{2p+1}\right]$$

La formule de Parseval donne alors :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}f^2(t)\,dt=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}b_n^2$$

On avait obtenu le développement en série de Fourier :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{(2n+1)\pi}\sin\big((2n+1)t\big)$$

La formule de Parseval donne alors :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2}$$

Or : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt = 1$

Et : $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2 = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{(2p+1)\pi}\right)^2 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$

Et donc :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

C'est-à-dire : $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{8}$

IV. 4. Transformation de Fourier des fonctions :

La transformée de fourrier permet d'obtenir une représentation en fréquence (représentation spectrale) des signaux déterministes, continus et non périodiques. Elle exprime la répartition fréquentielle de l'amplitude et de la phase des signaux considérés.

IV.4.1. Calcul du spectre par la transformée de Fourier :

C'est une forme complexe de la variable f définie par ;

$$X(f) = TF\left[x(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$X(f)$ indique quelle quantité de fréquence f est présente dans le signal $x(t)$ sur l'intervalle $]-\infty,+\infty[$.

$X(f)$ est une fonction de f, généralement complexe :

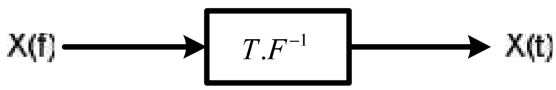
$$\begin{aligned} X(f) &= R\{X(f)\} + j.I\{X(f)\} = |X(f)|.e^{j\varphi(f)} \\ &= |X(f)|\cos(\varphi(f)) + j|X(f)|.\sin(\varphi(f)) \end{aligned}$$

Le module est l'amplitude du spectre :

$$|X(f)| = \sqrt{R\left[X(f)\right]^2 + I\left[X(f)\right]^2}$$

L'argument $\varphi(f) = \arg\left(X(f)\right) = arctg\left(\dfrac{\operatorname{Im}\left[X(f)\right]}{\operatorname{Re}\left[X(f)\right]}\right)$

La transformation inverse est donnée par :

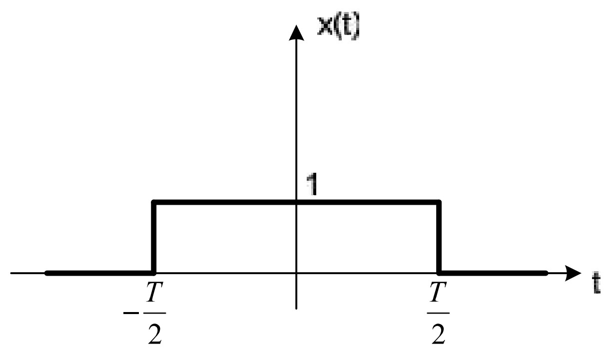


$$x(t) = TF^{-1}\left\{X(f)\right\}$$

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f).e^{j2\pi f t}.df}$$

$\boxed{x(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega).e^{j\omega t}.d\omega}$ avec $\omega = 2\pi f \Rightarrow d\omega = 2\pi df$

Application :



1. Calculer la transformée de Fourier de $x(t) = rect_T(t)$;
2. Représenter le spectre de $x(t)$.

$$X(f) = TF\left\{x(t)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} rect_T(t).e^{-j2\pi ft}.dt$$

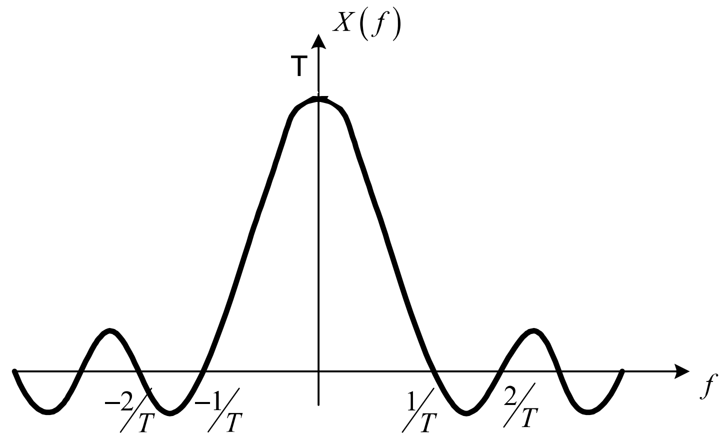
$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1.e^{-j2\pi ft}.dt = -\frac{1}{j2\pi f}\left[e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}\right]$$

Or : $\sin\alpha = \dfrac{1}{2j}\left[e^{\alpha j} - e^{-j\alpha}\right]$ et $\operatorname{sinc}\alpha = \dfrac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$

D'où $X(f) = \frac{1}{\pi f}.\sin(\pi fT) = T.\frac{1}{\pi fT}.\sin(\pi fT) = T.\mathrm{sinc}(fT)$

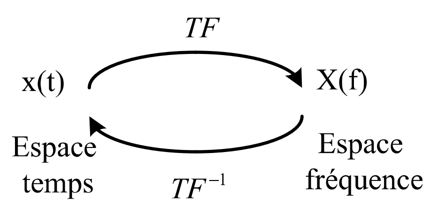
D'où $\boxed{X(f) = T.\mathrm{sinc}(fT)}$

Représentation de $X(f)$:



IV.4.2. Dualité temps fréquence :

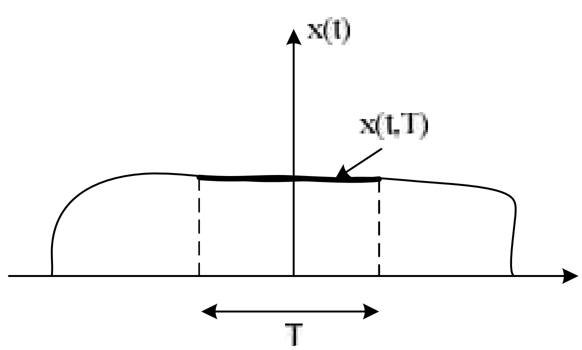
La symétrie des transformations directe et inverse montre l'existence d'une dualité entre l'espace temps et l'espace fréquence.



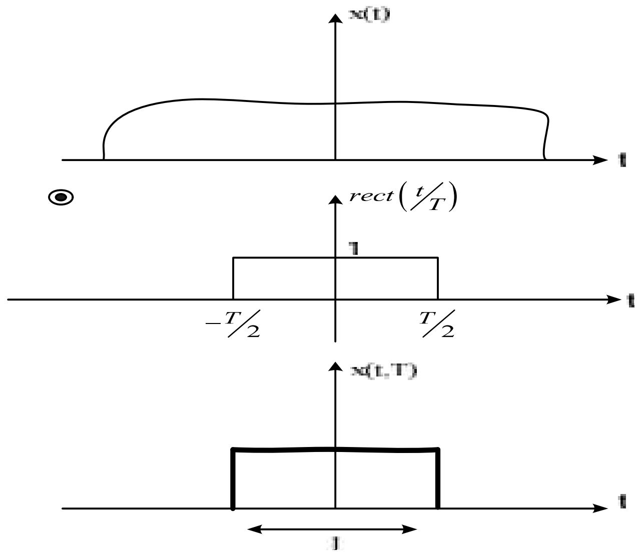
Cette dualité joue un rôle fondamental dans la plupart des méthodes de traitement de signal.

IV.4.3. Comparaison entre série de Fourier et transformée de Fourier :

Soit un signal $x(t)$ quelconque et soit une portion de ce signal



$x(t,T)$ comprise dans l'intervalle $|t| \le T/2$

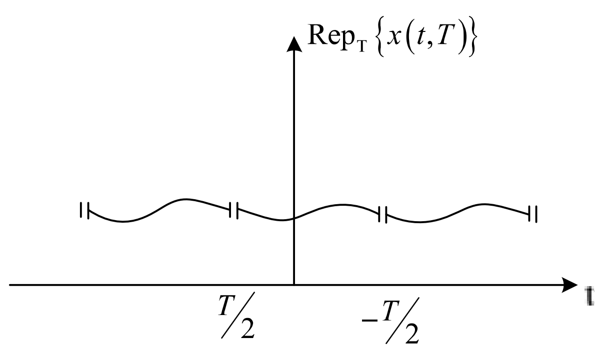


$x(t,T) = x(t).rect\left(t/T\right)$

En développant en série de Fourier cette portion du signal, on trouve les résultats suivants :

$$\begin{cases} x(t,T) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \exp\left(j2\pi n f_0 t\right) \\ C_n = \dfrac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t,T) \exp\left(-j2\pi n f_0 t\right) dt \end{cases}$$

Seulement en prenant la décomposition de série de Fourier $x(t,T)$, on suppose que ce signal est périodique de période T.



$\text{Rep}_T\left\{x(t,T)\right\}$: représente la répétition de $x(t,T)$

Or pour obtenir notre signal de départ $x(t)$ il faut augmenter la fenêtre d'observation.

Autrement dit, On fait tomber T vers l'infini.

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{T\to\infty} x(t,T) \\ &= \lim_{T\to\infty}\left[\sum_n C_n \exp\left(j2\pi n f_0 t\right)\right] \\ &= \lim_{T\to\infty}\left[\sum_n \left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t,T)\exp\left(-j2\pi n f_0 t\right)dt\right)\exp\left(j2\pi n f_0 t\right)\right] \end{aligned}$$

Si $T\to\infty \begin{cases} \dfrac{1}{T}\to df \\ nf_0\to f \\ \sum\to\int \end{cases}$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} df\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp\left(-j2\pi f t\right)dt\right)}_{X(f)}\exp\left(j2\pi f t\right)$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\exp\left(j2\pi f t\right)df$$

En conclusion, on peut dire que la TF est une généralisation de la SF en cas des signaux non périodique.

IV.4.4. Conclusion :

Pratiquement tous les signaux physiquement réalisables, ont une TF.
Pour les signaux qui ne possède pas la TF, une transformation de même type a été développé c'est la transformée de Laplace.

IV.4.5. Propriété de la transformée de Fourier :

a) Linéarité :

$$f(t)\xrightarrow{TF}F(f)$$
$$g(t)\xrightarrow{TF}G(f)$$
$$af(t)+bg(t)\xrightarrow{TF}aF(f)+bG(f)$$

b) Changement d'échelle du temps :

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(f)$$

$$f(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} F\left(f/a\right)$$

Cette propriété montre qu'une dilatation de l'échelle du temps conduit a une compression de l'échelle de fréquence et inversement.

c) Translation dans le temps :

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(f)$$

Si $f(t-t_0) \xrightarrow{TF} F(f)e^{-j2\pi f t_0}$

$$f(t+t_0) \xrightarrow{TF} F(f)e^{+j2\pi f t_0}$$

Cette propriété montre qu'une translation d'un signal dans le domaine temporelle n'influe rien sur son spectre d'amplitude, seul la phase est affectée d'un déphasage liée à cette translation.

d) Translation fréquentiel :

$$F(f) \xrightarrow{TF^{-1}} f(t)$$

Si $F(f-f_0) \xrightarrow{TF^{-1}} f(t)e^{j2\pi f_0 t}$

$$F(f+f_0) \xrightarrow{TF^{-1}} f(t)e^{-j2\pi f_0 t}$$

e) Dérivation temporelle :

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(f)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)e^{j2\pi f t}df$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} F(f)e^{j2\pi f t}df$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)\frac{d}{dt}\left(e^{j2\pi f t}\right)df$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)(j2\pi f)e^{j2\pi f t}df$$

$$\frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{TF} F(f)(j2\pi f)$$

Cas générale : $\dfrac{d^n f(t)}{dt^n} \xrightarrow{TF} F(f)(j2\pi f)^n$

f) Dérivation fréquentielle :

$$F(f) \xrightarrow{TF^{-1}} f(t)$$

$$\frac{d^n F(f)}{df^n} \xrightarrow{TF^{-1}} f(t)(-j2\pi t)^n$$

g) Convolution :

$$x(t) \otimes h(t) \xrightarrow{TF} X(f).H(f)$$

$$x(t).h(t) \xrightarrow{TF} X(f) \otimes H(f)$$

h) TF d'un signal conjugué :

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(f)$$

$$f^*(t) \xrightarrow{TF} F^*(-f)$$

IV.5. Transformée de Fourier des signaux élémentaires :

Le signal : $s(t)$	**Transformée de Fourier du signal :** $S(f)$
Constante A $\forall t$	$A\delta(f)$
$\delta(t)$	**1**
Peigne de Dirac $\sum_n \delta(t-nT)$	$\sum_n \frac{1}{T}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$
$\delta(t-\tau)$	$e^{-j2\pi f\tau}$
Echelon unité $U(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$
$A.rect\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$A\tau.\text{sinc}(f\tau)$
$A.tri\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT.\text{sinc}^2(fT)$
$e^{-j2\pi f_0 t}$	$\delta(f+f_0)$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f-f_0)$

Application :

Calculer et représenter la transformée de Fourier d'un signal sinusoïdale $s(t)$ d'amplitude S et de fréquence f_0 telle que : $s(t)=S.\cos(2\pi f_0 t)$.

$$S(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi f_0 t}\,dt = S.\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(2\pi f_0 t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Or $\cos(2\pi f_0 t)=\dfrac{e^{j2\pi f_0 t}+e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$

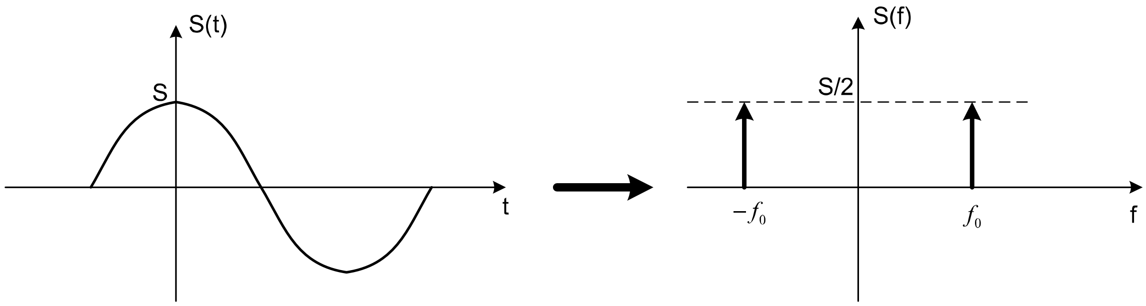
$$S(f)=S.\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{j2\pi f_0 t}+e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right)e^{-j2\pi ft}dt=\frac{S}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j2\pi f_0 t}.e^{-j2\pi ft}dt+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j2\pi f_0 t}.e^{-j2\pi ft}dt\right]$$

$$=\frac{S}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j2\pi(f_0-f)t}dt+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j2\pi(f_0+f)t}dt\right]=\frac{S}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j2\pi(f-f_0)t}dt+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j2\pi(f_0+f)t}dt\right]$$

Sinon sans calculer l'intégrale, en utilisant le tableau de transformation de Fourier ci-dessus.

$$S(f)=\frac{S}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$$

$$\boxed{TF\left[S.\cos(2\pi f_0 t)\right]=\frac{S}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]}$$



Remarque :

La transformée de Fourier d'une fonction cosinus de fréquence f_0 et d'amplitude *S*, est la somme de deux impulsions de Dirac centrée sur les fréquences $-f_0$ et $+f_0$; et d'amplitude la moitié de celle du signal : $S/2$.

La transformée de Fourier d'une fonction sinus de fréquence f_0 et d'amplitude S, est la somme de deux impulsions de Dirac centrée sur les fréquences $-f_0$ avec une amplitude $S/2$ et sur $+f_0$ avec une amplitude $-S/2$.

IV. 6. Produit d'une fonction périodique par un signal à énergie finie :

Soit $x(t)$ un signal à énergie finie et soit $y(t)$ un signal périodique

$$x(t) \to E.f$$
$$y(t) = y(t+nT)$$
$$z(t) = x(t).y(t)$$
$$z(f) = X(f) \otimes Y(f)$$

Puisque $y(t)$ est un signal périodique alors on peut le décomposer en S.F.

$$y(t) = \sum_n C_n e^{j\frac{n}{T}2\pi t} \xrightarrow{TF} Y(f) = \sum_n C_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$Z(f) = X(f) \otimes \sum_n C_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$
$$= \sum_n C_n \left[X(f) \otimes \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)\right]$$

$$\boxed{Z(f) = \sum_n C_n X\left(f - \frac{n}{T}\right)}$$

Conclusion :

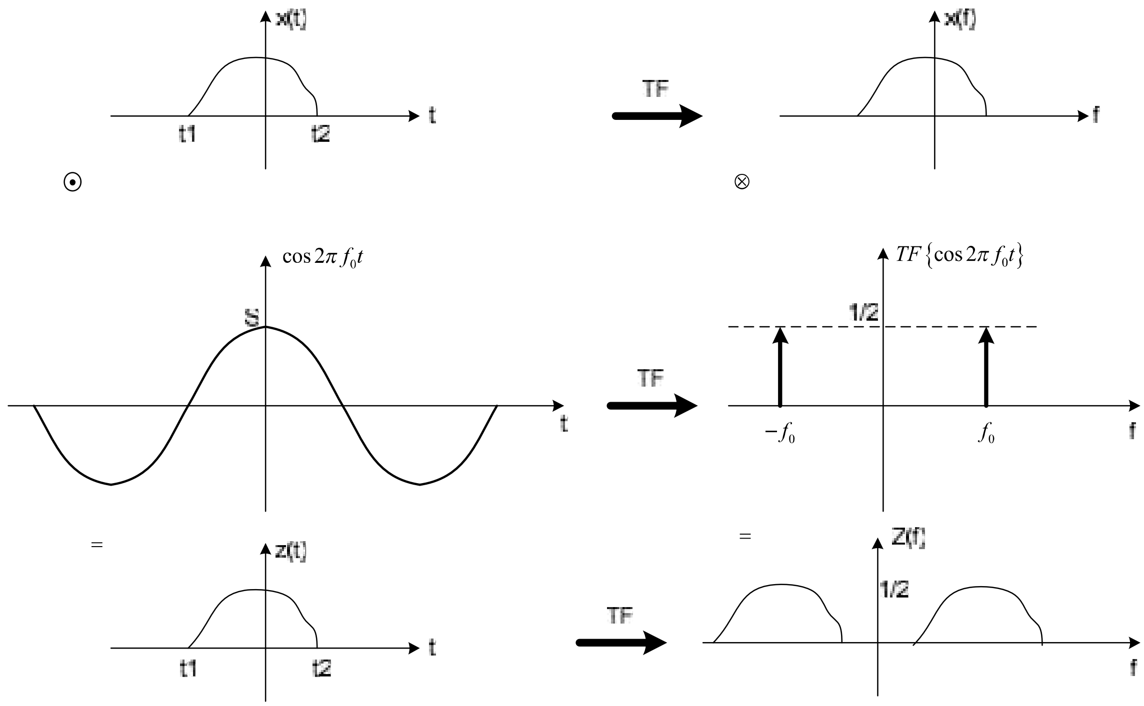
On peut dire que le spectre d'un signal temporel obtenu à partir du produit d'un signal à énergie finie avec un signal périodique est :

- Un signal d'énergie
- Une combinaison entre les deux signaux avec $x(t)$ décalé par un pas régulier de $\frac{n}{T}$ sur l'axe des fréquences.

Application :

Soit un signal à énergie finie $x(t)$ et soit un signal périodique $y(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

$$z(t) = x(t).\cos(2\pi f_0 t)$$
$$Z(f)??$$



$$A\cos(2\pi f_0 t) = A\left[\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right] = \frac{A}{2}\left[e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right]$$

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}\left[e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right] \xrightarrow{TF} \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

$$Z(f) = X(f) \otimes \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

$$Z(f) = \frac{1}{2}\left[X(f) \otimes \delta(f - f_0) + X(f) \otimes \delta(f + f_0)\right]$$

$$\boxed{Z(f) = \frac{1}{2}\left[X(f - f_0) + X(f + f_0)\right]}$$