

Chapitre VI

L'ECHANTILLONNAGE

VI. 1. Introduction :

La plupart des signaux physiques porteurs d'information sont de nature analogique (amplitude et temps continus) qui exigent un traitement spécifique.

De nos jours et avec les progrès de l'électronique numérique conversion analogique numérique (C.A.N) et conversion numérique analogique (C.N.A) des fonctions complexes telle que le filtrage, la corrélation, la convolution... sont réalisables sous forme de carte autonome à base de D.S.P (digital signal processing) grâce à un micro-ordinateur. Ce type de traitement donne des résultats plus fiables que le traitement à base de signal analogique. De ce fait il faut discrétiser le signal c'est l'opération d'échantillonnage.

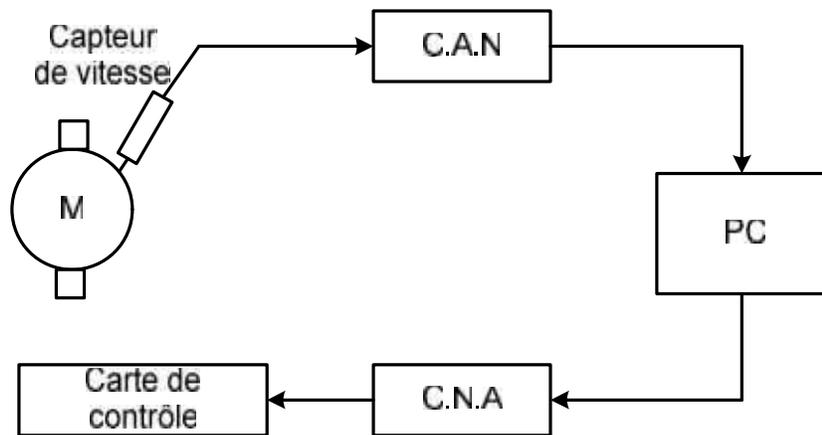


Figure VI.1. Chaîne de mesure et de contrôle.

VI.2. Principe de l'échantillonnage :

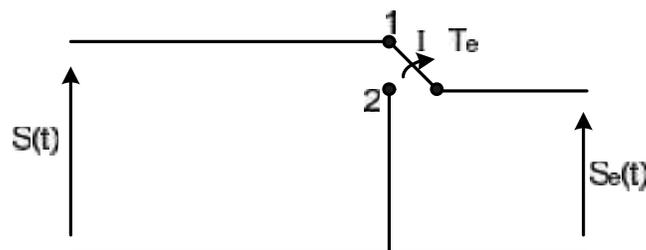


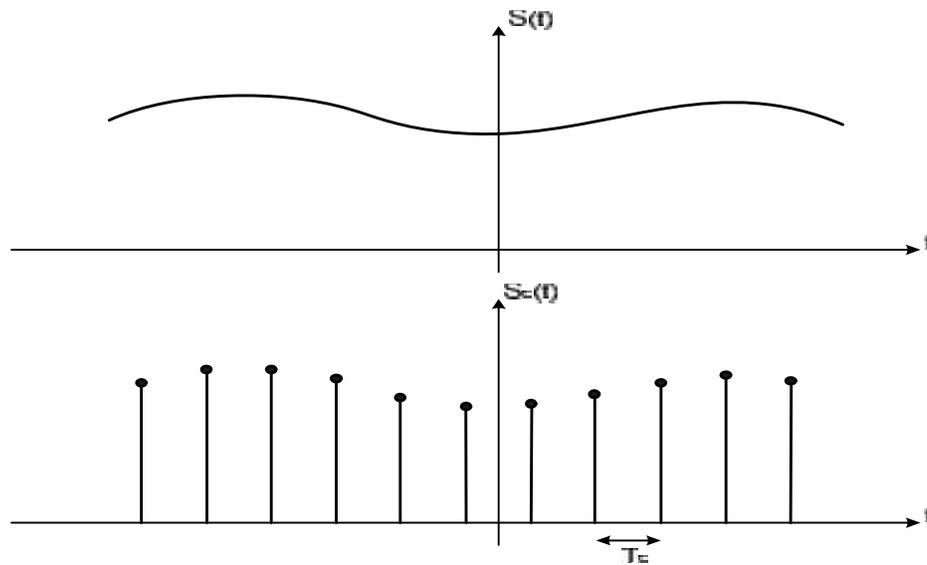
Figure VI.2. Schéma de principe d'un échantillonneur.

$$I = 1 \Rightarrow s_e(t) = s(t)$$

$$I = 2 \Rightarrow s_e(t) = 0$$

Principe de base d'un échantillonneur est réalisé comme le montre la figure (VI.2). Cet interrupteur s'ouvre et se ferme périodiquement à la fréquence $f_e = \frac{1}{T_e}$

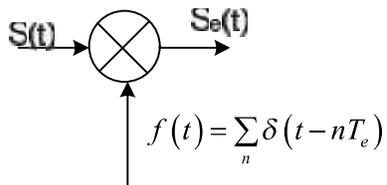
L'opération d'échantillonnage peut engendrer des déformations du signal (perte d'information) $s(t)$ et $s_e(t)$ doivent contenir la même information.



$s_e(t)$ Est une suite d'impulsion périodique d'une période T_e .

VI.3. Echantillonnage idéal d'un signal analogique :

D'après le principe de l'échantillonnage on peut le schématiser comme suit :



$f(t)$: fonction d'échantillonnage.

Dans le cas d'un échantillonnage idéal $f(t)$ n'est qu'une suite d'impulsion de Dirac qui représente l'ouverture et la fermeture d'interrupteur.

$$\begin{aligned}
 s_e(t) &= s(t) \odot \sum_n \delta(t - nT_e) \\
 &= \sum_n s(nT_e) \delta(t - nT_e)
 \end{aligned}
 \tag{VI.1}$$

Echantillonnage idéal est caractérisé par une suite d'impulsions de Dirac périodique (T_e échantillonnage régulier) dont l'air de chaque impulsion est égal à l'amplitude du signal analogique $s(t)$ à l'instant d'échantillonnage.

VI.4. La transformée de Fourier d'un signal échantillonné :

Echantillonnage temporelle \xrightarrow{TF} ?

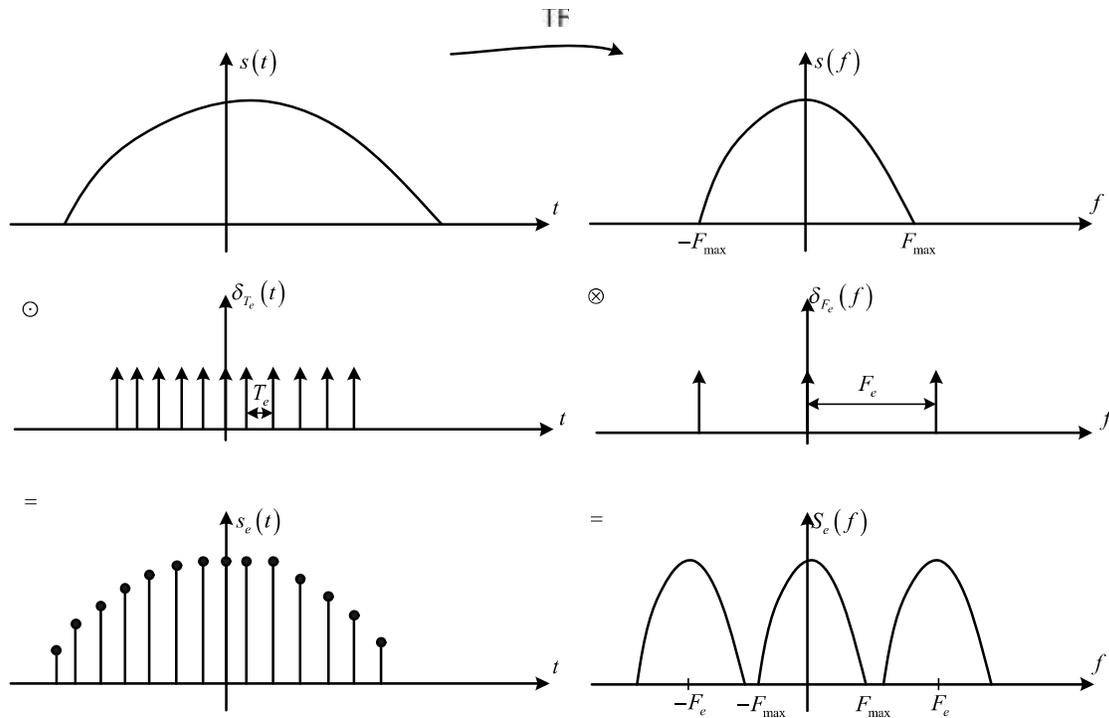
$$s_e(t) = s(t) \cdot \sum_n \delta(t - nT_e) \tag{VI.2}$$

$$\xrightarrow{TF} S_e(f) = S(f) \otimes \sum_n \frac{1}{T_e} \delta\left(f - \frac{n}{T_e}\right) \tag{VI.3}$$

$$F_e = \frac{1}{T_e}$$

$$S_e(f) = F_e S(f) \otimes \sum_n \delta(f - nF_e) \tag{VI.4}$$

$$\boxed{S_e(f) = F_e \sum_n S(f - nF_e)} \tag{VI.5}$$



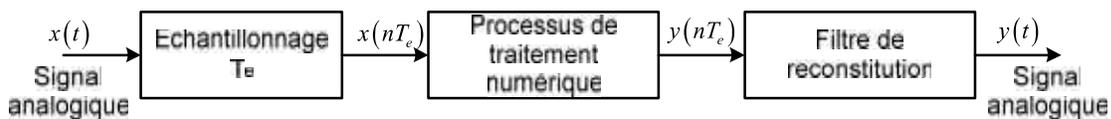
Echantillonnage Temporel \xrightarrow{TF} périodicité du spectre

Le spectre de $X_e(f)$ est celui de $X(f)$ "périodisé" avec une période fréquentielle F_e

L'échantillonnage dans le domaine temporel se traduit par une "périodisation" de période F_e dans le domaine fréquentiel.

Le spectre du signal échantillonné est formé par une suite du spectre du signal analogique (le spectre du signal analogique se répète périodiquement sur l'axe des fréquences avec une période $F_e = \frac{1}{T_e}$).

VI.5. Problème d'échantillonnage :



En étudiant le schéma bloque d'une chaine de traitement et de commande, on s'aperçoit que deux questions peuvent se poser.

- 1) Quelle doit être la valeur de T_e pour avoir un signal échantillonné représentant le plus fidèlement le signal $x(t)$.
 - 2) Comment doit être choisi le filtre de reconstitution pour obtenir un signal analogique $y(t)$ le plus représentatif possible.
- Pour ce qui est pour la première question, la solution a été donnée par le théorème **Shannon**, il faut respecter la condition $F_e \geq 2F_{\max}$, $T_e \leq \frac{1}{2}T_{\max}$.

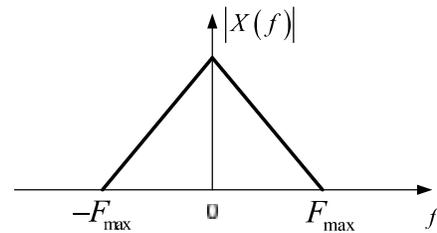
F_{\max} : étant la fréquence maximal de signal analogique.

VI.6. Echantillonnage et recouvrement du spectre :

Le signal doit posséder un spectre borné pour qu'on puisse le reconstituer à partir de sa version échantillonnée à condition que la fréquence $F_e \geq 2F_{\max}$

On considère que $x(t)$ est un signal réel dont le spectre est borné en fréquence, de fréquence maximale F_{\max} .

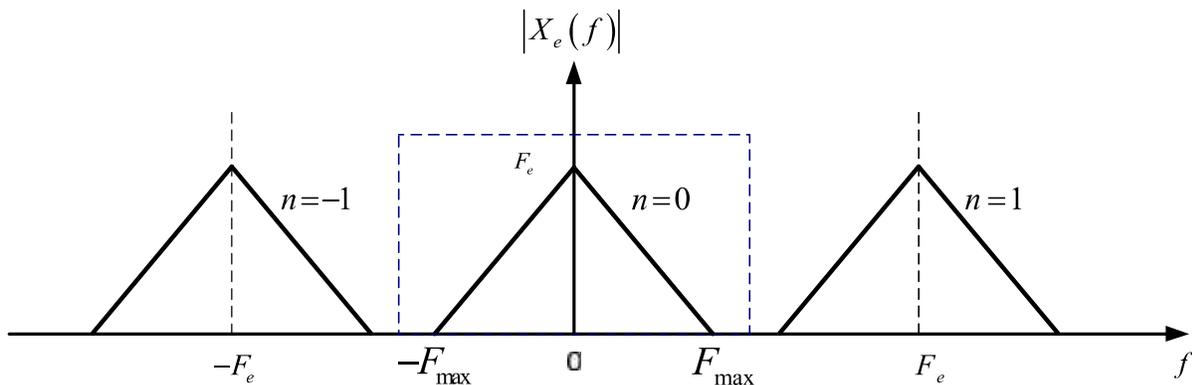
$$\forall |f| > F_{\max}, |X(f)| = 0$$



Question : que devient le spectre $X_e(f)$ en fonction de F_e ?

$$X_e(f) = F_e \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X(f - nF_e) \tag{VI.6}$$

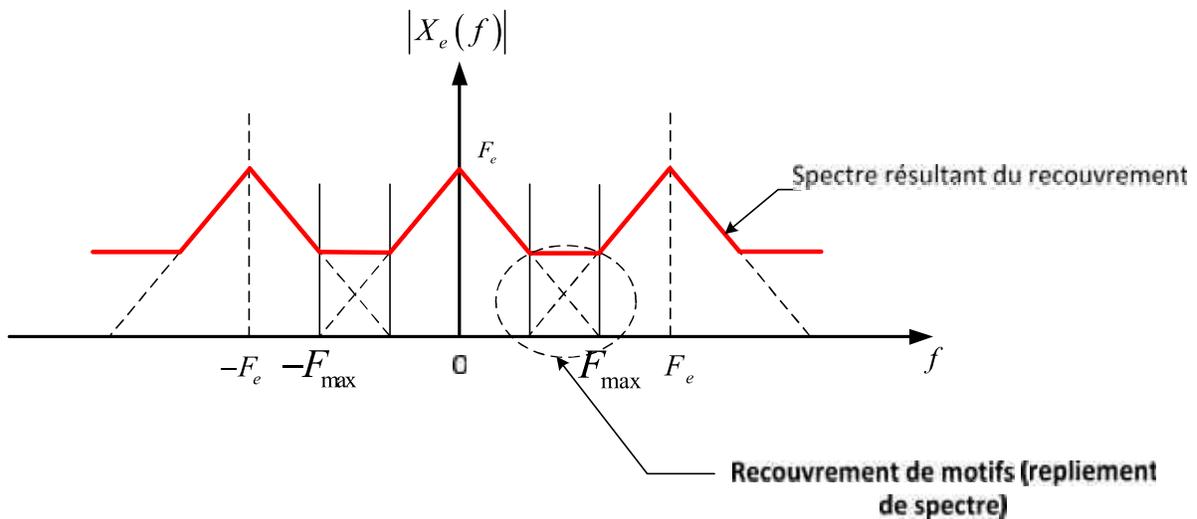
Cas 1 : $F_e \geq 2F_{\max}$



Les motifs élémentaires de $|X_e(f)|$ sont disjoints (pas de recouvrement des motifs)

Le motif principal ($n = 0$) est égal au spectre de $x(t)$. Comme les motifs sont disjoints, on peut extraire $X(f)$ grâce à un filtre passe-bas idéal et donc reconstituer intégralement le signal $x(t)$ à partir de la connaissance de son échantillonné $x_e(t)$.

Cas 2 : $F_e < 2F_{\max}$



Les motifs élémentaires de $|X_e(f)|$ se recouvrent. On parle de **repliement de spectres**.

A cause du chevauchement des motifs élémentaires constituant le spectre $X_e(f)$ du signal échantillonné, il n'est pas possible de récupérer le spectre $X(f)$ par un filtrage approprié (le recouvrement empêche de trouver le signal d'origine). Il n'est donc pas possible de reconstruire le signal initial $x(t)$ à partir de la connaissance de son échantillonné $x_e(t)$.

Question : quelle est la condition sur F_e pour qu'à partir du signal échantillonné $x_e(t)$, on puisse reconstruire intégralement $x(t)$?

$F_e \geq 2F_{\max}$ pas de recouvrement de spectre → extraction de $X(f)$ par filtrage passe-bas idéal

$F_e < 2F_{\max}$ repliement de spectre → impossibilité de récupérer $X(f)$ par filtrage

Par conséquent, pour que la répétition périodique du spectre de $x_e(t)$ ne déforme pas le spectre $X(f)$ répété, il faut et il suffit que $F_e \geq 2F_{\max}$ (appliquer le **théorème de Shannon**)

Conclusion :

Le signal doit posséder un spectre borné pour qu'on puisse le reconstituer à partir de sa version échantillonnée, à condition que la fréquence $F_e \geq 2F_{\max}$

VI.7. Enoncé du théorème de Shannon :

La condition nécessaire et suffisante pour échantillonner un signal sans perte d'information est que la fréquence d'échantillonnage F_e soit supérieure ou égale au double de la fréquence maximale du signal. Plus précisément, si on note F_{\max} la fréquence maximale du signal, il faut et il suffit que : $F_e \geq 2F_{\max}$.

VI.7.1. Echantillonnage idéal :

L'échantillonnage idéal suppose l'utilisation d'une impulsion infiniment brève permettant d'extraire la valeur instantanée $x(nT_e)$ à l'instant nT_e .

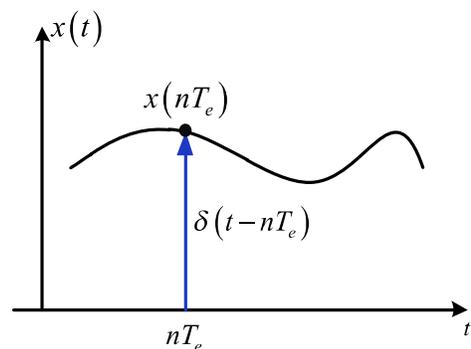
C'est donc l'application de la distribution $\delta(t - nT_e)$ au signal continu $x(t)$:

Par définition :
$$x_e(nT_e) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(\tau - nT_e) d\tau$$

On remarque que : $x(t) \otimes \delta(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(\tau - t) d\tau$ on

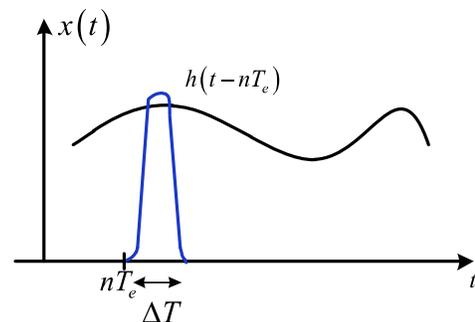
déduit alors $x_e(nT_e) = x(t) \otimes \delta(-t) \Big|_{t=nT_e}$

L'échantillonneur est assimilable à un filtre de réponse impulsionnelle $\delta(-t)$



VI.7.2. Echantillonnage réel :

En pratique, on n'a pas une impulsion infiniment brève et l'échantillonneur est assimilable à un filtre de réponse impulsionnelle $h(-t)$.



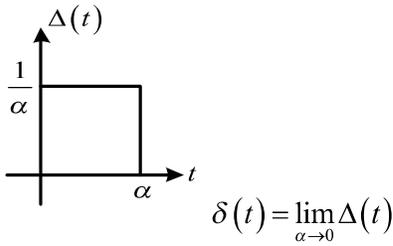
VI.7.2.1. Expression d'un échantillon réel :

$$\begin{aligned}
 x_e(nT_e) &= x(t) \otimes h(-t) \Big|_{t=nT_e} \\
 x_e(nT_e) &= [x(t) \otimes h(-t)] \delta(t - nT_e)
 \end{aligned}
 \tag{VI.7}$$

D'où l'expression du signal échantillonné réel :

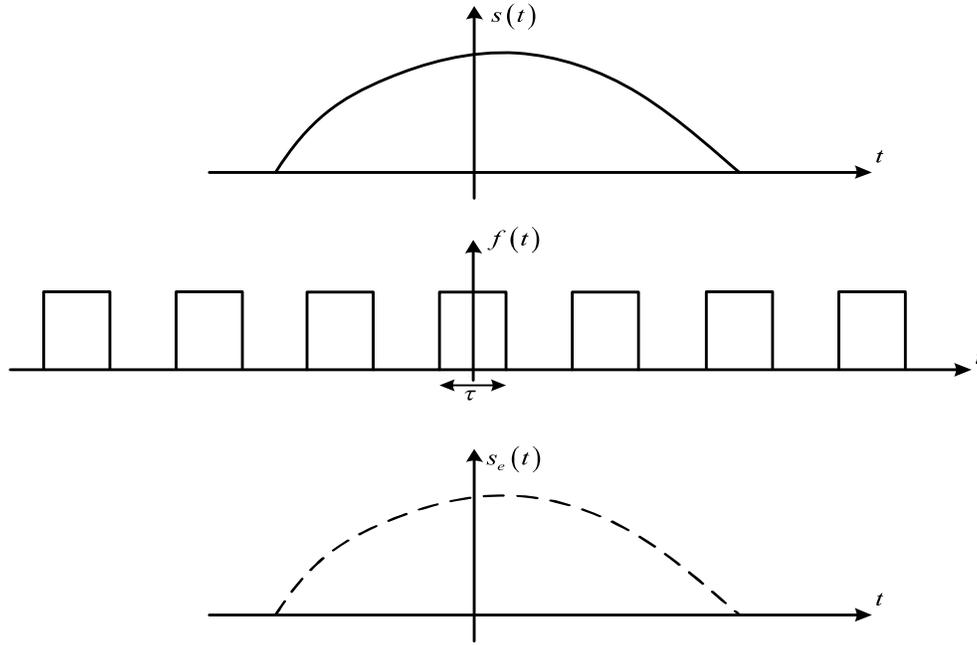
$$x_e(t) = [x(t) \otimes h(-t)] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e)
 \tag{VI.8}$$

Sachant que le peigne de Dirac n'est pas une fonction physiquement réalisable. Ce la veut dire qu'un échantillonnage avec ce type de fonction ne peut être réalisable. Par contre on sait qu'une Dirac peut être assimilée à :



Un échantillonnage réel périodique d'un signal analogique $s(t)$ est obtenu, en multipliant se signal par une fonction d'échantillonnage $f(t)$ périodique de période T_e d'impulsion rectangulaire d'amplitude unité et de durée τ .





$$s_e(t) = s(t) \cdot \text{Rect}_{T_e} \left(\frac{t}{\tau} \right) \tag{VI.9}$$

$$s_e(t) = s(t) \cdot \left[\text{Rect} \left(\frac{t}{\tau} \right) \otimes \sum_n \delta(t - nT_e) \right]$$

$$\xrightarrow{TF} S_e(f) = S(f) \otimes \left[\tau \text{sinc}(f\tau) \odot F_e \sum_n \delta(f - nF_e) \right] \tag{VI.10}$$

$$S_e(f) = F_e \tau S(f) \otimes \sum_n \text{sinc}(nF_e \tau) \delta(f - nF_e)$$

$$\boxed{S_e(f) = F_e \tau \sum_n \text{sinc}(nF_e \tau) S(f - nF_e)} \tag{VI.11}$$

Le spectre d'un signal échantillonné réellement, est constitué d'une suite de motif $S(f)$ qui se répète périodiquement sur l'axe de fréquence avec une période F_e . Ces motifs spectraux sont pondérés par un facteur qui dépend de la densité d'impulsion ($F_e \tau$) et qui varie en fonction de n selon une loi en *sinc*.

VI.8. Quantification :

L'opération de quantification consiste à attribuer un nombre binaire à toute valeur prélevée au signal lors de l'échantillonnage.

C'est le CAN (convertisseur analogique numérique) qui réalise cette opération.

Chaque niveau de tension est codé sur p bits, chaque bit pouvant prendre deux valeurs (0 ou 1).

Donc un convertisseur à p bits possède 2^p niveaux de quantification.

Considérons un CAN 4 bits, il n'y a donc que $2^4 = 16$ valeurs possibles attribuables à toutes les valeurs prélevées lors de l'échantillonnage.

L'opération se fait donc avec une perte d'information d'autant plus grande que p est petit.

Le schéma ci-dessous représente une partie de la caractéristique de transfert d'un convertisseur 4 bits ; à tous les niveaux de tension d'un même palier, le convertisseur fait donc correspondre un seul et même nombre binaire :

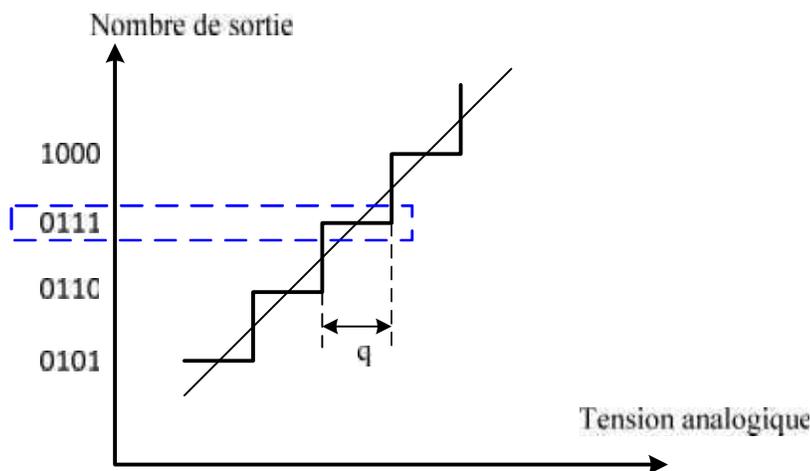


Figure VI.3. Caractéristique de transfert d'un CAN- Quantification à 4 bits.

q est le pas de quantification : il correspond à la plus petite variation de tension que le convertisseur peut coder. On voit bien que plus q est faible, meilleure sera la précision de codage.

Pour une quantification par défaut, où $x_n = nq$ si x est compris entre nq et $(n+1)q$, l'erreur commise appelée bruit de quantification est donnée sur le graphe ci-dessous :

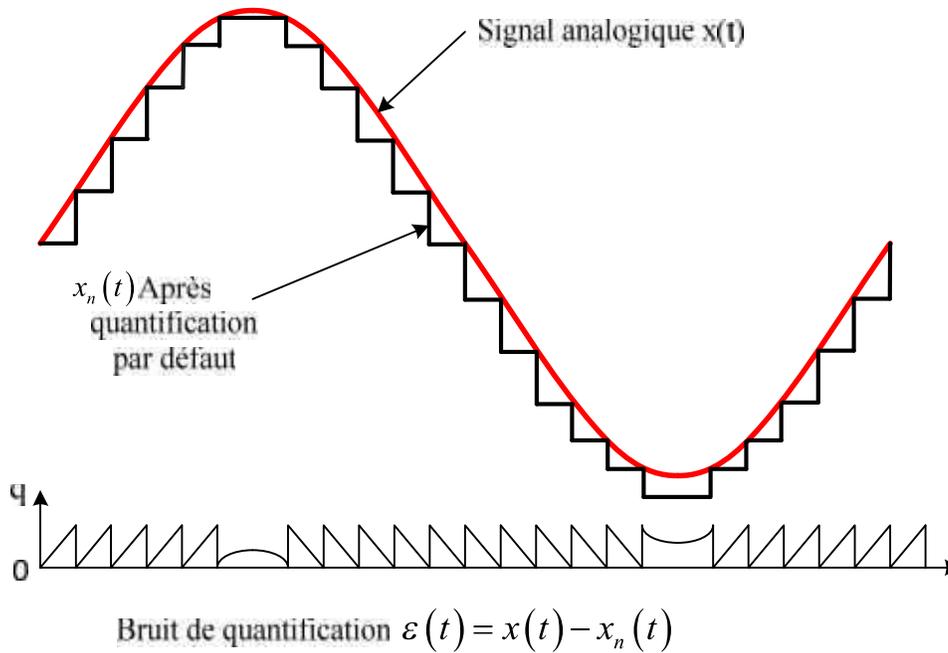


Figure VI.4. Bruit de quantification d'un signal échantillonné.

VI.9. Transformée de Fourier Discrète :

VI.9.1. Passage de la TF a la TFD :

Il suffit de savoir que tout signal analogique $x(t)$ est acquis à un rythme régulier dicté par la période d'échantillonnage T_e et qu'il est stocké en mémoire d'ordinateur. Ces signaux $x[n]$ sont des signaux numériques obtenus à l'aide d'un convertisseur analogique-numérique (figure 3.1) et tels que :

$$x[n] = x(t)|_{t=nT_e}$$

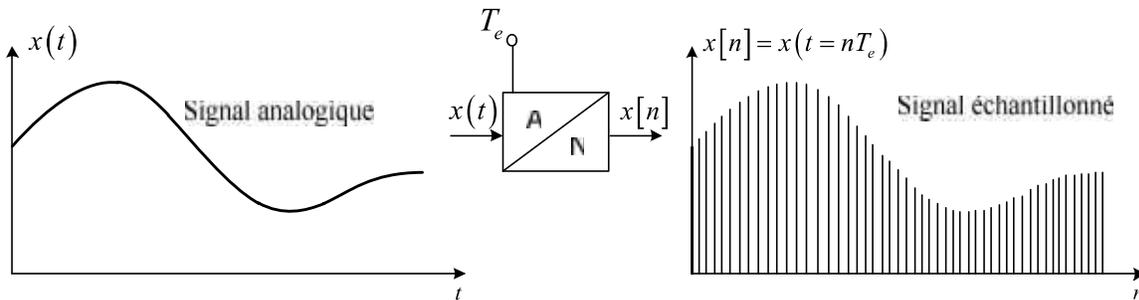


Figure VI.5. Acquisition numérique d'un signal analogique.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (\text{VI.12})$$

1) on numérise $x(t) \rightarrow x(n)$

2) on prend une durée d'observation du signal

Soit $n \in (0 \text{ à } N-1)$

$$3) X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi fn}$$

$$4) \text{ soit } f = \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \frac{3}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}$$

$$f = \frac{k}{N}$$

$$X\left(\frac{k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

Par normalisation, on note :

$$\boxed{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N} kn}} \quad k \in [0, N-1] \quad (\text{VI.13})$$

La TFD inverse est donnée par :

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N} kn}} \quad n \in [0, N-1] \quad (\text{VI.14})$$

On note $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

L'équation (VI.13) devient :

$$\boxed{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}} \quad , X : \text{vecteur}, x : \text{vecteur}, W : \text{matrice}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}} \quad (\text{VI.15})$$

Notation matricielle :

$$X = W x \text{ et } x = W^{-1} X$$

Remarque : la matrice W possède des propriétés très intéressantes qui permettent de vérifier une méthode de calcul de la TFD. Cette méthode est appelée transformée de Fourier rapide FFT (Fast Fourier transform).

Exemple :

Calculer la DFT du signal suivant : $x[n] = \{1, 2, 1, 0\}$

Dans ce cas-ci, on a $N = 4$, et donc selon la définition de la TFD, $e^{-j2\pi kn/N} = e^{-j\pi kn/2}$. On calcule les valeurs :

$$k = 0 : X_{DFT}[0] = \sum_{n=0}^3 x[n] e^0 = 1 + 2 + 1 + 0 = 4$$

$$k = 1 : X_{DFT}[1] = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j\pi n/2} = 1 + 2e^{-j\pi/2} + e^{-j\pi} + 0 = -j2$$

$$k = 2 : X_{DFT}[2] = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j\pi n} = 1 + 2e^{-j\pi} + e^{-j2\pi} + 0 = 0$$

$$k = 3 : X_{DFT}[3] = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j3\pi n/2} = 1 + 2e^{-j3\pi/2} + e^{-j3\pi} + 0 = j2$$

$$X_{FTD} = \{4, -j2, 0, j2\}$$

VI.9.2. Transformée de Fourier rapide FFT (Fast Fourier transformer) :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \text{ avec } W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \text{ et } x(n), n \in [0, N-1]$$

Le calcul directe exige un nombre d'opérations élevé, c'est pour cette raison qu'on à recourt a l'algorithme de la FFT.

Le nombre de multiplication : $N.N = N^2$.

Le nombre d'addition : $N(N-1)$ addition complexe.

La découverte de la transformée rapide de Fourier en 1965 par Cooley et Tukey a été d'une importance majeure pour le traitement du signal car elle a permis d'envisager l'analyse spectrale numérique de signaux de longue durée en des temps raisonnablement courts. L'algorithme de Cooley et Tukey a très vite été connu sous le nom de transformation rapide de Fourier.

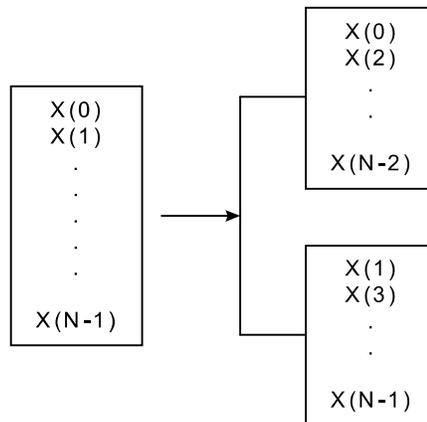
Il ne faut pas se méprendre sur la signification de la FFT : l'algorithme FFT n'est pas une nouvelle transformation. Ce n'est rien d'autre qu'un moyen rapide d'obtenir les mêmes résultats que ceux fournis par la TFD.

VI.9.3. Principe de la FFT :

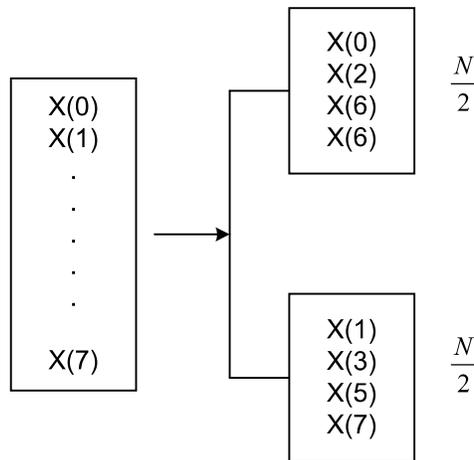
On prend les échantillons $x(n)$ et on les divise en 2 parties :

$x(2n) \rightarrow$ Échantillons de rang pair.

$x(2n+1) \rightarrow$ Échantillons de rang impair



Exemple N=8



$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)W_N^{(2n+1)k}$$

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k)$$

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1\left(k + \frac{N}{2}\right) + W_N^{k+\frac{N}{2}} X_2\left(k + \frac{N}{2}\right)$$

A la fin pour N=8

Méthode directe : il faut $N^2=64$ multiplications et $N(N-1)=56$ additions

Méthode de FFT nécessite que $\frac{N}{2} \log_2 N = 12$ multiplications et $N \log_2 N = 24$ additions