الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Ziane Achour de Djelfa (Algérie)
Faculté des sciences exactes et de l'informatique
Département des mathématiques

جامعة زيان عاشور الجلفة

2021 /2022

COURS:

Espaces Vectoriels Normés

Pour la 3iéme Année Licence Mathématiques - Semestre 5.

Unité d'enseignement : Fondamentale

Crédits : 5

Coefficient : 3

Réalisé par :

Dr. Bilal BASTI

E-mail : bilalbasti@gmail.com

b.basti@univ-djelfa.dz

Octobre 2021

Remerciements

Par-dessus tout, mes louanges et ma gratitude sont dues à Allah le tout-puissant qui m'a accordé la force et la patience pour mener à bien ce polycopié.

Ce document est un cours constitué de diverses notes, des exercices et de sujet d'examen qui accompagnent du module Analyse hilbertienne (le nouveau label est Espaces Vectoriels Normés) donné en cinquième semestre de licence académique à au département de mathématiques, faculté des sciences exactes et de l'informatique dans l'université Ziane Achour de Djelfa. Toutes remarques permettant d'améliorer ce document seront bien venues.

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude à tous ceux qui ont participé à ce voyage éducatif. D'abord et avant tout, je suis redevable à mes étudiants et à tous mes collègues professeurs. Je suis également profondément reconnaissant au doyen de la faculté le professeur Farid Messalmi, aussi, le chef du département de mathématiques Dr. Mabrouk Briki pour sa patience, ses précieux conseils et ses encouragements constants tout au long de cette période.

En outre, je voudrais adresser et remercier au panel d'examinateurs du comité scientifique et du conseil scientifique. Mon voyage a été rendu plus supportable grâce à l'aide et aux encouragements attentionnés que j'ai reçus de mes collègues professeurs, de ma famille et de mes amis, et c'est pourquoi mes plus grands remerciements vont à eux.

Avant-propos

Ce polycopié est le fruit des années d'enseignement des matières Analyse 1–3, Topologie et Algèbre Linéaire pour apprendre aux étudiants de la troisième année Licence Mathématiques l'importance de l'espace de Banach et la particularité de l'espace de Hilbert comme étant une classe des espaces normés. Pour faire aussi apparaitre des résultats propres à cet espace.

J'ai respecté le programme officiel, qui a été publié dans la décision ministérielle dans la fiche d'organisation semestrielle des enseignements en l'année universitaire : 2018-2019.

Ce polycopié est décomposé en six chapitres :

Le but du chapitre 0 est de présenter quelques rappels sur les espaces vectoriels et leurs propriétés avec quelques exemples, et dans le chapitre 1 et 2, nous allons généraliser quelques notions de bases sur les normes, les distances et leurs propriétés, l'ensemble des applications linéaires, le dual topologique d'espaces vectoriels normés et d'espaces de Banach.

L'objectif du troisième chapitre serait d'introduire de quelques notions de base, définitions et propriétés sur les espaces de Hilbert, l'orthogonalité, la famille orthogonale et les systèmes orthonormés. Aussi, nous allons donner les théorèmes de base sur la projection orthogonale dans un espace préhilbertien, le dual d'un espace de Hilbert et la représentation de Riesz. Dans le dernier de ce chapitre, nous présentons l'inégalité de Bessel, l'égalité de Parseval et la base hilbertienne.

Dans le quatrième chapitre, on présente quelques notions sur les coefficients de Fourier, les séries trigonométriques. Aussi, nous allons donner quelques définitions de base sur la continuité par morceaux, les fonctions périodiques et la série de Fourier de ces fonctions. Dans le dernier de ce chapitre, nous présentons et prouvons la convergence de la série de Fourier et ses applications.

Un des points-clés de ces chapitres sera l'étude des séries de Fourier dont les applications sont assez nombreuses dans d'autres domaines des mathématiques (notamment les équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles).

La plupart des exemples dans ce polycopié sont tirés de livres [1-10], et j'ai fourni à la fin de chaque chapitre des exercices qui sont résolus au dernier chapitre ainsi que le sujet d'examen final.

Enfin, j'espère que l'étudiant et l'enseignant de mathématiques trouvent leurs besoins dans ce polycopié et j'estime que ce travail est toujours dans le besoin de révision, donc je peux accueillir toutes les critiques constructives et utiles.

Notation

$\mathbb{N}$	Nombres naturels $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
$\mathbb{N}^*$	Nombres naturels non nuls $\{1, 2, 3, \ldots\}$.
$\mathbb{Z}$	Nombres entiers $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
$\mathbb{R}$	Nombres réels $(-\infty, \infty)$.
$\mathbb{R}_+$	Nombres réels positifs $(0, \infty)$.
$\mathbb{R}^*$	Nombres réels non nuls $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
$\mathbb{C}$	Nombres complexes, $z \in \mathbb{C}$, then $z = x + iy$, where $x, y \in \mathbb{R}$, and $i^2 = -1$.
$\mathbb{k}$	Désigne un corps (dans ce cours $\mathbb{k} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$).
E	Désigne un espace vectoriel ou un espace préhilbertien.
$\lVert \cdot \rVert_E$	Désigne une norme sur un espace vectoriel E.
e.v.n.	Espace vectoriel normé noté par le couple $(E, \lVert \cdot \rVert)$.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Désigne un produit scalaire.
H	Espace de Hilbert.
Re (α)	La partie réelle d'un nombre complexe α.
Im (α)	La partie imaginaire d'un nombre complexe α.
$L^1(\Omega, \mathbb{R})$	Espace de LEBESGUE des fonctions mesurables à valeurs complexes f sur Ω dans $\mathbb{R}$, pour lesquelles $\lVert f \rVert_{L^1} = \int_\Omega \lvert f(s) \rvert \, ds < \infty$.
$L^p(\Omega, \mathbb{R})$	Espace des fonctions mesurables f, avec $\lvert f \rvert^p \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$, pour tout $1 < p < \infty$.
$C(\Omega, \mathbb{R})$	Espace de toutes les applications continues sur Ω dans $\mathbb{R}$.
$C^n(\Omega, \mathbb{R})$	L'espace des applications (avec ses dérivées d'ordre n) continues sur Ω dans $\mathbb{R}$.

Table des matières

Introduction

La notion d'espace vectoriel est une structure fondamentale des mathématiques modernes. Il s'agit de dégager les propriétés communes que partagent des ensembles pourtant très différents. Par exemple, on peut additionner deux vecteurs du plan, et aussi multiplier un vecteur par un réel (pour l'agrandir ou le rétrécir).

Mais on peut aussi additionner deux fonctions, ou multiplier une fonction par un réel. Même chose avec les polynômes, les matrices,... Le but est d'obtenir des théorèmes généraux qui s'appliqueront aussi bien aux vecteurs du plan, aux espaces de fonctions, aux polynômes, aux matrices,...

On va parler d'espaces vectoriels normés et d'applications linéaires continues entre ces espaces. Les plus intéressants sont de dimension infinie donc on va principalement parler d'iceux. L'étude de ces objets peut être vue comme de l'algèbre linéaire en dimension infinie.

En mathématiques, un espace de Hilbert est un espace vectoriel réel (resp. complexe) muni d'un produit scalaire euclidien (resp. hermitien), qui permet de mesurer des longueurs et des angles et de définir une orthogonalité. Un espace de Hilbert est complet, ce qui permet d'appliquer des techniques d'analyse. Ces espaces doivent leur nom au mathématicien allemand David Hilbert.

Le concept d'espace de Hilbert étend les méthodes de l'algèbre linéaire en généralisant les notions d'espace euclidien (comme le plan euclidien ou l'espace usuel de dimension 3) et d'espace hermitien à des espaces de dimension quelconque (finie ou infinie).

L'intuition géométrique intervient dans de nombreux aspects de la théorie d'espaces de Hilbert qui possède des théorèmes analogues au théorème de Pythagore et à la règle du parallélogramme.

En mathématiques appliquées, les projections orthogonales sur un sous-espace (ce qui correspond à aplatir l'espace de quelques dimensions) jouent un rôle important dans des problèmes d'optimisation entre autres aspects de la théorie. Un élément d'un espace de Hilbert peut être défini de manière unique par ses coordonnées relativement à une base de Hilbert, de façon analogue aux coordonnées cartésiennes dans une base orthonormale du plan.

La théorie du dernier chapitre nous permet de mieux comprendre toutes sortes de phénomènes périodiques. Elle a son origine aux $18^{ème}$ siècle dans l'interpolation de fonctions périodiques en astronomie, dans l'étude de la corde vibrante et du son avant d'entrer en force en sciences grâce à la théorie de la chaleur de Fourier (1822).

Rappels sur les espaces vectoriels

Dans ce chapitre nous présentons quelques rappels sur les espaces vectoriels et leurs propriétés avec quelques exemples. Dans la plupart des exemples; $\mathbb{k}$ désigne un corps, ce sera le corps $\mathbb{R} \vee \mathbb{C}$.

Définition d'un espace vectoriel

Un espace vectoriel est un ensemble formé de vecteurs, de sorte que l'on puisse additionner (et soustraire) deux vecteurs u, v pour former un troisième $u + v$ (ou $u - v$) et aussi afin que l'on puisse multiplier chaque vecteur u d'un facteur λ pour obtenir un vecteur $\lambda \cdot u$. La définition formelle est :

Définition 0.1. *Un $\mathbb{k}-$espace vectoriel est un ensemble non vide E muni :*

- $\circledast$ *d'une loi de composition interne, c'est-à-dire d'une application de $E \times E$ dans E :*

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E, \\ (u, v) & \longmapsto & u + v, \end{array}$$

- $\circledast$ *d'une loi de composition externe, c'est-à-dire d'une application de $\mathbb{k} \times E$ dans E :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k} \times E & \to & E, \\ (\lambda, v) & \longmapsto & \lambda \cdot u, \end{array}$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

1. $u + v = v + u$ *(pour tout $u, v \in E$).*
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$ *(pour tout $u, v, w \in E$).*
3. *Il existe un élément neutre $0_E \in E$ tel que $u + 0_E = u$ (pour tout $u \in E$).*
4. *Tout $u \in E$ admet un symétrique u' tel que $u + u' = 0_E$. Cet élément u' est noté $-u$.*
5. $1 \cdot u = u$ *(pour tout $u \in E$).*
6. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$ *(pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$, $u \in E$).*
7. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ *(pour tous $\lambda \in \mathbb{k}$, $u, v \in E$).*
8. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$ *(pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$, $u \in E$).*

Exemple 0.1 (Le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}^2$)**.** *Posons $\Bbbk = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$. Un élément $u \in E$ est donc un couple (x, y) avec x élément de $\mathbb{R}$ et y élément de $\mathbb{R}$. Ceci s'écrit*

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Définition de la loi interne. Si (x, y) et (x', y') sont deux éléments de $\mathbb{R}^2$, alors :

$$(x, y) + \left(x', y'\right) = \left(x + x', y + y'\right).$$

Définition de la loi externe. Si λ est un réel et (x, y) est un élément de $\mathbb{R}^2$, alors :

$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y).$$

L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0, 0)$. Le symétrique de (x, y) est $(-x, -y)$, que l'on note aussi $-(x, y)$.

Exemple 0.2 (L'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)**.** *L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Nous le munissons d'une structure de $\mathbb{R}-$espace vectoriel de la manière suivante.*

- Loi interne. Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La fonction $f + g$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

  (où le signe $+$ désigne la loi interne de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans le membre de gauche et l'addition dans $\mathbb{R}$ dans le membre de droite).

- Loi externe. Si λ est un nombre réel et f une fonction de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $\lambda \cdot f$ est définie par l'image de tout réel x comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \times f(x).$$

  Nous désignons par $\cdot$ la loi externe de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et par $\times$ la multiplication dans $\mathbb{R}$. Avec l'habitude on oubliera les signes de multiplication : $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

- Élément neutre. L'élément neutre pour l'addition est la fonction nulle, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0.$$

  On peut noter cette fonction $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

- Le symétrique de l'élément f de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -f(x).$$

  Le symétrique de f est noté $-f$.

Exemple 0.3. *Tout plan passant par l'origine dans $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel (par rapport aux opérations habituelles sur les vecteurs).*

Soient $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ et $E = \mathcal{P}$ un plan passant par l'origine. Le plan admet une équation de la forme :

$$ax + by + cz = 0$$

où a, b et c sont des réels non tous nuls.

Un élément $u \in E$ est donc un triplet (noté comme un vecteur colonne) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $ax+by+cz = 0$.

Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{P}$. Autrement dit,

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0, \\ \text{et } ax' + by' + cz' &= 0. \end{aligned}$$

Alors $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ est aussi dans $\mathcal{P}$ car on a bien :

$$a\left(x + x'\right) + b\left(y + y'\right) + c\left(z + z'\right) = 0.$$

Les autres propriétés sont aussi faciles à vérifier : par exemple l'élément neutre est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; et si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{P}$, alors $ax + by + cz = 0$, que l'on peut réécrire $a(-x) + b(-y) + c(-z) = 0$ et ainsi $-\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{P}$.

Attention ! Un plan ne contenant pas l'origine n'est pas un espace vectoriel, car justement il ne contient pas le vecteur nul $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Terminologie et notations

Rassemblons les définitions déjà vues.

- ⊛ On appelle les éléments de E des vecteurs. Au lieu de $\mathbb{k}-$espace vectoriel, on dit aussi espace vectoriel sur $\mathbb{k}$.
- ⊛ Les éléments de $\mathbb{k}$ seront appelés des scalaires.

⊛ L'élément neutre 0_E s'appelle aussi le vecteur nul. Il ne doit pas être confondu avec l'élément 0 de $\mathbb{k}$. Lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion, 0_E sera aussi noté 0.

⊛ Le symétrique $-u$ d'un vecteur $u \in E$ s'appelle aussi l'opposé.

⊛ La loi de composition interne sur E (notée usuellement $+$) est appelée couramment l'addition et $u + u_0$ est appelée somme des vecteurs u et u_0.

⊛ La loi de composition externe sur E est appelée couramment multiplication par un scalaire. La multiplication de u par le scalaire λ sera souvent notée simplement λu, au lieu de $\lambda \cdot u$.

Sous-espace vectoriel

Il est vite fatiguant de vérifier les 8 axiomes qui font d'un ensemble un espace vectoriel. Heureusement, il existe une manière rapide et efficace de prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel : grâce à la notion de sous-espace vectoriel.

Définition 0.2. *Soit E un $\mathbb{k}-$espace vectoriel. Une partie F de E est appelée un sous-espace vectoriel si :*

1. $0_E \in F$,
2. $u + v \in F$ *pour tous* $u, v \in F$.
3. $\lambda \cdot u \in F$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{k}$ *et tout* $u \in F$.

Remarque 0.1. *Expliquons chaque condition.*

— *La première condition signifie que le vecteur nul de E doit aussi être dans F. En fait il suffit même de prouver que F est non vide.*

— *La deuxième condition, c'est dire que F est stable pour l'addition : la somme $u + v$ de deux vecteurs u, v de F est bien sûr un vecteur de E (car E est un espace vectoriel), mais ici on exige que $u + v$ soit un élément de F.*

— *La troisième condition, c'est dire que F est stable pour la multiplication par un scalaire.*

Exemple 0.4 (Exemples immédiats). *On a*

1. *L'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet :*

   (a) $(0, 0) \in F$,

   (b) *Si $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$ appartiennent à F. alors $x_1 + y_1 = 0$ et $x_2 + y_2 = 0$ donc $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0$ et ainsi $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ appartient à F.*

   (c) *Si $u = (x_1, y_1) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $x + y = 0$ donc $\lambda x + \lambda y = 0$, d'où $\lambda u \in F$.*

2. *L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. **Preuve** : la fonction nulle est continue ; la somme de deux fonctions continues est continue ; une constante fois une fonction continue est une fonction continue.*

Théorème 0.1. *Soient E un $\Bbbk-$espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est lui-même un $\Bbbk-$espace vectoriel pour les lois induites par E.*

Est-ce que l'ensemble des fonctions paires (puis des fonctions impaires) forme un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ avec les lois usuelles sur les fonctions) ?

Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires. Ce sont deux sous-ensembles de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions.

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)\} \\ \mathcal{I} &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)\}\end{aligned}$$

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-esp vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. C'est très simple à vérifier, par exemple pour $\mathcal{P}$:

(a) La fonction nulle est une fonction paire,

(b) Si $f, g \in \mathcal{P}$ alors $f + g \in \mathcal{P}$,

(c) Si $f \in \mathcal{P}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda f \in \mathcal{P}$.

Par le théorème 0.1, $\mathcal{P}$ est un espace vectoriel (de même pour $\mathcal{I}$).

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Dans ce chapitre nous allons présenter quelques notions de bases sur les normes, les distances et leurs propriétés, les espaces vectoriels normés et espace de Banach.

1.1 Norme sur un espace véctoriel

Soit $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel sur un corps $\Bbbk$ qui sera soit le corps $\mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{C}$.

1.1.1 Distances, Normes

Définition 1.1 (Distance). *Une distance d est une application positive de $E\times E$ dans $\mathbb{R}^{+}$, vérifiant les trois propriétés suivantes :*

1. $\forall (u,v)\in E^{2}, \left(d(u,v)=0 \Longleftrightarrow u=v\right)$, *(séparation),*
2. $\forall (u,v)\in E^{2}, d(u,v)=d(v,u)$, *(symétrie),*
3. $\forall (u,v,w)\in E^{3}, d(u,w)\leq d(u,v)+d(v,w)$, *(inégalité triangulaire).*

Un espace métrique est un couple constitué par E et par une distance d sur E, noté (E,d) ou bien E_{d}.

Définition 1.2 (Norme). *Une norme sur E est une application positive $N: E\to\mathbb{R}_{+}$, vérifiant les trois propriétés suivantes :* $\forall u,v\in E, \forall\lambda\in\Bbbk$;

1. $N(u)=0 \Longleftrightarrow u=0$, *(séparation),*
2. $N(\lambda u)=|\lambda|\, N(u)$, *(homogénéité),*
3. $N(u+v)\leq N(u)+N(v)$, *(inégalité triangulaire).*

La norme $N(\cdot)$ sera désignée par fois le symbole $\|\cdot\|$.

Exemple 1.1. *Pour tout $x\in\mathbb{R}^{n}$ on note :*

$$\begin{aligned}
\|x\|_{1} &= |x_{1}|+|x_{2}|+\cdots+|x_{n}|,\\
\|x\|_{2} &= \sqrt{x_{1}^{2}+x_{2}^{2}+\cdots+x_{n}^{2}},\\
\|x\|_{\infty} &= \max\left\{|x_{1}|,|x_{2}|,\cdots,|x_{n}|\right\}.
\end{aligned}$$

La norme $\|x\|_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice : Vérifier que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Propriété 1.1. *Soit N une norme sur E, alors $\forall u, v \in E$ on trouve*

$$|N(u) - N(v)| \leq N(u - v).$$

De plus, N est une application convexe.

Démonstration. Exercice. □

Définition 1.3 (Espace vectoriel normé)**.** *Un espace vectoriel normé (e.v.n.) réel [ou complexe] est un couple constitué par un espace vectoriel E réel [complexe] et par une norme $\|\cdot\|$ sur l'espace vectoriel E. Noté en général $(E, \|\cdot\|)$ ou $E_{\|\cdot\|}$.*

Exemple 1.2. *On donne quelques exemples sur les e.v.n.*

- **a)** *L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}$ muni de l'application "valeur absolue" : $x \to |x|$.*
- **b)** *L'espace vectoriel $E = \mathbb{C}$ muni de l'application "module" : $z \to |z|$.*
- **c)** *$\forall a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, l'espace des fonctions réelles continues $E = C([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme :*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|, \quad \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour } 1 \leq p < \infty,$$

est un espace vectoriel normé.

Proposition 1.1. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n., alors l'application*

$$\begin{array}{rccl} d: & E \times E & \to & \mathbb{R}_+, \\ & (u, v) & \to & \|u - v\|, \end{array}$$

est une distance (appelée la distance associée à la norme $\|\cdot\|$).

Démonstration. On peut vérifier facilement que d est une distance sur E qui associée à la norme $\|\cdot\|$. □

Le résultat suivant rassemble quelques propriétés de d.

Proposition 1.2. *Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace métrique où la distance d est définie par $d(u, v) = \|u - v\|$ pour tout $u, v \in E$ et on a :*

1. *$d(u + w, v + w) = d(u, v)$ pour tout $u, v, w \in E$, (c.à.d. d est invariante par translation).*
2. *$d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| \, d(u, v)$ pour tout $u, v \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{k}$.*

Démonstration. Evidente. □

1.1.2 Equivalence des normes

Définition 1.4. *Soit E un $\mathbb{k}-$espace vectoriel. Deux normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sur E sont dites équivalentes si et seulement si $\exists\alpha, \beta > 0$ telle que*

$$\forall x \in E,\ \alpha \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta \|x\|_a .$$

Remarque 1.1. *Soit E un $\mathbb{k}-$espace vectoriel.*

1. *Deux normes sur E sont équivalentes si et seulement si elle définissent des distances équivalentes, ou encore si et seulement si elle définissent la même topologie sur E.*
2. *Pour que deux normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ soient équivalentes sur E, il faut et il suffit que*

$$\exists\alpha, \beta > 0,\ \forall x \in E : \quad \alpha \leq \frac{\|x\|_a}{\|x\|_b} \leq \beta \text{ ou bien } \alpha \leq \frac{\|x\|_b}{\|x\|_a} \leq \beta.$$

Proposition 1.3. *Sur $\mathbb{R}^n$ les trois normes $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$ sont équivalentes si et seulement si $n < \infty$.*

Démonstration. Exercice. □

Remarque 1.2. *En général pour prouver que deux normes $\|x\|_1$ et $\|x\|_2$ sur un espace véctoriel E ne sont pas équivalentes, il suffit de trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ de sorte que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} = 0 \text{ ou bien } \lim_{n\to\infty} \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} = \infty.$$

Par exemple, la norme définie par $\|f\|_1 = \int_0^1 f(t)\,dt$ est une norme sur $C([0,1], \mathbb{R})$ qui n'est pas équivalente à la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$.

En effet, on considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1-(n+1)x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n+1}, \\ 0, & \text{si } \frac{1}{n+1} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

On a $\|f_n\|_\infty = 1$ tandis que $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$ de telle sorte que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

1.2 Sous-espaces normés et espace vectoriel produit

Proposition 1.4 (Sous-espaces normés)**.** *Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E, la restriction à F de la norme de E est une norme sur F, appelée norme induite.*

Démonstration. Evident car les propriétés sont vraies pour tous les éléments de E, donc pour ceux de F. La norme induite sur F sera notée comme la norme sur E. □

1.2.1 Exemples sur les sous-espaces normés

Définition 1.5. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n., $a \in E$ et $r > 0$, donc*

1. *La sphère de centre a et de rayon r est :*

$$S(a,r) = \{x \in E, \mid \ \|x-a\| = r\}$$

(remarque : $S(a,0) = a$, et la sphère unitaire $S(0,1)$).

2. *La boule ouverte de centre a et de rayon r est :*

$$B(a,r) = \{x \in E, \mid \ \|x-a\| < r\}$$

(remarque : $B(a,0) = \emptyset$).

3. *La boule fermée de centre a et de rayon r est :*

$$\bar{B}(a,r) = \{x \in E, \mid \ \|x-a\| \leq r\}$$

(remarque : $\bar{B}(a,0) = a$, et $S(a,r) \subset \bar{B}(a,r)$).

4. *La boule unitaire ouverte (resp. fermée) est $B(0,1)$, (resp. $\bar{B}(0,1)$).*

L'exemple simple de boule : Dans $\mathbb{R}$ on a

$$B(a,r) =]a-r, a+r[\text{ et } \bar{B}(a,r) = [a-r, a+r].$$

Définition 1.6. *Une partie D de E est bornée s'il existe un réel $M > 0$ tel que $\forall u \in D$, $\|u\| \leq M$.*

Exemple 1.3. *Les boules ouvertes ou fermées sont des parties bornées de E.*

Tout segment $[a,b]$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ pour la norme habituelle.

1.2.2 Espace vectoriel produit

Définition 1.7 (Espace vectoriel produit)**.** *Soient $\left(E_1, \|\cdot\|_{E_1}\right), \left(E_2, \|\cdot\|_{E_2}\right)$ deux espaces vectoriels normés. L'ensemble produit $E = E_1 \times E_2$ est un espace vectoriel normé muni de la norme :*

$$\|x\|_E = \|x_1\|_{E_1} + \|x_2\|_{E_2}, \ \forall x = (x_1, x_2) \in E.$$

$(E, \|\cdot\|_E)$ est dit espace normé produit des espaces donnés.

On peut généraliser cette notion de la manière suivante :

Définition 1.8 (Produit fini d'espaces normés)**.** *Soient $\left(E_1, \|\cdot\|_{E_1}\right), \left(E_2, \|\cdot\|_{E_2}\right), \ldots, \left(E_n, \|\cdot\|_{E_n}\right)$ des espaces vectoriels normés. L'ensemble produit $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est un e.v.n muni de la norme :*

$$\|x\|_E = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_{E_i}, \ \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E.$$

1.3 Espaces de Banach

1.3.1 Quelques notions sur les suites

Définition 1.9 (Suite convergente)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de E converge vers une limite unique $u \in E$ (pour la norme $\|\cdot\|$) si et seulement si :*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \textit{tel que}\ \forall n \geq n_0,\ \ \|u_n - u\| < \varepsilon,$$

et l'on note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$.

Théorème 1.1. *Toute suite convergente est bornée.*

Proposition 1.5. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de E qui convergent respectivement vers u et u' pour la norme $\|\cdot\|$, alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la suite $\lambda u_n + \mu u'_n$ converge vers $\lambda u + \mu u'$.*

Démonstration. Exercice. □

Théorème 1.2. *Soit E un espace vectoriel et $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ deux normes sur E. Alors si $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sont équivalentes, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E et pour tout $u \in E$,*

$$u_n \overset{cv}{\to} u \textit{ pour la norme } \|\cdot\|_a \Leftrightarrow u_n \overset{cv}{\to} u \textit{ pour la norme } \|\cdot\|_b\,.$$

Démonstration. Exercice. □

Définition 1.10 (Suite de Cauchy)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de E est une suite de Cauchy (pour la norme $\|\cdot\|$) si et seulement si :*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \textit{tel que}\ \forall n, m \geq n_0,\ \ \|u_n - u_m\| < \varepsilon.$$

Lemme 1.1. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy, (La réciproque est fausse).*

Démonstration. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente (pour la norme $\|\cdot\|$) vers une limite unique $u \in E$. Alors on a

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \text{tel que}\ \forall n \geq n_0,\ \ \|u_n - u\| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2},$$

de plus $\forall m \geq n_0$, nous avons

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\| &= \|u_n - u + u - u_m\| \leq \|u_n - u\| + \|u_m - u\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc, tout suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors est de Cauchy. Pour l'inverse on peut utilisé l'exemple

$$(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{Q}, \|\cdot\|_\infty) \text{ et } u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

pour la contradiction. □

1.3.2 Espace vectoriel complet

Définition 1.11 (e.v.n. complet, espace de Banach). *On dite qu'un $\mathbb{k}-$espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est complet si toute suite de Cauchy d'éléments de E est convergente dans $(E, \|\cdot\|)$. De même tout e.v.n. complet par rapport $\|\cdot\|$ est dite un espace de Banach.*

L'avantage des espaces complets est que dans de tels espaces, il n'est pas utile de connaitre la limite d'une suite pour montrer qu'elle est convergente, il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy.

Exemple 1.4. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ *et* $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ *sont des espaces de Banach.*

Exemple 1.5. $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ *n'est pas un espace de Banach, (voir l'exercise 1.4).*

Proposition 1.6. *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$*

1. *Si F un espace de Banach pour la norme induite, alors F fermé dans E.*
2. *Si E un espace de Banach et F fermé dans E, alors F un espace de Banach pour la norme induite.*

Proposition 1.7. *Soient $\left(E_1, \|\cdot\|_{E_1}\right)$, $\left(E_2, \|\cdot\|_{E_2}\right)$, $\ldots$, $\left(E_n, \|\cdot\|_{E_n}\right)$ sont des espaces vectoriels normés avec $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ l'espace vectoriel normé produit. On dite que E est un espace de Banach si et seulement si pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, E_i est un espace de Banach.*

Définition 1.12 (Suites extraites). *On appelle suite extraite ou sous suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $(E, \|\cdot\|)$, toute suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*

Proposition 1.8. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $(E, \|\cdot\|)$ qui converge vers $u \in E$, toute sous suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u. Mais, la réciproque est fausse.*

1.4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Les théorèmes fondamentaux pour un $\mathbb{k}-$espace vectoriel E de dimension finie

Lemme 1.2. *De toute suite de réels on peut extraire une suite monotone.*

Théorème 1.3 (Bolzano-Weierstrass). *De toute suite bornée, on peut extraire une suite convergente.*

Théorème 1.4. *Toutes les normes sont équivalentes sur E.*

Lemme 1.3. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Lemme 1.4. *Soit $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy. On suppose*

$$\lim_{n\to\infty} u_{\varphi(n)} = u.$$

Alors u_n converge vers u.

Théorème 1.5. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de l'espace vectoriel normé E converge ssi elle est de Cauchy.*

Démonstration. Toute suite convergente est une suite de Cauchy (lemme 1.1). **Réciproquement** : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, elle est bornée (lemme 1.3), on peut donc en extraire une suite convergente (Bolzano-Weierstrass). Elle converge donc en vertu du lemme précédent 1.4. □

Théorème 1.6. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est complet.*

Démonstration. Même preuve de théorème précédent. □

Corollaire 1.1. *Soit E un espace vectoriel normé quelconque et F un sous-espace de E de dimension finie, alors F est fermé.*

Démonstration. F est complet pour la norme induite (d'après le théorème) donc il est fermé. □

1.5 Exercices

1.5.1 Sur les normes et l'équivalence des normes

Exercice 1.1. *Soit $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continûement dérivables de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on pose*

$$\|f\|_1 = \sup_{x\in[0,1]} \left(|f(x)| + |f'(x)|\right).$$

1. *Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E.*
2. *Est-elle équivalente à la norme $\|f\|_2 = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$?*

Exercice 1.2. *Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on pose*

$$N(f) = \int_0^1 t\,|f(t)|\,dt, \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

1. *Montrer que N est une norme sur E, et que $N(f) \le \frac{1}{2}\|f\|_\infty, \forall f \in E$.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & si\ 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 0, & si\ \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

   (a) *Calculer $N(f_n)$ et $\|f_n\|_\infty$.*

   (b) *En déduire que les deux normes ne sont pas équivalentes.*

1.5.2 Sur les espaces de Banach et de dimension finie

Exercice 1.3. *Soit* $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ *l'espace des fonctions de classe* C^1 *sur* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$. *On définit :*

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \quad \|f\|_1 = \|f'\|_\infty + |f(0)|;$$

où $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ *est la norme infinie dans l'espace des fonctions continues* $F = C([0,1], \mathbb{R})$.

1. *Montrer que* $\|\cdot\|$ *et* $\|\cdot\|_1$ *sont des normes sur* E.
2. *Montrer que* $\|\cdot\|$ *est équivalente à* $\|\cdot\|_1$.
3. *Sachant que* $(F, \|\cdot\|_\infty)$ *est un espace de Banach, montrer que* E *(pour les deux normes) est aussi est un espace de Banach.*

Exercice 1.4. *Soit* $E = C([-1,1], \mathbb{R})$ *muni de la norme fondamentale :*

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(t)|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui définie par :*

$$u_n(x) = \begin{cases} 0, & si \ -1 \leq x < \frac{-1}{n}, \\ nx+1, & si \ \frac{-1}{n} \leq x \leq 0, \\ 1, & si \ 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

1. *Vérifier que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$.
2. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy dans* E.
3. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas convergente dans* E.
4. *Que peut-on déduire ?*

Exercice 1.5. *Soit* F *un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé* E.

1. *Démontrer que pour tout* $a \in E$, *il existe* $x \in F$ *tel que*

$$d(a, F) = \|x - a\|.$$

2. *On suppose* $\bar{B}(0,1) = F \neq E$. *Soit* $x \in F$ *et* $a \in E \backslash F$. *On pose*

$$b = \frac{a - x}{d(a, F)}.$$

Démontrer que $b \in S(0,1)$ *et* $d(b, F) = 0$.

APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES

2.1 Formes linéaires

Définition 2.1 (Application linéaire)**.** *Soient E et F deux $\mathbb{k}-$espaces vectoriels et f une application d'une partie A de E dans F, est dite **linéaire** si et seulement si*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{k},\ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Exemple 2.1. *Les applications suivantes sont des applications linéaires :*

1. *L'application somme*

$$\begin{array}{lcl} F : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}, \\ x = (x_1, \ldots, x_n) & \to & \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

2. *L'intégration*

$$\begin{array}{rlcl} T : & C([0,1], \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \to & T(f) = \int_0^1 f(t)\, dt. \end{array}$$

3. *La dérivation*

$$\begin{array}{rlcl} D : & C^1([0,1], \mathbb{R}) & \to & C([0,1], \mathbb{R}) \\ & f & \to & D(f) = f'. \end{array}$$

On note par $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires définies de E dans F, cet ensemble construit un structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ quand on le muni par les deux lois de composition usuelles suivants :

$$\begin{array}{rcl} L(E,F) \times L(E,F) & = & L(E,F) \\ (f,g) & = & f+g, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{k} \times L(E,F) & = & L(E,F) \\ (\lambda, g) & = & \lambda f. \end{array}$$

Définition 2.2 (Forme linéaire)**.** *On appelle forme linéaire sur un $\mathbb{k}-$espace vectoriel E, toute application linéaire définie de E dans $\mathbb{k}$, (c.à.d. $f \in L(E, \mathbb{k})$).*

Définition 2.3 (Dual algébrique)**.** *On désigne l'ensemble des formes linéaires définies sur E par :*

$$E^* = L(E, \mathbb{k})$$

et on l'appelle dual algébrique de E.

- ⊛ D'après l'Exemple 2.1, on peut remarquer que $F \in (\mathbb{R}^n)^*$, $T \in (C([0,1], \mathbb{R}))^*$ et D n'est pas une forme linéaire.
- ⊛ Facilement de voir que E^* possède une structure d'un $\mathbb{k}-$espace vectoriel.

Définition 2.4 (Forme semi-linéaire)**.** *Si E est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel, alors on appelle forme semi-linéaire sur E toute application $f : E \to \mathbb{C}$ satisfait à :*

$$f(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha} f(x) + \bar{\beta} f(y), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \ \forall x, y \in E,$$

où $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ désignent les conjugués de α et β respectivement.

2.2 Applications continues

Définition 2.5 (Applications lipschitziennes)**.** *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{k}-$espaces vectoriels normés et f une application d'une partie A de E dans F.*

- ⊛ *Soit $k \geq 0$, f est dite $k-$lipschitzienne sur A si :*

$$\forall x, y \in A, \ \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E,$$

par exemple l'application N est $1-$lipschitzienne de (E, N) dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

- ⊛ *f est dite **lipschitzienne** sur A s'il existe $k \geq 0$ telle que f soit $k-$lipschitzienne sur A.*
- ⊛ *f est dite contractante sur A s'il existe $k \in [0, 1[$ telle que f soit $k-$lipschitzienne sur A.*

Exemple 2.2. *Toute combinaison linéaire d'applications lipschitziennes de E dans F est lipschitzienne :*

En effet : Si f est $k-$lipschitzienne et g est $k'-$lipschitzienne de E dans F, on pose $(\alpha f + \beta g)(x)$ une combinaison linéaire pour $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$. alors $\forall x, y \in E$,

$$\begin{aligned} \|(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(y)\|_F &\leq |\alpha| \|f(x) - f(y)\|_F + |\beta| \|g(x) - g(y)\|_F \\ &\leq (k|\alpha| + k'|\beta|) \|x - y\|_E \\ &\leq M \|x - y\|_E. \end{aligned}$$

Définition 2.6. *Une application f d'une partie $A \neq \emptyset$ de E dans F est continue en $a \in A$ si elle admet en a une limite. Alors*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Définition 2.7. *Une application f d'une partie $A \neq \emptyset$ de E dans F est* ***continue*** *sur A si elle est continue en tout point de A, c.à.d. elle est lipschitzienne.*

Exemple 2.3. *L'application N de E dans $\mathbb{R}$ définie par $N(u) = \|u\|_E$ est continue sur E.*

En effet : $\forall u, v \in E$, nous avons

$$|N(u) - N(v)| \leq |\|u\|_E - \|v\|_E| \leq \|u - v\|_E, \ k = 1 > 0.$$

Donc N est $1-$lipschitzienne, de plus elle est continue.

Exemple 2.4. *Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\forall x \in E$, la forme suivante*

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & x & \rightarrow & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i, \end{array}$$

est linéaire et continue si et seulement si $n < \infty$.

En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{n} \|x - y\|_2, \end{aligned}$$

donc, il suffit de prendre $C = \sqrt{n} < \infty$.

Proposition 2.1. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(E, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{k}-$espaces vectoriels normés. Une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est continue si et seulement si il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\forall x \in E, \ \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E.$$

Démonstration. On a f est linéaire c.à.d. $f(y - z) = f(y) - f(z)$, $\forall y, z \in E$, de plus et continue ssi $\exists M > 0$, tel que

$$\forall y, z \in E, \ \|f(y) - f(z)\|_F \leq M \|y - z\|_E.$$

Puisque E est un e.v.n., alors $\exists x = y - z \in E$, tel que

$$\|f(x)\|_F = \|f(y - z)\|_F = \|f(y) - f(z)\|_F \leq M \|y - z\|_E = M \|x\|_E.$$

□

Exemple 2.5. *Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme infiné $\|\cdot\|_\infty$. La forme T dans 2.1, est continue.*

Théorème 2.1. *Soit E un $\mathbb{k}-$espace vectoriel de dimension finie. Si une fonction est continue en $a \in E$ pour une norme, alors elle est continue en a pour toute norme équivalente.*

Théorème 2.2. *L'ensemble des fonctions définies et continues en tout $x \in E$ est un espace vectoriel.*

2.2.1 Dual topologique d'un e.v.n.

Définition 2.8. *Soient* $(E, \|\cdot\|_E)$ *et* $(E, \|\cdot\|_F)$ *deux* $\mathbb{k}-$*espaces vectoriels normés et* f *une application linéaire continue de* E *dans* F*. On pose*

$$|||f||| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|f\|_F}{\|x\|_E}. \tag{2.1}$$

Exercice : Démontrer que $|||f|||$ est une norme.

Remarque 2.1. *On dit parfois* ***bornée*** *à la place de continue, et on note par* $\mathcal{L}(E, F)$ *l'ensemble (l'espace) des applications linéaires continues de* E *dans* F*.*

Proposition 2.2. *Soient* $(E, \|\cdot\|_E)$ *et* $(E, \|\cdot\|_F)$ *deux* $\mathbb{k}-$*e.v.n. Alors l'espace* $\mathcal{L}(E, F)$ *est stable par composition et la norme subordonnée* $|||\cdot||| = \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ *. C'est un Banach ssi l'espace d'arrivée est un Banach.*

Définition 2.9 (Dual topologique)**.** *Soit* $(E, \|\cdot\|_E)$ *un* $\mathbb{k}-$*espace vectoriel normé. Le* ***dual*** *topologique de l'espace* E *est l'espace* $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{k})$ *des formes linéaires continues de* E *dans* $\mathbb{k}$*, muni par la norme (2.1).*

Remarque 2.2. *Le dual topologique d'un e.v.n est un espace de Banach.*

2.3 Exercices

Exercice 2.1. *Déterminer si les applications* T_i *suivantes sont linéaires :*

1. $T_1(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, *pour* $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
2. $T_2(f) = \int_0^1 f(t)\, dt$, $T_3(f) = \int_0^1 |f(t)|\, dt$, *pour* $f \in C([0,1], \mathbb{R})$.
3. $T_4(f) = 3\int_{\mathbb{R}} h(t) f(t)\, dt - 5f'(x)$, *pour* $f, h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 2.2. *Soit* $E = F = C([0,1], \mathbb{R})$, *tel que* E *muni par la norme* $\|\cdot\|_2$, *et* F *muni par* $\|\cdot\|_1$, *où*

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt,$$

et $T : (E, \|\cdot\|_2) \to (F, \|\cdot\|_1)$ *tel que* $T(f) = fg$ *où* $g \in E$ *fixé.*

⊛ *Montrer que* $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Exercice 2.3. *Soit* $E = C([-1,1], \mathbb{R})$ *muni d'une norme* $\|\cdot\|_\infty$. *Etudier la continuité de la forme linéaire* $\varphi : E \to \mathbb{R}$ *et calculer sa norme dans les cas suivants :*

1. $\varphi(u) = \int_{-1}^1 u(t)\, dt$,
2. $\varphi(u) = \frac{4}{3}u(-1) + \frac{5}{3}u(1)$,
3. $\varphi(u) = \frac{\pi-1}{2}(u(-1) + u(1)) + \int_{-1}^1 tu(t)\, dt$.

Exercice 2.4. *On considère l'espace ℓ_0 des suites de nombres réels ayant un nombre fini de termes différents de zéro normé par*

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \,,$$

où $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_0$. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \ell_0 & \to & \mathbb{k}, \\ & x & \to & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}. \end{array}$$

⊛ *Montrer que ϕ est une forme linéaire continue non nulle et calculer sa norme.*

CHAPITRE 3

ESPACES DE HILBERT

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques notions de base, définitions et propriétés sur les espaces de Hilbert, l'orthogonalité, la famille orthogonale et les systèmes orthonormés. Aussi, nous allons donner les théorèmes de base sur la projection orthogonale dans un espace préhilbertien, le dual d'un espace de Hilbert et la représentation de Riesz. Dans le dernier de ce chapitre, nous présentons l'inégalité de Bessel, l'égalité de Parseval et la base hilbertienne.

3.1 Produit scalaire

Définition 3.1 (Bilinéaire, sesquilinéaire). *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$.*

1. *Une application $f : E \times E \to \mathbb{R}$ est dite **forme bilinéaire** ssi : $\forall u, v, w \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;*

$$f(\alpha u + \beta v, w) = \alpha f(u, w) + \beta f(v, w), \text{ et } f(u, \alpha v + \beta w) = \alpha f(u, v) + \beta f(u, w).$$

2. *Une application $f : E \times E \to \mathbb{R}$ est dite **forme sesquilinéaire** ssi f est linéaire par rapport la première variable et **antilinéaire** par rapport la deuxième variable, c'est-à-dire : $\forall u, v, w \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$;*

$$f(\alpha u + \beta v, w) = \alpha f(u, w) + \beta f(v, w), \text{ et } f(u, \alpha v + \beta w) = \alpha \overline{f(u, v)} + \beta \overline{f(u, w)}.$$

Définition 3.2 (Produit scalaire). *Soit E un espace vectoriel.*

1. *Un produit scalaire $\langle u, v \rangle$ est une forme **bilinéaire** de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, **symétrique**, **définie** et **positive**, c'est-à-dire :*

$$\forall u, v \in E,\ \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle;\ \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0_E;\ \langle u, u \rangle > 0, \text{ pour } u \neq 0_E.$$

2. *Un produit scalaire $\langle u, v \rangle$ est une forme **sesquilinéaire** de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$, **hermitienne**, **définie** et **positive**, c'est-à-dire :*

$$\forall u, v \in E,\ \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle};\ \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0_E;\ \langle u, u \rangle > 0, \text{ pour } u \neq 0_E.$$

Exemple 3.1. *Les applications suivantes sont des produits scalaires :*

1. $u_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *donné par*
$$u_1(x, y) \to \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$
2. $u_2 : E \times E \to \mathbb{R}$, *pour* $E = C([0,1], \mathbb{R})$, *donné par*
$$u_2(f, g) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt,$$

Définition 3.3 (Espace préhilbertien)**.** *Est le couple constitué par un* $\mathbb{k}-$*espace vectoriel* E *et un produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *défini sur* E, *noté par* $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Exemple 3.2. *D'après les exemples en 3.1, on déduit que* $(\mathbb{R}^n, u_1)$ *et* (E, u_2) *sont des espaces préhilbertiens.*

Lemme 3.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soit* $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un* $\mathbb{k}-$*espace préhilbertien, alors on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \sqrt{\langle u, u\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle}, \ \forall u, v \in E. \tag{3.1}$$

Démonstration. Soient $u, v \in E$,

1. Si $u = 0$, ou $v = 0$; l'inégalité (3.1) est immédiate.
2. Si $u \neq 0$ et $v \neq 0$; on pose
$$w = u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v,$$
on peut voir que $\langle w, w\rangle \geq 0$. D'autre part, on a :
$$\begin{aligned}\langle w, w\rangle &= \left\langle u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v, u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v \right\rangle \\ &= \langle u, u\rangle - 2\frac{\langle u, v\rangle^2}{\langle v, v\rangle} + \frac{\langle u, v\rangle^2}{\langle v, v\rangle} \\ &= \langle u, u\rangle - \frac{\langle u, v\rangle^2}{\langle v, v\rangle} \geq 0.\end{aligned}$$
Donc, on a l'inégalité (3.1). □

Lemme 3.2 (Inégalité de Minkowski)**.** *Soit* $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espace préhilbertien, alors pour tout* $u, v \in E$,

$$\sqrt{\langle u + v, u + v\rangle} \leq \sqrt{\langle u, u\rangle} + \sqrt{\langle v, v\rangle}. \tag{3.2}$$

Démonstration. Soients $u, v \in E$, on a

$$\langle u + v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle + 2\langle u, v\rangle,$$

en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$\begin{aligned}\langle u + v, u + v\rangle &\leq \langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle + 2\sqrt{\langle u, u\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle} \\ &\leq \left(\sqrt{\langle u, u\rangle} + \sqrt{\langle v, v\rangle}\right)^2,\end{aligned}$$

d'où l'inégalité (3.2). □

3.2 Espace préhilbertien complet

Théorème 3.1. *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\Bbbk-$espace préhilbertien. On muni E par l'application*

$$\forall u \in E,\ \ \|u\|_E = \sqrt{\langle u, u\rangle},$$

alors $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace vectoriel normé sur $\Bbbk$.

Démonstration. Si E est un espace préhilbertien, donc il est un espace vectoriel. Il suffit de montre que $\|u\|_E = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ définie une norme sur E. En effet;

- ⊛ Si $u = 0 \Rightarrow \langle 0, 0\rangle = 0$, alors $\sqrt{\langle u, u\rangle} = \|u\|_E = 0$. Si $\|u\|_E = 0$, alors on a $\langle u, u\rangle = 0$, d'où $u = 0$.
- ⊛ Pour tout $u \in E$ et $\lambda \in \Bbbk$, on a

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|_E &= \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle u, u\rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle u, u\rangle} \\ &= |\lambda| \|u\|_E . \end{aligned}$$

- ⊛ En utilisant (3.2) on obtient $\forall u, v \in E$

$$\|u + v\|_E = \sqrt{\langle u + v, u + v\rangle} \leq \sqrt{\langle u, u\rangle} + \sqrt{\langle v, v\rangle} = \|u\|_E + \|v\|_E .$$

Donc l'application $\|u\|_E = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ définie une norme sur E. □

Proposition 3.1 (Identité du parallélogramme)**.** *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien, muni de la norme $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$. Alors pour tout $u, v \in E$, on a :*

$$\frac{1}{2}\left(\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2\right) = \|u\|^2 + \|v\|^2 .$$

Démonstration. Par un calcul simple on obtient

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle , \tag{3.3}$$

$$\|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle , \tag{3.4}$$

En additionnant (3.3) et (3.4), on obtient l'inégalité. □

Théorème 3.2. *Soit E un $\Bbbk-$espace vectoriel normé par $\|\cdot\|$, on a l'équivalence suivant :*

E est un espace préhilbertien $\Leftrightarrow$ La norme $\|\cdot\|$ vérifie l'identité de parallélogramme.

Définition 3.4 (Espace de Hilbert)**.** *Un espace de* ***Hilbert*** *est un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle u, v\rangle$ et qui est complet pour la norme $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$.*

Remarque 3.1. *Il découle de cette définition que tout espace de Hilbert est un espace de Banach particulier.*

Exemple 3.3. *On a les exemples suivants*

1. $\mathbb{R}$ *est un espace de Hilbert avec* $\langle x, y\rangle = xy$ *et* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x^2} = |x|$.
2. $\mathbb{R}^n$ *est un espace de Hilbert avec*
$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ et } \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$
3. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *n'est pas un espace de Hilbert ; en effet, si on prend*
$$x_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ x_2 = (0, -1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n,$$
alors on vera que
$$\frac{1}{2}\left(\|x_1 + x_2\|_\infty^2 + \|x_1 - x_2\|_\infty^2\right) = 1 \neq 2 = \|x_1\|_\infty^2 + \|x_2\|_\infty^2.$$

3.3 Orthogonalité, famille orthogonale et systèmes orthonormés

Définition 3.5 (Orthogonalité)**.** *Soit E un espace préhilbertien, soit $x, y \in E$, on dit que x et y sont **orthogonaux** (noté $x \perp y$) si et seulement si $\langle x, y\rangle = 0$.*

Exemple 3.4. *Soit*

1. $E = \mathbb{R}^n$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, *on note*
$$e_k = \Big(0, \ldots, 0, \underset{\textit{order } k}{1}, 0, \ldots, 0\Big).$$
Pour tout $k, m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *avec* $k \neq m$, *on a* $\langle e_k, e_m\rangle = 0$, *c.à.d.* $e_k \perp e_m$.
2. $E = C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$, $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt$. *Considérons la famille des fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tel que*
$$f_n(x) = \cos nx.$$
Maintenant, soit $m \in \mathbb{N}$. *Donc, pour tout* $n \neq m$, *on a :*
$$\langle f_n, f_m\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\cos(mt)\, dt,$$
en utilisant la formule :
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right],$$
on obtient alors
$$\begin{aligned} \langle f_n, f_m\rangle &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(n+m)t + \cos(n-m)t\right] dt \\ &= \frac{1}{2(n+m)} \sin(n+m)t \Big/_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(n-m)} \sin(n-m)t \Big/_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0, \end{aligned}$$
ce qui montre que $f_n \perp f_m$, $\forall n \neq m$.

Propriété 3.1. *Soit E un espace préhilbertien, pour tout $u, v \in E$, et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

$$u \perp 0, \text{ de plus on a : } u \perp v \Leftrightarrow \alpha u \perp \beta v.$$

Définition 3.6 (Système orthogonal). *Soit $I \subset \mathbb{N}$. On dit que $(u_i)_{i \in I}$ est une* ***famille orthogonale*** *ou* ***système orthogonal*** *si les u_i sont deux à deux orthogonaux. Autrement dit*

$$\forall i, j \in I, \ i \neq j, \text{ on ait : } \langle u_i, u_j \rangle = 0.$$

Définition 3.7 (Systèmes orthonormés)**.** *On dit que $(u_i)_{i \in I}$ est une* ***famille orthonormale*** *ou* ***système orthonormé*** *si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille orthogonale et si de plus $\forall i \in I$, on a $\langle u_i, u_i \rangle = 1$. Autrement dit*

$$\forall i, j \in I \subset \mathbb{N}, \ \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1, & si \quad i = j, \\ 0, & si \quad i \neq j. \end{cases}$$

Remarque 3.2. *Soit $I \subset \mathbb{N}$. Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille orthogonale, alors la famille $\left\{ \frac{u_i}{\|u_i\|} \right\}$ est orthonormale.*

Exemple 3.5. *La famille $\{e_k, \ 1 \leq k \leq n \in \mathbb{N}\}$ est une famille orthonormale et la famille $\{f_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ est une famille orthogonale (voir l'exemple 3.4), de plus on a*

$$\|f_n\|^2 = \langle f_n, f_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt) \, dt = \pi,$$

alors la famille $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} f_n, \ n \in \mathbb{N} \right\}$ est orthonormale.

Propriété 3.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Toute famille orthogonale $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille linéairement indépendantes.*

Théorème 3.3 (Pythagore)**.** *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, muni de la norme $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille orthogonale, alors on a :*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 .$$

Démonstration. Par un calcul direct, on obtient :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} x_i \right\rangle \\ &= \langle x_1, x_1 \rangle + \langle x_1, x_2 \rangle + \cdots + \langle x_1, x_n \rangle \\ &\quad + \langle x_2, x_1 \rangle + \langle x_2, x_2 \rangle + \cdots + \langle x_2, x_n \rangle \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \langle x_n, x_1 \rangle + \langle x_n, x_2 \rangle + \cdots + \langle x_n, x_n \rangle \\ &= \langle x_1, x_1 \rangle + \langle x_2, x_2 \rangle + \cdots + \langle x_n, x_n \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 . \end{aligned}$$

Ce qui donne l'identité de Pythagore. □

3.3.1 Orthogonal d'une partie et propriétés

Définition 3.8. *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien, si A une partie non vide de E, on appelle orthogonal de A et l'on note $A^{\perp}$, l'ensemble de vecteurs orthogonaux à tout les vecteurs de A, c.à.d.*

$$A^{\perp} = \{x \in E : \langle x, a\rangle = 0,\ \forall a \in A\}.$$

Comme un exemple de base, on a

$$\{0_E\}^{\perp} = E \text{ et } E^{\perp} = \{0_E\}.$$

Proposition 3.2. *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien, A une partie non vide de E, alors*

1. $A^{\perp}$ est un sous espace vectoriel fermé de E, c.à.d. $\overline{A^{\perp}} = A^{\perp}$.
2. $A \cap A^{\perp} = \{0_E\}$.
3. $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

3.4 Projection orthogonale dans un espace préhilbertien

3.4.1 Définitions et théorèmes de base

Définition 3.9 (Projection)**.** *Soit (E, d) un espace métrique et soit F une partie fermée de E, soit x un point de E. On appelle projection du point x sur F tout point y de F vérifie :*

$$d(x, y) = d(x, F) = \inf_{z \in F} d(x, z).$$

On note par $y = P_F(x)$ la projection du x sur F s'il existe.

Remarque 3.3. *Si E un ecpace vectoriel normé, on peut définie la projection du x sur F par*

$$d(x, P_F(x)) = \|x - P_F(x)\| = \inf \|x - z\|,\ \forall z \in F.$$

Evidement de voir que si $x \in F$, alors $P_F(x) = x$.

Remarque 3.4. *L'existence de $P_F(x)$ n'est pas assurée et s'il existe il peut ne pas être unique, par exemple :*

$$E = \mathbb{R} \text{ avec } d(x, y) = |x - y|,\ F = [0, 1[\text{ et } x = 2,$$

dans cet exemple on remarque que la projection de 2 sur F n'existe pas. Maintenant on prend $E = \mathbb{R}^2$ avec

$$d(x, y) = \|x - y\|_2$$

et F est la sphère de la boule de centre x fixé dans E, dans ce cas, la projection de x sur F n'est pas unique.

Théorème 3.4 (Projection sur un convexe fermé). *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, muni de la norme $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$, et $F \subset E$ un convexe fermé non vide. Alors on a :*

1. *Pour tout $x \in E$, il existe une projection unique de x sur F; c.à.d.*

$$\|x - P_F(x)\| = \inf \|x - z\|, \ \forall z \in F.$$

2. *La projection $P_F(x)$ est caractérisée par*

$$\langle x - P_F(x), y - P_F(x) \rangle \leq 0, \ \forall y \in F.$$

Théorème 3.5 (Projection sur un sous espace de Hilbert). *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, muni de la norme $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$, et $F \subset H$ un sous espace vectoriel fermé et x un élément de H. Alors il existe un unique élément $P_F(x) \in F$ tel que*

$$\|x - P_F(x)\| = d(x, F).$$

De plus, $P_F(x)$ est l'unique élément de F tel que $x - P_F(x)$ soit orthogonal à F; c.à.d.

$$z = P_F(x) \Leftrightarrow \langle x - z, y \rangle = 0, \ \forall y \in F,$$

c.à.d. $x - P_F(x) \in F^{\perp}$.

Démonstration. La première égalitée est evidente. D'après le théorème de la projection, on a

$$\langle x - P_F(x), y - P_F(x) \rangle \leq 0, \ \forall y \in F.$$

Parce que $F \subset H$ est un sous espace vectoriel fermé, donc on peut choisir $y = 0_E$ et

$$\langle x - P_F(x), -P_F(x) \rangle \leq 0. \tag{3.5}$$

De plus, pour $y = 2P_F(x)$ on obtient

$$\langle x - P_F(x), P_F(x) \rangle \leq 0. \tag{3.6}$$

De (3.5) on obtient pour $z = P_F(x)$, que

$$\langle x - z, y \rangle \leq 0, \ \forall y \in F,$$

et de (3.6) on obtient

$$\langle x - z, y \rangle \geq 0, \ \forall y \in F,$$

Donc $\langle x - z, y \rangle = 0, \forall y \in F$, c.à.d. $x - P_F(x) \in F^{\perp}$. □

Exemple 3.6. *Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire définie par*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) \, dt, \ \forall f, g \in E.$$

On pose $F = Vect\{x, 1\}$, on considère la fonction $f \in E$ définie par $f(x) = e^x$. Comme E est un espace préhilbertien et F est un sous-espace fermé (car il est de dimension finie). Alors la projection orthogonale de f sur F existe et unique.

Donc on le calcule :

1. On sait que $P_F(f) \in F = Vect\{x, 1\}$, donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que
$$P_F(f) = \alpha x + \beta.$$

2. En vertu la caractérisation de la projection orthogonale on a :
$$\langle f - P_F(f), g \rangle = 0, \ \forall g \in F = Vect\{x, 1\}.$$
Donc
$$\begin{cases} \langle f - P_F(f), x \rangle = 0, \\ \langle f - P_F(f), 1 \rangle = 0. \end{cases}$$
D'où
$$\begin{cases} \int_0^1 \left(e^t - \alpha t - \beta\right) dt = 0, \\ \int_0^1 \left(e^t - \alpha t - \beta\right) t dt = 0. \end{cases}$$
Par un calcul simple on obtient
$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 2e - 1, \\ 2\alpha + 3\beta = 1. \end{cases}$$
On obtient alors : $\alpha = 4e - 3$ et $\beta = -2e + 2$, et par suite :
$$P_F(f) = (4e - 3)x - 2e + 2.$$

3.4.2 Propriétés et conséquences

Dans ce paragraphe on voit quelques corrolaires et propositions du théorème de projection et propriétés importants de l'application projection.

Corollaire 3.1. *Soient H un espace de Hilbert et F un sous espace fermé de H. Alors les sous espaces F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans H; c.à.d. que*
$$H = F \oplus F^\perp.$$

Démonstration. D'après la proposition 3.2, $F \cap F^\perp$ est un sous espace et $F \cap F^\perp = \{0\}$, de plus, pour tout $x \in H$, on a
$$x = x - P_F(x) + P_F(x),$$
avec $x - P_F(x) \in F^\perp$ et $P_F(x) \in F$. □

Corollaire 3.2. *Soit H un espace de Hilbert et soit F un sous espace vectoriel de H, on a :*
$$\left(F^\perp\right)^\perp = \bar{F}.$$
De plus, si F est fermé, alors $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

Démonstration. On démontre que

1. $\bar{F} \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$: Soit $x \in F$, alors $\forall y \in F^{\perp}$, on a $\langle x, y \rangle = 0$, d'où $x \in \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$, donc on déduit que
$$F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp},$$
d'après les propriétés de l'adhérence et comme $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ est un fermé dans H on a :
$$\bar{F} \subset \overline{\left(F^{\perp}\right)^{\perp}} = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}.$$

2. $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} \subset \bar{F}$: Soit $x \in \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$, alors $\exists y \in \bar{F}$ et $\exists z \in \bar{F}^{\perp} = F^{\perp}$, tels que $x = y + z$, d'où on a :
$$\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle + \langle z, z \rangle .$$
Or, on a $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle = 0$, d'où $\langle z, z \rangle = 0$, donc on a $z = 0$. Par conséquent on a $x = y \in \bar{F}$, donc on a $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} \subset \bar{F}$.

Pour la deuxième égalité est immédiate. □

Corollaire 3.3. *Soit H un espace de Hilbert et soit F un sous e.v. de H. F est dense dans H ssi $F^{\perp} = \{0\}$.*

Démonstration. Le réultat découle de la proposition 3.2. □

Corollaire 3.4. *L'application $P_F : H \to F$ est un opérateur vérifie, pour tout x et tout y dans H,*

1. $\|P_F(x)\| \leq \|x\|$,
2. $P_F(P_F(x)) = P_F(x)$,
3. $\langle P_F(x), y \rangle = \langle x, P_F(y) \rangle$.

Démonstration. On démontre que

1. Soit $x \in H$, on écrit $x = x - P_F(x) + P_F(x)$, en utilisant le théorème de Pythagore
$$\|x\|^2 = \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x)\|^2 \geq \|P_F(x)\|^2 .$$

2. Pour tout $y \in F$, $P_F(y) = y \in F$. Comme $\forall x \in H$, $P_F(x) \in F$; alors $P_F(P_F(x)) = P_F(x)$.

3. Pour tout x et y dans H
$$P_F(x) \perp (y - P_F(y))$$
il résulte que
$$\langle P_F(x), y \rangle = \langle P_F(x), P_F(y) \rangle \text{ et } \langle x, P_F(y) \rangle = \langle P_F(x), P_F(y) \rangle,$$
donc on a le résultat.

Les résultats pour H est un Hilbert. □

Proposition 3.3 (Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie)**.** *Soit E un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de dimension finie avec $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base orthonormale de F. Alors pour tout $x \in E$, on a :*

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Démonstration. On sait que $P_F(x) \in F = Vect\{e_1, \ldots, e_n\}$, alors il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

D'après le théorème 3.5, $P_F(x)$ et caractérisée par $x - P_F(x) \in F$, c.à.d.

$$\langle x - P_F(x), y \rangle = 0, \ \forall y \in F,$$

et par suite

$$\langle x - P_F(x), e_i \rangle = 0, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

d'où :

$$\left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, e_i \right\rangle = 0, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

ce qui donne n équations linéaire dont les inconnues sont $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \langle e_i, e_1 \rangle & = & \langle x, e_1 \rangle, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \langle e_i, e_2 \rangle & = & \langle x, e_2 \rangle, \\ & \vdots & \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \langle e_i, e_n \rangle & = & \langle x, e_n \rangle. \end{cases}$$

Donc, on obtient :

$$\alpha_1 = \langle x, e_1 \rangle, \ \alpha_2 = \langle x, e_2 \rangle, \ \ldots \ , \alpha_n = \langle x, e_n \rangle$$

et par conséquent :

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

La prouve est complète. □

3.5 Dual d'un espace de Hilbert

Définition 3.10. *Le dual topologique d'un espace de Hilbert H est l'espace des formes linéaires et continues sur H, on le note par $H' = \mathcal{L}(E, \mathbb{k})$. On le muni de la norme duale*

$$\|f\|_{H'} = \sup_{\|x\|_H \leq 1} |\langle f, x \rangle|.$$

Théorème 3.6. *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, muni de la norme $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$, et $F \subset E$ un sous-e.v. convexe fermé non vide. Alors l'application*

$$\begin{array}{rccl} P_F: & E & \to & F, \\ & x & \to & z = P_F(x), \end{array}$$

est une application linéaitre continue de E dans F; $(P_F \in \mathcal{L}(E, F))$, de plus on a :

$$\|P_F(x) - P_F(y)\| \leq \|x - y\|, \ \forall x, y \in E.$$

Démonstration. On dévise la démonstration à deux parties

1. P_F est une application linéaire, c.à.d $\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}$, on obtient

$$P_F(\alpha x + \beta y) = \alpha P_F(x) + \beta P_F(y).$$

En effet, $P_F(x)$ est la projection de x dans F, alors

$$\langle x - P_F(x), z \rangle = 0, \ \forall z \in E,$$

alors

$$\langle \alpha x - \alpha P_F(x), z \rangle = 0, \ \forall z \in E, \ \forall \alpha \in \mathbb{k}.$$

D'autre part, $P_F(y)$ est la projection de y dans F, alors

$$\langle y - P_F(y), z \rangle = 0, \ \forall z \in E,$$

alors

$$\langle \beta y - \beta P_F(y), z \rangle = 0, \ \forall z \in E, \ \forall \beta \in \mathbb{k}.$$

Par addition

$$\begin{array}{rcl} \langle \alpha x - \alpha P_F(x) + \beta y - \beta P_F(y), z \rangle & = & 0, \\ \Rightarrow \ \langle [\alpha x + \beta y] - [\alpha P_F(x) + \beta P_F(y)], z \rangle & = & 0, \ \forall z \in E, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}. \end{array}$$

D'après le théorème de la projection $\alpha P_F(x) + \beta P_F(y)$ est la projection de $\alpha x + \beta y$, alors

$$P_F(\alpha x + \beta y) = \alpha P_F(x) + \beta P_F(y) \in F, \text{ car } F \text{ est un sous e.v.}$$

2. P_F est un application Continue. Soient $x, y \in E$, si $P_F(x)$ est la projection de x dans F, alors

$$\langle x - P_F(x), z_1 - P_F(x) \rangle \leq 0, \ \forall z_1 \in E,$$

si $P_F(y)$ est la projection de y dans F, alors

$$\langle y - P_F(y), z_2 - P_F(y) \rangle \leq 0, \ \forall z_2 \in E,$$

donc on peut choisir $(z_1, z_2) = (P_F(y), P_F(x))$ et on obtient

$$\langle x - P_F(x), P_F(y) - P_F(x) \rangle \leq 0 \tag{3.7}$$

et

$$\langle y - P_F(y), P_F(x) - P_F(y) \rangle \leq 0. \tag{3.8}$$

En additionnant (3.7) et (3.8), on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned}
& \langle y - P_F(y), P_F(x) - P_F(y) \rangle - \langle x - P_F(x), P_F(x) - P_F(y) \rangle \leq 0 \\
\Rightarrow \quad & \langle y - P_F(y) - x + P_F(x), P_F(x) - P_F(y) \rangle \leq 0 \\
\Rightarrow \quad & \langle P_F(x) - P_F(y) - (x - y), P_F(x) - P_F(y) \rangle \leq 0 \\
\Rightarrow \quad & \langle P_F(x) - P_F(y), P_F(x) - P_F(y) \rangle \leq \langle x - y, P_F(x) - P_F(y) \rangle \\
\Rightarrow \quad & \|P_F(x) - P_F(y)\|^2 \leq \|x - y\| \, \|P_F(x) - P_F(y)\| \\
\Rightarrow \quad & \|P_F(x) - P_F(y)\| \leq \|x - y\|, \ \forall x, y \in E.
\end{aligned}$$

Finallement $P_F \in \mathcal{L}(E, F)$. □

3.5.1 Théorème de représentation de Riesz

Théorème 3.7 (Riesz). *Soit H un espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire, soit H' le dual topologique de H. Alors : Pour tout $f \in H'$, il existe un unique élément $y_f \in H$, tel que pour tout $x \in H$, on ait :*

$$f(x) = \langle x, y_f \rangle.$$

De plus

$$\|f\|_{H'} = \|y_f\|_H.$$

Démonstration. Soit $f \in H' = \mathcal{L}(H, \mathbb{k})$.

1. Si $f = 0 \in H'$, il suffit de prendre $y_f = 0$.
2. Supposons que $f \neq 0$, on pose $G = \ker\{f\} = \{x \in H, \ f(x) = 0\}$.

   Il claire que G un sous-espace fermé de H, avec $G \neq H$, (car si $G = H$ obtient le premier cas), alors $\exists x_0 \in H$ tel que $f(x_0) \neq 0$ et $x_0 \notin G$.

   Soit $z = P_G(x_0) \in G$, donc on a

   $$\bar{z} = \frac{z - x_0}{\|z - x_0\|_H} \notin G, \text{ car } f(\bar{z}) \neq 0, \text{ de plus } \|\bar{z}\|_H = 1.$$

   On peut écrit

   $$\forall x \in H, \ x = \frac{f(x)}{f(\bar{z})}\bar{z} + \bar{x}, \text{ où } \bar{x} = x - \frac{f(x)}{f(\bar{z})}\bar{z},$$

   de plus

   $$\begin{aligned}
   f(\bar{x}) &= f\left(x - \frac{f(x)}{f(\bar{z})}\bar{z}\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(\bar{z})} f(\bar{z}) = f(x) - f(x) \\
   &= 0.
   \end{aligned}$$

Alors $\bar{x} \in G$, d'après le théorème d'orthogonalté

$$\begin{aligned}
\langle z - x_0, \bar{x} \rangle &= 0, \text{ car } z = P_G(x_0), \\
&\Rightarrow \frac{1}{\|z - x_0\|_H} \langle z - x_0, \bar{x} \rangle = 0, \\
&\Rightarrow \langle \bar{z}, \bar{x} \rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \bar{z}, x - \frac{f(x)}{f(\bar{z})} \bar{z} \right\rangle = 0, \\
&\Rightarrow \langle \bar{z}, x \rangle = \left\langle \bar{z}, \frac{f(x)}{f(\bar{z})} \bar{z} \right\rangle = \frac{f(x)}{f(\bar{z})} \|\bar{z}\|_H^2, \\
&\Rightarrow \langle f(\bar{z}) \bar{z}, x \rangle = f(x).
\end{aligned}$$

Donc $\exists y_f = f(\bar{z}) \bar{z} \in H$, tel que

$$f(x) = \langle x, y_f \rangle, \ \forall x \in H.$$

D'autre part on a $\|f\|_{H'} = \sup_{\|x\|_H \leq 1} |\langle f, x \rangle|$, alors pour tout $x \in H$

$$|f(x)| = |\langle x, y_f \rangle| \leq \|x\|_H \|y_f\|_H \Rightarrow \|f\|_{H'} \leq \|y_f\|_H$$

et

$$\|f\|_{H'} \geq \frac{|f(y_f)|}{\|y_f\|_H} = \frac{\|y_f\|_H^2}{\|y_f\|_H} = \|y_f\|_H,$$

donc $\|f\|_{H'} = \|y_f\|_H$. □

3.6 Inégalité de Bessel, égalité de Parseval et base hilbertienne

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien de dimension infinien, muni par la norme associée.

Théorème 3.8 (Inégalité de Bessel). *Soit $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille orthonormale de E. Alors $\forall x \in E$ on a :*

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \tag{3.9}$$

Démonstration. Soit $F = Vect\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un sous-espace de dimension finie de E alors la projection orthogonale sur F est bien définie, comme la famille $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est orthonormale, d'après la proposition 3.3, la projection est s'écrit pour tout $x \in E$:

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|P_F(x)\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2.
\end{aligned}$$

On conclut grâce au corollaire 3.4 qui affirme que $\|P_F(x)\| \leq \|x\|$ et on obtient le résultat. □

Corollaire 3.5. *Soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille orthonormée de E. Alors pour tout $x \in E$, la série de terme général $|\langle x, e_n\rangle|^2$ est convergente, de plus*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2 . \tag{3.10}$$

Démonstration. La suite des sommes partielles est croissante (terme général positif), et majorée (d'parès l'inégalité (3.9)) et par suite la série est convergente. Pour la majoration (3.10) est immédiate en faisant la passage de la limite. □

Théorème 3.9 (Égalité de Parseval). *Soit $x \in E$. Soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de E. Alors pour tout $x \in \overline{Vect\,\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$ on a l'égalité, dite de Parseval :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|x\|^2 .$$

Définition 3.11 (Famille totale). *Soit $I \subset \mathbb{N}$. Une famille $\{e_n\}_{n\in I}$ de vecteurs de E est dite totale si le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans E, c.à.d.*

$$E = \overline{Vect\left\{\{e_n\}_{n\in I}\right\}}.$$

Définition 3.12 (Base hilbertienne). *Soit E un espace préhilbertien. On appelle base hilbertienne de E toute famille orthonormée totale. Autrement dit, une famille $\{e_n\}_{n\in I}$ est dite base hilbertienne de E si :*

1. $\langle e_n, e_m\rangle = \begin{cases} 1, & si \quad n = m, \\ 0, & si \quad n \neq m. \end{cases}$
2. $E = \overline{Vect\left\{\{e_n\}_{n\in I}\right\}}$, *toujours on pose* $I \subset \mathbb{N}$.

Remarque 3.5. *D'après la définition 3.12, on a $\forall x \in E$, il existe une famille des scalaires $(\alpha_i)_{i\in I}$ telle que*

$$x = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i, \text{ avec } I \subset \mathbb{N}.$$

Remarque 3.6. *Lorsque E est de dimension infini, la notion de base hilbertienne est une notion topologique et non algébrique ou vectorielle ; car la notion de "somme infinie" n'a aucun sens en algèbre linéaire.*

Théorème 3.10. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace préhilbertien (réel) et $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale dans E. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base hilbertienne de E.*

(ii) *Egalité de Parseval ; pour tout $x \in E$, on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|x\|^2 .$$

(iii) *Pour tout $x \in E$, la série de terme générale $\langle x, e_n \rangle e_n$ est convergente dans E et on a :*

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

(iv) *Pour tout $x, y \in E$, la série numérique de terme général $\langle x, e_n \rangle \langle y, e_n \rangle$ est convergente dans $\mathbb{R}$ et on a :*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle y, e_n \rangle .$$

Remarque 3.7. *On a*

a) *Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace préhilbertien complexe, le théorème précédent rest vraie en remplaçant l'assertion (iv) par :*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\langle x, e_n \rangle} \langle y, e_n \rangle , \ \forall x, y \in E,$$

où $\overline{\langle x, e_n \rangle}$ est le conjugué de $\langle x, e_n \rangle$.

b) *Une famille orthonormale est une base hilbertienne d'un espace préhilbertien si et seulement si elle vérifie l'une des assertions (ii), (iii) et (iv).*

Corollaire 3.6. *Soient $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, F un sous-espace vectoriel fermé de H et $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de F. soit $P_F(x)$ la projection orthogonale de $x \in H$ sur F. Alors la série de terme général $\langle x, e_n \rangle e_n$ est convergente, de plus on a :*

$$P_F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

3.7 Exercices

3.7.1 Généralité sur les espaces préhilbertiens

Exercice 3.1. *Donner la relation entre les espaces métriques, les espaces normés, les espaces de Banach, les espaces préhilbertiens et les espaces de Hilbert.*

Exercice 3.2. *Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel E dans les cas suivants :*

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$;
$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i.$$
2. $\forall P, Q \in \mathbb{R}[x]$ *l'espace des polynômes.*
$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) \, dt.$$

Exercice 3.3. *Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme associé $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$. Montrer l'identité de polarisation :*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right),\ \forall x, y \in E.$$

Exercice 3.4. *Soit E un espace préhilbertien de produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de norme associée $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$.*

1. *Montrer que pour tout $x, y \in E$*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

2. *Donner la relation entre les espaces normés et les espaces préhilbertiens.*

3. *Soit l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la norme*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

$\mathbb{R}^n$ est-il un espace préhilbertien ?

Exercice 3.5. *Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et d'une norme associée $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$. Soit $u, v \in E$, on pose :*

$$w = u - \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v,\ \ (v \neq 0).$$

1. *Montrer que*

$$\|w\|^2 = \|u\|^2 - \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^2}.$$

2. *En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

3. *Ecrire, explicitement, l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans les cas suivants :*

   (a) $x, y \in E = \mathbb{R}^n$, $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i y_i$;

   (b) $f, g \in E = C([-1,1], \mathbb{R})$, $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt$.

Exercice 3.6. *Soit $E = C([-1,1], \mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues sur $[-1,1]$, on définit l'application*

$$a : E \times E \ni (u, v) \to a(u, v) = \int_{-1}^{1} u(t)\, v(t)\, dt.$$

1. *Montrer que a est un produit scalaire sur E et donner l'expression de la norme associée.*

2. *L'espace E est-il de Hilbert ? (consulter l'exercice 1.4).*

Exercice 3.7. *Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$, l'espace des fonctions continûement dérivables. Soit l'application*

$$a = E \times E \ni (u, v) \to a(u, v) = \int_0^1 \left(u(t)\, v(t) + u'(t)\, v'(t)\right) dt.$$

1. *Montrer que a est un produit scalaire sur E.*
2. *On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui définie par*

$$u_n(x) = \begin{cases} nx, & x \in \left[0, \frac{1}{n^4}\right), \\ \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{3n^3}, & x \in \left[\frac{1}{n^4}, 1\right]. \end{cases}$$

(a) *Montrer que $u_n \in E, \forall n \in \mathbb{N}^*$.*

(b) *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy.*

(c) *L'espace E est-il de Hilbert.*

3.7.2 Sur la projection et l'orthogonalité

Exercice 3.8. *Soit H un espace de Hilbert et soit F une partie non vide de H. Soit $x \in H$, écrire une caractérisation de la projection orthogonale de x sur F (notée $P_F(x)$) dans le cas ou F est un convexe fermé et dans le cas ou F est un sous espace fermé.*

Exercice 3.9. *Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de norme $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$.*

1. *Citer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*
2. *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E et $f \in E$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que si $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, alors pour tout $g \in E$ on a*

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, g\rangle = \langle f, g\rangle.$$

Exercice 3.10. *Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, muni du produit scalaire :*

$$\forall f, g \in E : \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt.$$

Soient $f, g, h \in E$ définie par $f(x) = 1$, $g(x) = x$ et $h(x) = \frac{1}{x+1}$. Soit

$$F = Vect\{f\} \text{ et } G = Vect\{f, g\}.$$

1. *Montrer que $\|f\| > \left\|\sqrt{h}\right\| > \|g\|$.*
2. *Justifier (puis calculer) l'existence et l'unicité de $P_F(g)$ la prjection orthogonale de g sur F.*
3. *Calculer $P_F(h)$ (resp. $P_G(h)$) la prjection orthogonale de h sur F (resp. de h sur G).*

Exercice 3.11. *Soit $E = \mathbb{R}[x]$ l'espace des polynômes à coefficients réels muni du produit scalaire suivant :*

$$\forall P, Q \in E : \langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)\, Q(t)\, dt.$$

1. *Soit $F = Vect\{1, x, x^2\}$ l'espace des polynômes à coefficients réels et de degré ≤ 2. Déterminer une base orthonormale $G = \{P_0, P_1, P_2\}$ de F.*

2. *Pour tout $f \in E$ on note par $P_G(f)$ la projection orthogonale de f sur G.*

   (a) *Justifier l'existence et l'unicité de $P_G(f)$.*

   (b) *Montrer que*
   $$P_G(f) = \sum_{i=0}^{2} \langle f, P_i \rangle P_i.$$

   (c) *Soit $f(x) = x^3$, calculer $P_G(f)$.*

   (d) *Calculer la distance de f à G et en déduire la valeur de α telle que*
   $$\alpha = \min_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_{-1}^{1} \left| x^3 - ax^2 - bx - c \right|^2 dx.$$

Exercice 3.12. *Soit*

$$H = L^2([-1,1], \mathbb{R}) = \left\{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \text{ mesurable telle que } \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\forall f, g \in H : \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t) \, g(t) \, dt.$$

Soit T l'application définie sur H par :

$$\begin{array}{rccl} T: & H & \to & \mathbb{R}, \\ & f & \to & T(f) = \int_{-1}^{0} f(t) \, dt - \int_{0}^{1} f(t) \, dt. \end{array}$$

1. *Montrer que T est linéaire et continue.*

2. *Soit $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction définie par*
   $$g(x) = \begin{cases} 1, & si \; -1 \leq x < 0, \\ -1, & si \; 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

   (a) *Vérifier que $g \in H$.*

   (b) *Montrer que $\{g\}^{\perp} = \ker T$.*

   (c) *Soit $h(x) = e^{-x}$, calculer la projection de h sur $\ker T$.*

CHAPITRE 4

SÉRIE DE FOURIER ET SYSTÈMES ORTHONORMÉS COMPLETS DANS DES ESPACES CONCRETS

Dans ce chapitre, nous introduisons des notions sur les coefficients de Fourier, les suites et les séries trigonométriques. Aussi, nous allons donner quelques définitions de base sur la continuité par morceaux, les fonctions périodiques et la série de Fourier de ces fonctions. Dans le dernier de ce chapitre, nous présentons et prouvons la convergence de la série de Fourier et ses applications.

4.1 Un peu de géométrie

Nous avons vu au chapitre precédent que si V est un sous-espace de dimension finie d'un Hilbert H engendre par une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, la projection orthogonale de $f \in H$ sur V est :

$$P_F(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Supposons que la base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ soit orthogonale, alors :

$$\alpha_i = \frac{\langle f, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle}, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

On peut alors définir les coefficients de Fourier généralisés :

Définition 4.1. *Soit $\mathcal{B} = \{e_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ une famille orthogonale où $e_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, les nombres :*

$$c_n(f) = \frac{\langle f, e_n \rangle}{\langle e_n, e_n \rangle} \tag{4.1}$$

sont les coefficients de Fourier de f relativement à $\mathcal{B}$. La série

$$\sum_{n \geq 0} c_n(f)\, e_n$$

est la série de Fourier de f relativement à $\mathcal{B}$.

Si la famille $\mathcal{B}$ est orthonormeé les coefficients de Fourier se réduisent à $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$.

Proposition 4.1. *Soit H un espace de Hilbert et $\mathcal{B} = \{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ une famille dénombrable orthogonale. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. La série $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n e_n$ converge dans H si et seulement si $\sum\limits_{n\geq 0} (|\alpha_n| \|e_n\|)^2$ est convergente.*

Démonstration. On suppose que la serie $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n e_n$ est convergente dans H. De plus, on a

$$\left\| \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i|^2 \|e_i\|^2 .$$

Comme $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n e_n$ est convergente dans H cela signifie en particulier que $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i e_i \right\|^2$ existe et donc $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} |\alpha_i|^2 \|e_i\|^2$ est aussi existe et donc $\sum\limits_{i=0}^{n} |\alpha_i|^2 \|e_i\|^2$ est convergente.

Réciproquement : Montrons que la suite $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i e_i$ est convergente dans H. Il suffit de montrer que c'est une suite de Cauchy. En effet, pour $p > q$, on obtient :

$$\|S_p - S_q\| = \left\| \sum_{i=q+1}^{p} \alpha_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=q+1}^{p} |\alpha_i|^2 \|e_i\|^2 ,$$

qui est le reste de Cauchy de la serie $\sum\limits_{n\geq 0} |\alpha_n|^2 \|e_n\|^2$ qui converge. □

Nous allons maintenant conclure sur la convergence de la serie de Fourier.

Théorème 4.1. *Soit H un espace de Hilbert et $\mathcal{B} = \{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ une famille dénombrable orthogonale. Pour tout f dans H, la série $\sum\limits_{n\geq 0} c_n(f)\, e_n$ est convergente dans H. On note $S(f)$ la somme de cette série.*

Démonstration. Par l'inegalité de Bessel on a :

$$\sum_{n\geq 0} |\langle f, e_n\rangle|^2 \leq \|f\|^2 ,$$

d'après (4.1), on trouve

$$\sum_{n\geq 0} |c_n(f)|^2 \|e_n\|^2 \leq \|f\|^2 ,$$

donc la série converge. D'apres la proposition précédente, $\sum\limits_{n\geq 0} c_n(f)\, e_n$ converge dans H. □

4.2 Fonctions périodiques, suites et séries trigonométriques

Définition 4.2 (Continuité par morceaux). *Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{k}$ est dite continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision*

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b,$$

et des fonctions f_i continues sur $[a_i, a_{i+1}]_{0\leq i\leq n-1}$, telles que f soit égale à f_i sur l'intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[_{0\leq i\leq n-1}$.

Remarque 4.1. *Une fonction continue par morceaux n'est pas nécessairement continue aux points de subdivision, mais elle admet en ces points x une limite à gauche (resp. à droite) notée $f(x^-)$, (resp. $f(x^+)$).*

Définition 4.3 (Fonction périodique). *Soient $f : \mathbb{R} \to \Bbbk$, où $\Bbbk = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$, et T un réel strictement positif. On dit que f est périodique de période T ou T-périodique si*

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x+T) = f(x).$$

Le nombre $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est appelé pulsation associée à T.

Exemple 4.1. *Les exemples suivants correspondent à des signaux classiques et on les trouve souvent, avec des variantes, dans les exercices :*

— *La fonction **créneau**, par exemple de période 2π, qui vaut 1 sur $[0, \pi]$ et 0 sur $]\pi, 2\pi[$.*

— *La fonction **dent de scie** f, paire, périodique de période 2π, définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \pi - x$.*

On notera que si f est périodique de période $T > 0$, elle l'est aussi de période $2T, 3T, \ldots$ ou $-T$, $-2T, \ldots$ Une fonction de période T est entièrement donnée par sa restriction à un intervalle de la forme $[a, a+T]$.

Exemple 4.2. *Les fonctions $\cos x$, $\sin x$ et e^{ix} sont 2π-périodiques. La fonction $e^{2i\pi x}$ est 1-périodique.*

Proposition 4.2. *Soit f une fonction T-périodique continue par morceaux. On a :*

1. *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$:*
$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_{a+T}^{b+T} f(\tau)\, d\tau.$$
2. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$:*
$$\int_0^T f(t)\, dt = \int_a^{a+T} f(\tau)\, d\tau.$$

Démonstration. On effectue le changement de variables $\tau = t + T$ et on utilise la périodicité. Pour la deuxième on utilise la relation de Chasles et et le point (1.). □

Définition 4.4 (Suite trigonométrique). *On appelle suite trigonométrique toute suite de terme général :*

$$u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

où a_n et b_n, pour $n = 0, 1, \ldots$ sont des nombres réels ou complexes.

Définition 4.5 (Série trigonométrique). *Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle série trigonométrique S_n, toute combinaison linéaire d'éléments de la famille $\{\cos(kx), \sin(kx)\}_{k \in \{0,1,\ldots,n\}}$; c'est-à-dire :*

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)], \end{aligned}$$

où a_k et b_k, pour $k = 0, 1, \ldots, n$, sont des coefficients réels ou complexes.

Exemple 4.3. *Les expressions*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n\sin(nx) \text{ de même } \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{2^n}\cos(nx)+n^2\sin(nx)\right]$$

définissent des séries trigonométriques.

Remarque 4.2. *Pour $n=0$, u_0 se réduit à la fonction constante $u_0=a_0$, la valeur de b_0 n'intervient pas dans la somme de la série. Par convention nous prenons $b_0=0$.*

Proposition 4.3 (Forme complexe)**.** *Dans le cas complexe, la série trigonométrique est de la forme :*

$$P_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k e^{ikx}.$$

Lorsque la série est converge, alors elle peut s'écrire aussi sous la forme de série d'exponentielles complexes

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n e^{inx}.$$

Démonstration. Rappelons les relations d'Euler :

$$\cos(kx)=\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} \text{ et } \sin(kx)=\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i},$$

donc en remplaçant dans l'expression de $P_n(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}\left[a_k\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}+b_k\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} c_k e^{ikx}+\bar{c}_k e^{-ikx}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

où $c_k=\frac{a_k-ib_k}{2}$ et $\bar{c}_k$ est le conjugué de c_k. Si on pose $c_0=a_0$, $\alpha_k=c_k$ pour $k>0$ et $\alpha_k=\bar{c}_k$ pour $k<0$, alors la relation (4.2) devient :

$$P_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k e^{ikx}$$

et la série trigonométrique devient sous la forme :

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k e^{ikx}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n e^{inx}.$$

La prouve est complète. □

4.3 Les coefficients de Fourier

Parmi les fonctions périodiques de période T on dispose de trois types de fonctions remarquables : $\cos(n\omega x)$, $\sin(n\omega x)$ pour $n\in\mathbb{N}$ et $e^{in\omega x}$ pour $n\in\mathbb{Z}$. Dans tous les cas $\omega=\frac{2\pi}{T}$ est la pulsation associée à T. Notre objectif est d'écrire les autres fonctions comme combinaisons linéaires de celles là.

4.3.1 Application sur un espace classique

On considère l'espace suivant :

$$H = L_p^2(0,T) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \text{est } T - \text{périodique et } \int_0^T f^2(t)\,dt < \infty \right\},$$

muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^T f(t)\,\bar{g}(t)\,dt,$$

et V_n l'espace vectoriel engendré par la famille $(e_k)_{-n\leq k\leq n}$ avec

$$\begin{array}{rcl} e_k : \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \to & e_k(x) = e^{ik\omega x} \end{array}$$

qui est une famille orthogonale verifiant $\langle e_k, e_k\rangle = T$. V_n est l'espace des séries trigonométriques de degré inférieur ou égal à n et il est de dimension finie donc fermé. De plus $V_n \subset L_p^2(0,T)$.

Soit $f \in L_p^2(0,T)$. On peut donc affirmer qu'il existe un unique polynôme $f_n \in V_n$ (appelé polynôme "meilleure approximation" de f dans V_n) projection de f sur V_n qui s'écrit sous la forme :

$$f_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\,e_k,$$

où

$$c_k(f) = \frac{\langle f_n, e_k\rangle}{\langle e_k, e_k\rangle} = \frac{\langle f, e_k\rangle}{\langle e_k, e_k\rangle},\ \forall k \in \{-n, \ldots, n\}.$$

On a donc

$$c_k(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{ik\omega t}dt,\ \forall k \in \{-n, \ldots, n\},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il s'agit des coefficients de Fourier de f. La série de Fourier de f devient :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,e^{ik\omega x}.$$

L'inegalité de Bessel devient :

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt.$$

En passant a la limite dans l'inégalité de Bessel, on obtient

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt.$$

Quand f est de plus à valeurs réelles, on définit ses coefficients de Fourier réels à partir des coefficients complexes par les mêmes formules que pour les séries trigonométriques.

En effet, pour que la série complexe soit à valeurs réelles, il doit être $\bar{c}_n = -c_n, \forall n \in \mathbb{N}$, où $\bar{c}_n$ est le conjugué de c_n. (En particulier $c_0 \in \mathbb{R}$). On passe alors de la forme complexe à la forme réelle par les formules :

$$a_0 = c_0,\ \ a_n = 2\text{Re}(c_n),\ \ b_n = -2\text{Im}(c_n).$$

Cela donne :

Définition 4.6 (Série de Fourier). *Soit f une fonction à valeurs réelles de $L_p^2(0,T)$. La série de Fourier de f est définie par :*

$$S_n(x) = \sum_{n\geq 0} [a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)].$$

où $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et les coefficients de Fourier réels sont :

$$\begin{cases} a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt, \\ b_0(f) = 0, \ \ (\textit{par convention}), \\ a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt, \ n \in \mathbb{N}^*, \\ b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt, \ n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Théorème 4.2 (Convergence). *Si f est continue et dérivable sur $[0,T]$ sauf en un nombre fini de points en lesquels les limites à droites et à gauche (si elles ont un sens) de f et de sa dérivée f' sont des réels alors la série de Fourier de f converge vers f en moyenne quadratique :*

$$\int_0^T |S_n(t) - f(t)|^2\,dt \to 0, \ \textit{quand}\ n \to \infty.$$

Théorème 4.3 (Dirichlet). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{k}$ une fonction T-périodique, de classe C^1 par morceaux. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier $S_n f(x) = f(x)$ converge vers*

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Remarque 4.3. *Bien entendu, si f est continue en x, on a*

$$f\left(x^-\right) = f\left(x^+\right) = f(x) \ \ \textit{donc}\ \ \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = f(x).$$

Proposition 4.4. *La somme S_n de la série est définie par : $S_n(x) = f(x)$ si f est continue en x et*

$$S_n(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$$

si f est discontinue en x.

Proposition 4.5. *Si deux fonctions f et g ont la même série de Fourier, alors $f(x) = g(x)$ en tout point x, à la continuité de f et g.*

Proposition 4.6. *Soit f une fonction T-périodique continue, dérivable sa dérivée f' continue par morceaux. Alors la série de Fourier de la dérivée f' s'obtient en dérivant terme à terme la série de Fourier de f :*

$$[S_n(x)]' = \omega \sum_{n\geq 0} [nb_n(f)\cos(n\omega x) - na_n(f)\sin(n\omega x)].$$

Proposition 4.7. *On peut intégrer la série de Fourier de f terme à terme et la série intégrée converge vers la primitive de f uniformément sur tout intervalle fini.*

Théorème 4.4 (Formule de Parseval)**.** *Soit f une fonction réelle, T-périodique et bornée. On note a_n et b_n ses coefficients de Fourier. Alors les séries numériques $\sum\limits_{n\geq 1} a_n^2$ et $\sum\limits_{n\geq 1} b_n^2$ sont convergentes et*

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt.$$

En particulier, les coefficients de Fourier $a_n \to 0$ et $b_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

4.4 Applications

Soit f une fonction réelle 2π-périodique, définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = x^2$. Evident que f est un élélment de $L_p^2(0, 2\pi)$. Ses coefficients de Fourier sont :

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{4}{3}\pi^2, \text{ et } b_0(f) = 0,$$

on a aussi

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t^2\cos(nt)\,dt \\ &= \frac{4}{n^2},\ n\in\mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t^2\sin(nt)\,dt \\ &= -\frac{4\pi}{n},\ n\in\mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Donc la série de Fourier de f est :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0(f) + \sum_{n\geq 1}\left[a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)\right] \\ &= \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{4}{n^2}\cos(nx) - \frac{4\pi}{n}\sin(nx)\right). \end{aligned}$$

4.4.1 Calcul des coefficients pour les créneaux et les dents de scie

Le créneau

Rappelons qu'il s'agit de la fonction de période 2π, qui vaut 1 sur $[0, \pi]$ et 0 sur $]\pi, 2\pi[$.

Le calcul des coefficients de Fourier est facile (ne pas oublier le coefficient 2 pour les a_n, b_n avec $n > 0$). On trouve $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_n = 0$, pour $n > 0$, $b_{2p} = 0$ et $b_{2p+1} = \frac{2}{(2p+1)\pi}$.

Remarque 4.4. *La fonction créneau n'est ni paire ni impaire, mais en la translatant de $1/2$ ou $\pi/2$ vers le bas, on se ramène à une fonction impaire. C'est ce qui explique la nullité des a_n pour $n > 0$.*

Dent de scie

Rappelons qu'il s'agit la fonction f, paire, périodique de période 2π, définie sur $[0,\pi]$ par $f(x)=\pi-x$. Comme f est paire, ses coefficients de Fourier b_n sont nuls.

On a $a_0=\frac{\pi}{2}$, et on trouve

$$a_n=\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^2},\ \text{pour } n\geq 1,$$

En distinguant selon la parité de n, on voit que les a_{2p} sont nuls pour $p\geq 1$ et qu'on a

$$a_n=\frac{4}{\pi\left(2p+1\right)^2},\ \text{pour } p\geq 0.$$

4.5 Exercices

Exercice 4.1. *Soit f une fonction dans $L^2\left(-\pi,\pi\right)$. Soient*

$$\begin{aligned} c_n\left(f\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(t\right)e^{-int}dt,\\ a_n\left(f\right) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(t\right)\cos\left(nt\right)dt,\\ b_n\left(f\right) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(t\right)\sin\left(nt\right)dt. \end{aligned}$$

1. *Exprimer $a_n\left(f\right)$ et $b_n\left(f\right)$ en fonction de $c_n\left(f\right)$.*
2. *Comment se traduisent sur les coefficients de Fourier les propriétés si f une fonction paire ou impaire ?*
3. *Montrer que*

$$\left|c_n\left(f\right)\right|\leq \sup_{-\pi\leq x\leq\pi} f\left(x\right)=\|f\|_\infty .$$

Exercice 4.2. *Soit f une fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi,\pi]$;*

1. *Montrer que les coefficients de Fourier associés à la périodisée f de la fonction $x\rightarrow|x|$ est donnés par :*

$$a_n\left(f\right)=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right).$$

2. *En déduire que pour tout $x\in[-\pi,\pi]$:*

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{p\geq 0}\frac{\cos\left((2p+1)x\right)}{\left(2p+1\right)^2}.$$

3. *En déduire*

$$\sum_{p\geq 0}\frac{1}{\left(2p+1\right)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 4.3. *Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $[0,2\pi]$ par*

$$f\left(x\right)=x.$$

1. *Trouver la série de Fourier de* f.
2. *Déduire* $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
3. *Calculer*
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} \quad et \quad \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 4.4. *Soit* f *la fonction* 2π*-périodique définie sur* $[-\pi, \pi]$ *par*
$$f(x) = \pi^2 - x^2.$$

1. *Calculer les coefficients de Fourier de* f *et en déduire la convergence de la série de Fourier.*
2. *Calculer*
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \quad et \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Exercice 4.5. *Determiner la série de Fourier de la fonction* 2π*-périodique impaire definie par*
$$f(x) = x(\pi - x) \ \ si \ x \in [0, \pi].$$

Quelles sommes de séries numériques peut-on en déduire ?

Même question avec la fonction 2π*-périodique definie sur* $[-\pi, \pi]$ *par*
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}, & si \quad |x| < \frac{1}{2}; \\ 0, & si \quad |x| \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Exercice 4.6. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la fonction paire,* 2π*-périodique, définie par*
$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - \pi^2, & si \ x \in [0, \pi/2]; \\ 8\pi x - 4x^2 - 3\pi^2, & sinon. \end{cases}$$

Aussi, soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la fonction régularisée,* 2π*-périodique, impaire, constante égale à* 1 *sur* $]0, \pi[$.

1. *Montrer que* f *est de classe* C^1 *et calculer sa dérivée.*
2. *Calculer les coefficients de Fourier trigonométrique de les fonctions* f *et* g.
3. *Etudier la convergence simple de la série de Fourier vers* f *et* g.
4. *De la série de Fourier de* f, *en déduire la valeur de*
$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$
5. *De la série de Fourier de* g, *en déduire la valeur de*
$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad et \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$
6. *Calculer*
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \quad et \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

SOLUTIONS D'EXERCICES ET CORRIGÉS TYPES D'EXAMENS

Dans ce chapitre nous donnons les solutions d'exercices des chapitres précédents et corrigés types d'examens.

5.1 Solutions d'exercices de quelques propriétés du chapitre 1

Exercice : Vérifier que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Solution : l'application $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ car elle est **positive** et $\|0_{\mathbb{R}^n}\|_1 = 0$ et

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= 0 \Rightarrow |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = 0\\ &\Rightarrow x_i = 0,\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\\ &\Rightarrow x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0_{\mathbb{R}^n}.\end{aligned}$$

De plus $\forall \lambda \in \mathbb{k}$; on trouve

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_1 &= |\lambda x_1| + |\lambda x_2| + \cdots + |\lambda x_n| = |\lambda| \left(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|\right)\\ &= |\lambda| \, \|x\|_1,\end{aligned}$$

aussi, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\|x + y\|_1 &= \|(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)\|_1\\ &= |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| + \cdots + |x_n + y_n|\\ &\leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| + |y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n|\\ &\leq \|x\|_1 + \|y\|_1.\end{aligned}$$

On obtient le même resultat avec $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Propriété 5.1. *Soit N une norme sur E, alors $\forall u, v \in E$ on trouve*

$$|N(u) - N(v)| \leq N(u - v). \tag{5.1}$$

Démonstration. Exercice. □

Solution $\forall u, v \in E$

$$N(u) = N(u - v + v) \leq N(u - v) + N(v)$$

alors

$$N(u) - N(u) \leq N(u - v). \tag{5.2}$$

D'autre parte

$$\begin{aligned} N(v) &= N(v - u + u) \leq N(v - u) + N(u) \\ &\leq N((-1)(u - v)) + N(u) = |-1| N(u - v) + N(u) \\ &\leq N(u - v) + N(u) \end{aligned}$$

alors

$$-N(u - v) \leq N(u) - N(u). \tag{5.3}$$

De (5.2) et (5.3) on obtient facilement (5.1).

Proposition 5.1. *Sur $\mathbb{R}^n$ les trois normes $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$ sont équivalentes.*

Démonstration. Exercice. □

Solution $\forall x \in \mathbb{R}^n$, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et fini, on a

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\} \\ &= |x_i| \text{ (où } 1 \leq i \leq n, \text{ tel que } |x_i| = \|x\|_\infty) \\ &\leq \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_i|^2 + \cdots + |x_n|^2} = \|x\|_2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|x\|_2^2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \\ &\leq |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i| |x_j| \\ &\leq (|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)^2 = \|x\|_1^2. \end{aligned}$$

Donc $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$, d'autre parte

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\} + \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\} + \cdots + \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\} \\ &\leq n \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\} = n \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Finallement

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty.$$

Proposition 5.2. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n., alors l'application*

$$\begin{array}{rccl} d: & E \times E & \to & \mathbb{R}_+, \\ & (x,y) & \to & \|x-y\|, \end{array}$$

est une distance (appelée la distance associée à la norme $\|\cdot\|$).

Démonstration. Exercice. □

Solution : On peut vérifier facilement que d est une distance sur E, appelée distance associée à la norme $\|\cdot\|$.

1. $\forall x, y \in E$, on a $d(x,y) = \|x-y\| > 0$ et $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0_E \Leftrightarrow x = y$.
2. $\forall x, y \in E$, on a $d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |-1| \|y-x\| = \|y-x\| = d(y,x)$.
3. $\forall x, y, z \in E$, on a $d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$.

Le résultat suivant rassemble quelques propriétés de d.

Proposition 5.3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de E qui convergent respectivement vers u et u' pour la norme $\|\cdot\|$, alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la suite $\lambda u_n + \mu u_n'$ converge vers $\lambda u + \mu u'$.*

Démonstration. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n' = u'$, alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on trouve

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left(\lambda u_n + \mu u_n'\right) &= \lim_{n\to\infty} \lambda u_n + \lim_{n\to\infty} \mu u_n' = \lambda \lim_{n\to\infty} u_n + \mu \lim_{n\to\infty} u_n' \\ &= \lambda u + \mu u'. \end{aligned}$$

Evidente. □

Théorème 5.1. *Soit E un e.v. et $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ deux normes sur E. Alors si $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sont équivalentes, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E et pour tout $u \in E$,*

$$u_n \overset{cv}{\to} u \text{ pour la norme } \|\cdot\|_a \Leftrightarrow u_n \overset{cv}{\to} u \text{ pour la norme } \|\cdot\|_b.$$

Démonstration. Exercice. □

Solution : Deux normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sur E sont dites équivalentes ssi $\exists c, C > 0$ telle que

$$\forall x \in E,\ c\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C\|x\|_a.$$

$(\Rightarrow)$ $u_n \overset{cv}{\to} u$ pour la norme $\|\cdot\|_a$ c.à.d

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \text{tel que } \forall n \geq n_0,\ \|u_n - u\|_a < \varepsilon,$$

et $\|x\|_b \leq C\|x\|_a$, $\forall x \in E$, donc

$$\frac{1}{C}\|u_n - u\|_b \leq \|u_n - u\|_a < \varepsilon \Rightarrow \|u_n - u\|_b < \varepsilon' = \varepsilon C.$$

Alors $u_n \overset{cv}{\to} u$ pour la norme $\|\cdot\|_b$.

(On utilise la même méthode pour $(\Leftarrow)$).

5.5 Examens final L3-Maths 2020-2021 (Univ. Ziane Achour de Djelfa)

Examen final (Pour $3^{iéme}$ Année Licence Mathématiques (S5))

Espaces Vectoriels Normés – Mars 2021

Exercice 1 (5 points) : Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on note par :

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| .$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. Soit d une distance définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et vérifie les conditions suivantes $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{k}$:
$$d(x+z, y+z) = d(x,y) \ \text{ et } \ d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \, d(x,y) .$$
Montre que l'application $\|x\| = d(x, 0)$ définie une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 (8 points) : Soit $E = C([-1,1], \mathbb{R})$ muni de la norme :

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)| \, dx.$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui définie par :

$$u_n(x) = \begin{cases} x, & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ nx, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

1. Vérifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente dans E ? Pourqoi ?
4. Est-ce que $(E, \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach ? Pourqoi ?

Exercice 3 (7 points) : Soit $E = C([-1,1], \mathbb{R})$ muni de la norme :

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$T : (E, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|) \ \text{ tel que } \ Tf(x) = \int_{-1}^{1} t f(t) \, dt.$$

Montrer que $T \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et calculer sa norme $|||T|||$.

Bon Courage

Bibliographie

[1] F. Bayer-C, Espace de Hilbert et opérateurs, Tome 2, Ellipse, (1986).

[2] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson, Paris, (1983).

[3] N. El Hage Hasssan, Topologie générale et espaces normés, Dunod, Paris, (2011).

[4] C. Gasquet, P. Witomski, Analyse de Fourier et applications, Masson, 1995.

[5] A. Guichardet, Intégration - Analyse hilbertienne, Ellipses, 1989.

[6] M. Hazi, Topologie. Au delà des travaus dirigés, O.P.U, Alger, (2015).

[7] G. Lacombe, P. Massat, Analyse Fonctionnelle. Exercices corrigés, Dunod, (1999).

[8] A. Mokhtari, Espaces véctoriels normés, Université Mohamed Boudiaf de M'sila (2020).

[9] A. Mostfai, Cours de Topologie, O.P.U, Alger, (1989).

[10] Y. Sonntag, Topologie et Analyse Fonctionnelle. Cours et exercices, Gauthier Villars, (1997).