**Chapitre 1: Systèmes d’équations différentielles linéaires**

**I. Introduction**

Dans ce chapitre, nous allons voir comment résoudre un système d’équations différentielles. Les matrices sont à coefficients réelles ou complexes. Considérons le système différentiel suivant :

Généralement, on apprend à résoudre les équations sous forme :

a et b sont des fonctions (généralement en fonction de t), la solution des fonctions est :

**I.2.Valeurs propres et les vecteurs propres d’une matrice :**

Soit

* est dit valeur propre de la matrice A s’il existe un vecteur non nul tel que :

Pour

Ou est la matrice identité de taille n×n, quelque soit le vecteur

* Le vecteur est alors appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre .

**Exemple :**

Voici la matrice

Trouver les valeurs propres de la matrice A.

**Solution :**

Alors :

Les valeurs propres de la matrice A sont :

**I .3.écriture matricielle :**

Un système différentiel linéaire homogène est un système d’équations différentielles de la forme :

Où les *ai j* () sont des coefficients constants réels ou complexes.  
On pose

Avec cette notation matricielle, le système différentiel (*S*) devient :

**I.4.Méthode pour diagonaliser une matrice**

Soit A une matrice n×n,A est diagonalisable si et seulement si elle admet n vecteurs propres linéairement indépendants.

Plus précisément, on a :

Ou D est une matrice diagonale si et seulement si les colonnes de P (matrice de passage) sont n vecteurs propres linéairement indépendants de A.

Dans ce cas, les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A associés respectivement aux colonnes de P ;

**Etapes de diagonalisation**

* Déterminer le polynôme caractéristique de A :
* Trouver les racines de (valeurs propres de A) ;
* Déterminer des bases d’espace propres ;
* Construire la matrice inversible à partir des vecteurs de base tous les espace propres ;
* Construire la matrice diagonale à partir des valeurs propres A ;

**Exemple (matrice 2 dimensions)**

Diagonaliser la matrice suivante :

**SOLUTION**

1. Pour cela, on détermine ses valeurs propres :

Ainsi, la matrice A admet deux valeurs propres ( deux raines réels) distinctes, qui sont λ1 = 2 et λ2 = 3. Donc elle est diagonalisable.

1. Déterminons une base de vecteurs propres. Tout d’abord pour λ1 = 2

d’où le vecteur propre associé à la valeur propre λ1 =2

Pour la valeur propre λ2 = 3 :

d’où le vecteur propre associé à la valeur propre λ2 = 3

1. Dans la base (,), la matrice A s’écrit :

Matrice De passage :

Com : comatrice de la matrice de passage P ;

**Exemple** **(matrice 3 dimensions) :**

Diagonaliser la matrice suivante :

**SOLUTION :**

Démontrons que A est diagonalisable et trouvons une matrice P telle que P −1AP soit diagonal

1. Commençons par calculer le polynôme caractéristique de A :

2. Les racines du polynôme caractéristique, et donc les valeurs propres de A, sont les réels λ1 = 1, λ2 = −4 et λ3 = 2. Il y a trois valeurs propres distinctes, la matrice est diagonalisable

3. Déterminons des vecteurs propres associés. Par exemple, pour λ2 = −4

L’ensemble des solutions est . D’où le vecteur propre  associé à la valeur propre λ2 = −4

Pour la valeur propre λ1 = 1

L’ensemble des solutions est. D’où le vecteur propre  associé à la valeur propre λ1 = 1

Pour la valeur propre λ3 = 2

L’ensemble des solutions est. D’où le vecteur propre  associé à la valeur propre λ3 = 2

4. La base (V1 , V2 , V3 ) diagonalise la matrice A, c’est-à-dire D = P −1AP avec

**NB : pour l’inversion de la matrice 3X3 voir la vidéo**

[**https://www.youtube.com/watch?v=QWmy7ysNEvo**](https://www.youtube.com/watch?v=QWmy7ysNEvo)

<https://www.youtube.com/watch?v=gYDmn8bjiwQ>

**I .5.solution des équations différentielles pour un Système diagonal :**

Si *A* est une matrice diagonale à coefficients réels, alors le système s’écrit avec

On résout indépendamment chaque équation , dont les solutions sont les , . Les solutions *X*(t) sont donc les fonctions :

Ou k1….kn sont des constants réelles.

Soit une matrice diagonalisable sur .Notons une base de vecteurs propres et les valeurs propres correspondantes. Alors les fonctions forment une base de l’espace des solutions du système.

Exemple :

On veut résoudre le système différentiel avec

Ou :

et

* Les valeurs propres et les vecteurs propres sont :

**SOLUTION**

Nous obtenons trois solutions :

Les solutions du système sont donc les fonctions de la forme :

La condition initiale se transforme donc en le système linéaire :

On trouve *a* = 2, *b* = 1, *c*= *−*1. Ainsi l’unique solution qui vérifie le système et la condition  
initiale est :

**I .6.solution des équations différentielles pour un Système diagonal à valeurs propres complexes:**

Soient http://uel.unisciel.fr/mathematiques/sys_diff/sys_diff_ch02/res/apprendre_ch2_04_3.png les valeurs propres complexes conjuguées de la matrice du système.

Les solutions réelles de (1) sont de la forme

http://uel.unisciel.fr/mathematiques/sys_diff/sys_diff_ch02/res/apprendre_ch2_04_4.png

où C et D peuvent être choisis arbitrairement, E et F se calculant en fonction de C et D en reportant http://uel.unisciel.fr/mathematiques/sys_diff/sys_diff_ch02/res/apprendre_ch2_04_5.png et http://uel.unisciel.fr/mathematiques/sys_diff/sys_diff_ch02/res/apprendre_ch2_04_6.png dans une des équations du système initial.

**Remarque**

Si http://uel.unisciel.fr/mathematiques/sys_diff/sys_diff_ch02/res/apprendre_ch2_04_7.png , c'est-à-dire que les valeurs propres sont imaginaires pures, les solutions sont périodiques de période http://uel.unisciel.fr/mathematiques/sys_diff/sys_diff_ch02/res/apprendre_ch2_04_8.png

On peut trouver les solutions **complexes** du système en utilisant les méthodes exposées dans les pages précédentes. On obtient ainsi toutes les solutions complexes en donnant aux constantes des valeurs arbitraires **complexes**.

Nous allons voir maintenant comment trouver toutes les solutions **réelles** de ce système.

Ecrivons le système sous la forme

http://uel.unisciel.fr/mathematiques/sys_diff/sys_diff_ch02/res/apprendre_ch2_04_2.png

Puisque les coefficients a, b, c, d sont réels, les valeurs propres sont conjuguées; notons les

http://uel.unisciel.fr/mathematiques/sys_diff/sys_diff_ch02/res/apprendre_ch2_04_3.png

exemple : Exemple de résolution d'un système à valeurs propres complexes par identification

Soit à résoudre le système

http://uel.unisciel.fr/mathematiques/sys_diff/sys_diff_ch02/res/apprendre_ch2_04_32.png

La matrice du système http://uel.unisciel.fr/mathematiques/sys_diff/sys_diff_ch02/res/apprendre_ch2_04_33.png admet pour valeurs propres http://uel.unisciel.fr/mathematiques/sys_diff/sys_diff_ch02/res/apprendre_ch2_04_34.png

Les solutions sont donc de la forme

http://uel.unisciel.fr/mathematiques/sys_diff/sys_diff_ch02/res/apprendre_ch2_04_35.png

Calculons http://uel.unisciel.fr/mathematiques/sys_diff/sys_diff_ch02/res/apprendre_ch2_04_36.png :

http://uel.unisciel.fr/mathematiques/sys_diff/sys_diff_ch02/res/apprendre_ch2_04_37.png

D'autre part,

http://uel.unisciel.fr/mathematiques/sys_diff/sys_diff_ch02/res/apprendre_ch2_04_38.png

En identifiant http://uel.unisciel.fr/mathematiques/sys_diff/sys_diff_ch02/res/apprendre_ch2_04_39.png avec http://uel.unisciel.fr/mathematiques/sys_diff/sys_diff_ch02/res/apprendre_ch2_04_40.png (première ligne du système), on trouve : http://uel.unisciel.fr/mathematiques/sys_diff/sys_diff_ch02/res/apprendre_ch2_04_41.png et http://uel.unisciel.fr/mathematiques/sys_diff/sys_diff_ch02/res/apprendre_ch2_04_42.png

La solution générale est donc

http://uel.unisciel.fr/mathematiques/sys_diff/sys_diff_ch02/res/apprendre_ch2_04_43.png

Le lecteur s'assurera qu'on obtiendrait le même résulat en identifiant http://uel.unisciel.fr/mathematiques/sys_diff/sys_diff_ch02/res/apprendre_ch2_04_44.png avec http://uel.unisciel.fr/mathematiques/sys_diff/sys_diff_ch02/res/apprendre_ch2_04_45.png