

# CHAPITRE VI: RÉGIMES D'ÉCOULEMENT

## Introduction :

Il existe plusieurs régimes d'écoulement ou régimes hydrauliques présentant entre eux des différences essentielles. Depuis longtemps les hydrauliciens avaient constaté l'existence de ces différents régimes, mais c'est **Osborne Reynolds** qu'il a réussi de les mettre expérimentalement en évidence et de dégager le critère permettant de les différencier

**Expérience de Reynolds** : l'expérience de Reynolds consiste à envoyer à l'aide du dispositif représenté un liquide coloré au sein d'une masse liquide en mouvement dans un tube de verre. En ouvrant plus ou moins le robinet de vidange, on fait varier la vitesse d'écoulement dans le tube.

Tant que la vitesse est faible, la teinture forme dans le tube un filet coloré parfaitement net et ne se mélange pas aux filets voisins, c'est le régime **tranquille** ou **laminaire**. On l'appelle aussi parfois par le "**régime de Navier**" ou "**régime de Poiseuille**".

Si la vitesse d'écoulement s'accroît dans le tube le filet coloré paraît osciller et vibrer, puis la vitesse augmente encore, le filet se rompt, ne conserve plus son identité propre et se divise en un très nombre de particules, de telle sorte que toute la matière colorante se répartit dans la masse en mouvement. Ce régime s'appelle **Turbulent**.

En raison de la multiplicité des conditions qui régissent un écoulement, il était difficile de dégager un paramètre permettant de servir de critère à un type d'écoulement donné. C'est précisément le grand mérite de Reynolds d'avoir pu dégager ce paramètre: **Le nombre de Reynolds**.

$$\Re = \frac{V.D}{\nu}$$

D'où :  $V$  le vitesse moyenne,  $D$ ; le diamètre intérieure du conduite,  $\nu$  ; le coefficient de viscosité cinématique du liquide en mouvement,  $\Re$  ; le nombre adimensionnel de Reynolds.

Si  $\Re < 2000$ , le régime est laminaire.

Si  $\Re > 2000$ , le régime est turbulent.

**Remarque:** Pratiquement dans tous les problèmes courants d'hydraulique (Sauf pour l'hydraulique souterraine), le régime d'écoulement est turbulent.

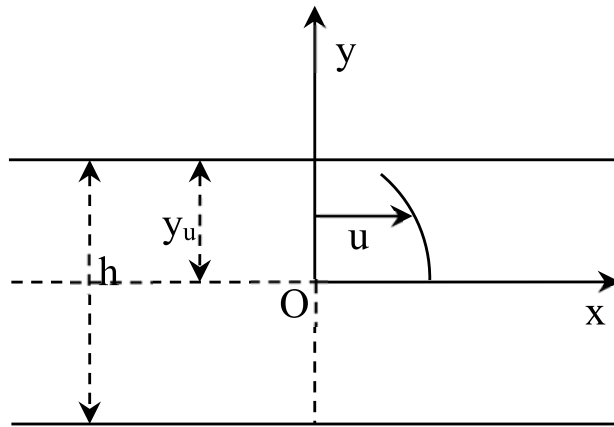
## 1. Régime laminaire :

Nous étudierons deux exemples d'un régime laminaire :

- Écoulement entre deux plans parallèles.
- Écoulement dans un tube cylindrique.

### 1.1. Écoulement entre deux plans parallèles:

Désignons par  $h=2y_0$  la distance des deux plans, comme la montre la figure ci-dessous :



Considérons l'équation de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} - \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{cases}$$

Comme tenu des hypothèses :

- $X = Y = Z = 0$
- L'écoulement étant parallèle à Ox, les lignes de courant sont des droites parallèles et  $v=w=0$
- Le régime est supposé permanent donc  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$
- L'équation de continuité  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$  avec  $v=w=0$  entraîne  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

Dans ces conditions, les équations de Navier-Stokes se simplifient et deviennent :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières équations montrent que la pression ne dépend que de x, l'équation s'écrit :

$$\frac{dP}{dx} = \nu \rho \left( \frac{d^2 u}{dy^2} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} \quad \text{où } P \text{ ne dépend que de } x, \text{ et } u \text{ ne dépend que de } y.$$

On intègre l'équation deux fois par rapport à y :  $u = \frac{1}{\mu} \left( \frac{dP}{dx} \right) \frac{y^2}{2} + by + c$ .

**a) Dans le cas de deux parois immobiles (Ecoulement plan de Poiseuille) :**

Pour déterminer les constantes b et c, on utilise les conditions aux limites suivantes:

$$u = 0 \text{ pour } y=y_0 \text{ et } y=-y_0 \text{ avec } y=(1/2)h.$$

L'application de ces conditions, permet d'obtenir les valeurs des constantes suivants:  $b=0$ , et

$$c = -\frac{1}{2\mu} \left( \frac{dP}{dx} \right) y_0^2$$

L'expression de u est :  $u = \frac{1}{\mu} \left( \frac{dP}{dx} \right) \frac{y_0^2}{2} \left( \frac{y^2}{y_0^2} - 1 \right)$ , la répartition du vitesse dans le plan

xOy est donc **parabolique**. La vitesse maximale est atteinte en milieu de l'intervalle est égale à

$$u_{\max} = \frac{ay_0^2}{2\mu} \text{ Sachant que la pression se décroît linéairement dans la direction de l'écoulement}$$

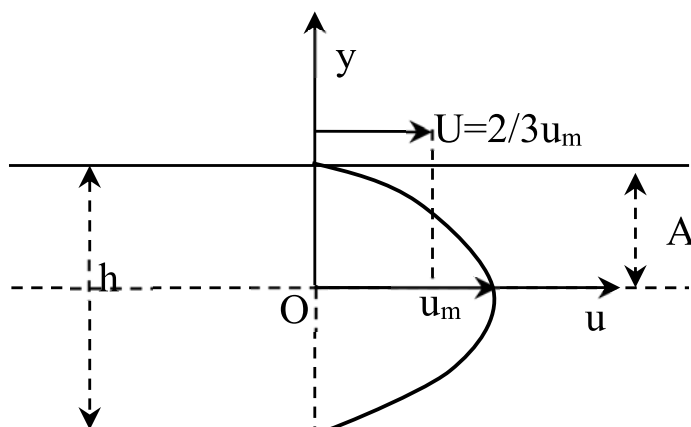
suivant la loi  $\frac{dP}{dx} = -a$  est négatif.

La vitesse moyenne  $U_{\text{moy}} = \frac{1}{h} \int_0^h u dy$  Avec  $\int_0^h u dy = \frac{2}{3} h u_{\max}$  (Surface du segment parabole)

$$\text{D'où : } U_{\text{moy}} = \frac{2}{3} u_{\max} = \frac{ay_0^2}{3\mu}$$

Le débit (q) par unité de largeur mesurée dans la direction Oz est donné par :  $q = Uh = 2y_0 U$

$$\text{Donc } q = \frac{2ay_0^3}{3\mu}.$$



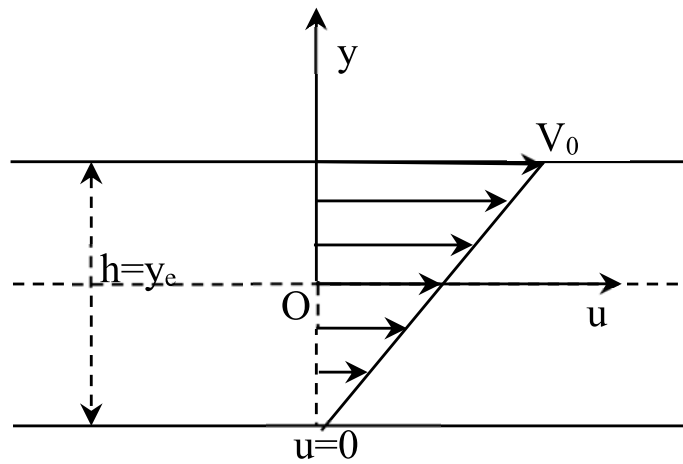
**b) Dans le cas d'une paroi immobile et l'autre en mouvement avec une vitesse constante  $V_0$  (Ecoulement plan de Couette) :**

$$\text{On a : } \frac{dP}{dx} = 0$$

$$u=0 \text{ Pour } y=-y_0 \quad \text{et} \quad u=V_0 \text{ Pour } y=y_0,$$

Compte tenu ces conditions l'équation s'écrit :  $u=by+c$ , Avec ;  $b = \frac{V_0}{2y_0}$  et  $c = \frac{V_0}{2}$

Soit  $u = \frac{V_0}{2} \left( \frac{y}{y_0} + 1 \right)$  La répartition de vitesse est linéaire.



c) Dans le cas d'une paroi immobile et l'autre en mouvement avec une vitesse constante  $V_0$  mais le gradient de vitesse n'est pas nul (Ecoulement plan de Couette généralisé):

On a :  $\frac{dP}{dx} = -a$

$u=V_0$  Pour  $y=-y_0$  et  $u=V_0$  Pour  $y=y_0$ ,

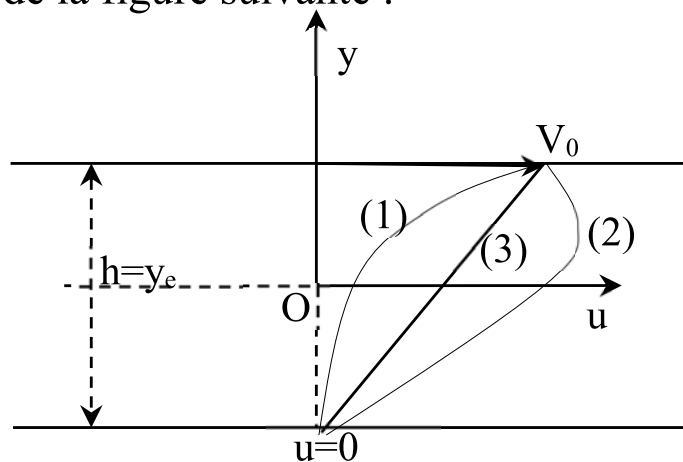
Les valeurs constantes  $b$  et  $c$  sont :  $b = \frac{V_0}{2y_0}$  et  $c = \frac{ay_0^2}{2\mu} + \frac{V_0}{2}$

L'équation s'écrit :  $u = \underbrace{\frac{ay_0^2}{2\mu} \left(1 - \frac{y^2}{y_0^2}\right)}_{u_1} + \underbrace{\frac{V_0}{2} \left(\frac{y}{y_0} + 1\right)}_{u_2}$  Avec  $a = -\frac{dP}{dx}$  d'où  $u = u_1 + u_2$

$u_1$ : Correspond à l'écoulement plan de Poiseuille.

$u_2$ : Correspond à l'écoulement plan de Couette.

La répartition de la vitesse est la somme des répartitions précédentes et conduit à des courbes  $u(y)$  analogues à celle de la figure suivante :



(1) :  $\frac{dP}{dx} = \frac{2\mu W_0}{h^2}$

(2) :  $\frac{dP}{dx} = -\frac{4\mu V_0}{h^2}$

(3) :  $\frac{dP}{dx} = 0$

## 1.2. Ecoulement dans un tube cylindrique :

Considérons un tube rectiligne de section circulaire constante de rayon  $r$ . soit  $\alpha$  l'angle de  $OX$  avec le plan  $H'H$ , et  $l$  la longueur entre les sections (1) et (2) d'où les pressions  $P_1$  et  $P_2$ . Les forces qui agissent sont :

Le poids dont la projection sur  $OX$  est :

$-\varpi\pi y^2 l \sin \alpha = -\varpi\pi y^2 (z_2 - z_1)$  . D'où  $z_1$  et  $z_2$  les côtes des centres de sections (S1) et(S2)

Les pressions en bout dans la résultante est :  $(P_1 - P_2)\pi y^2$

Les réactions qui s'exercent sur la surface latérale dont la résultante tangentielle est :  $-\tau 2\pi y l$

Sachant que l'expression de  $\tau$  est :  $\tau = -\mu \frac{du}{dy}$  donc sa projection sur OX donne :  $+\mu \frac{du}{dy} 2\pi y l$

L'équilibre dynamique du cylindre donne :

$$-\varpi \pi y^2 (z_2 - z_1) + (P_1 - P_2)\pi y^2 + \mu \frac{du}{dy} 2\pi y l = 0$$

$\pi y^2 [(P_1 + \varpi z_1) - (P_2 + \varpi z_2)] = -2\pi \mu y l \frac{du}{dy}$  En introduisant les pressions étoilées:  $P_1^* = P_1 + \varpi z_1$  et

$P_2^* = P_2 + \varpi z_2$  et en divisant par  $2\pi \mu y l$ , il vient :  $\frac{P_1^* - P_2^*}{2\mu l} y = -\frac{du}{dy}$  en intégrant et en tenant compte

la condition aux limites ( $u=0$  pour  $y=r$ ), on obtient :  $u = \frac{P_1^* - P_2^*}{4\mu l} (r^2 - y^2)$  La vitesse varie donc en suivant une **loi parabolique**.

Le débit élémentaires de rayon  $y$  et de largeur  $dy$  est :  $dQ = 2\pi y u dy$  d'où :

$$dQ = \int_0^r 2\pi y \frac{P_1^* - P_2^*}{4\mu l} (r^2 - y^2) dy$$

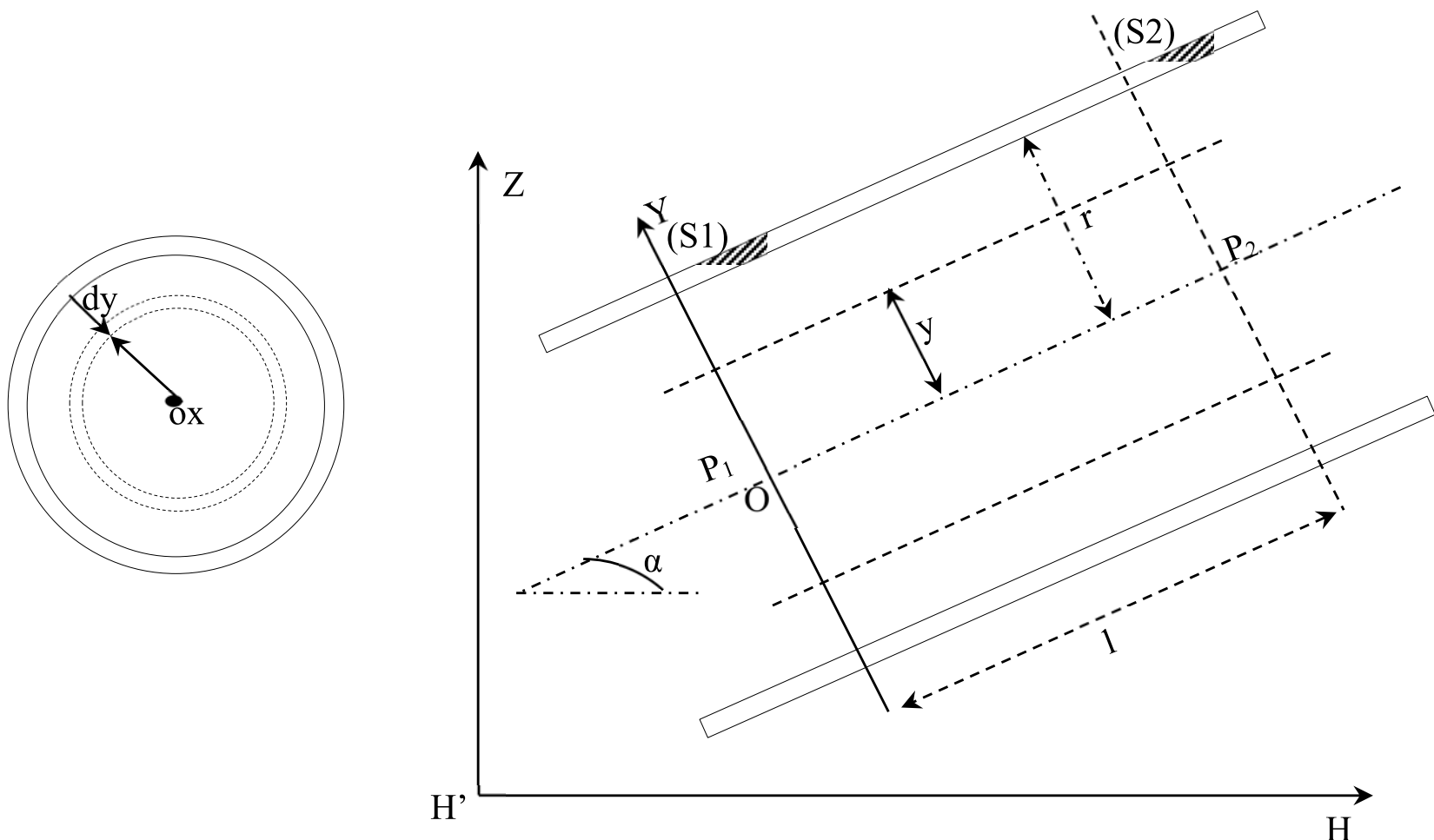
$$Q = \frac{\pi r^4}{8\mu} \frac{P_1^* - P_2^*}{l} \text{ c'est la formule de Poiseuille(1840).}$$

La vitesse moyenne a pour expression :

$$\text{La vitesse maximale } V_{max} \text{ est: } V_{max} = \frac{P_1^* - P_2^*}{4\mu l} r^2 = 2U_{moy}$$

Comme le mouvement est uniforme (pas de variation de la vitesse), le théorème de Bernoulli s'écrit:

$$\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} = h - j = 0 \text{ Avec } j = h = \frac{P_1^* - P_2^*}{\varpi} \text{ et } \frac{P_1^* - P_2^*}{l} = \frac{j\varpi}{l} = J\varpi$$



**Application :** Calculer le profil de vitesse de l'état d'équilibre pour l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible sur un plan incliné. Vous pouvez supposer que la plaque est large et que les effets de fin peut être négligée. Quelle est la vitesse moyenne par unité de largeur?

## 2. Pertes de charge :

Les pertes de charge ou d'énergie dans les conduites, les canaux, les oueds, les fleuves et d'autres voies sont dues aux frottements des molécules liquides entre elles et entre les parois du dispositif solide qui guide le courant. Ces frottements interviennent dès le mouvement se produit puisque ils sont le résultat de la viscosité et de turbulence du régime. Les pertes de charge peuvent être se diviser en perte de charge linéaire et pertes de charge singulière d'où :  $\Delta H_T = \Delta H_L + \Delta H_S$

### 2.1. Les pertes de charge linéaire:

Entre deux points séparés par une longueur  $L$ , dans un tuyau de diamètre  $D$ , la perte de charges linéaires s'exprime sous la forme suivante :

$$j = \Delta H_L = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (\text{m}). \text{ C'est la formule de Darcy-Wesbach.}$$

La détermination du coefficient de la perte de charge linéaire  $\lambda$  repose entièrement sur le régime d'écoulement. On peut calculer mathématiquement le coefficient de frottement  $\lambda$  pour l'écoulement laminaire, mais on ne dispose aucune expression mathématique simple de la relation entre  $\lambda$  et le nombre de Reynolds pour le cas d'un écoulement turbulent. Nikuradsé et d'autres chercheurs ont aperçu que la rugosité relative  $\varepsilon$  influe aussi sur la valeur de  $\lambda$ .

1) Pour l'écoulement laminaire, nous avons ;

$$\frac{P_1^* - P_2^*}{l} = \frac{j\varpi}{l} = J\varpi \Rightarrow j = \lambda \frac{1}{D} \frac{v^2}{2g} \Rightarrow \lambda = \frac{2gD}{v^2} \frac{P_1^* - P_2^*}{\rho gl}$$

$$\text{Or; } \frac{P_1^* - P_2^*}{l} = \frac{8\mu v}{r^2}$$

$$\lambda = \frac{2D}{\rho v^2} \frac{8\mu v}{r^2} \Rightarrow \lambda = 64 \frac{1}{\frac{vD}{\nu}} \text{ En définitive; } \lambda = \frac{64}{R_e} \text{ pour } R_e < 2000$$

2) Pour l'écoulement turbulent, beaucoup d'hydrauliciens ont essayé d'exprimer  $\lambda$  à partir des résultats de leurs propres expériences :

a) Pour les tuyaux lisses, Blasius a proposé pour  $3000 < R_e < 100000$ :  $\lambda = \frac{0.316}{R_e^{0.25}}$ . Von

Karman-Prandtl ont proposé pour  $4000 < R_e < 3 \cdot 10^6$  :  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(R_e \sqrt{\lambda}) - 0.8$

b) Pour les tuyaux rugueux, et  $R_e > 4000$  l'équation est :  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.5 \log\left(\frac{R_e}{\varepsilon}\right) + 1.74$ .

Nikuradsé a proposé pour  $R_e > 4000$ :  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left(\frac{\varepsilon}{3.7D}\right)$

Pour tous les tuyaux, l'Institut d'hydraulique des U.S.A. et pour la plupart des cas chercheurs considèrent l'équation de Colebrook comme la plus acceptable pour calculer  $\lambda$ :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left(\frac{\varepsilon}{3.7d} + \frac{2.51}{R_e \sqrt{\lambda}}\right).$$

Cette équation est difficile à résoudre, on dispose le diagramme de **Moody** qui permet de lire la relation entre le coefficient  $\lambda$ , le nombre de Reynolds et la rugosité relative ( $\varepsilon/D$ ).

# Moody Diagram

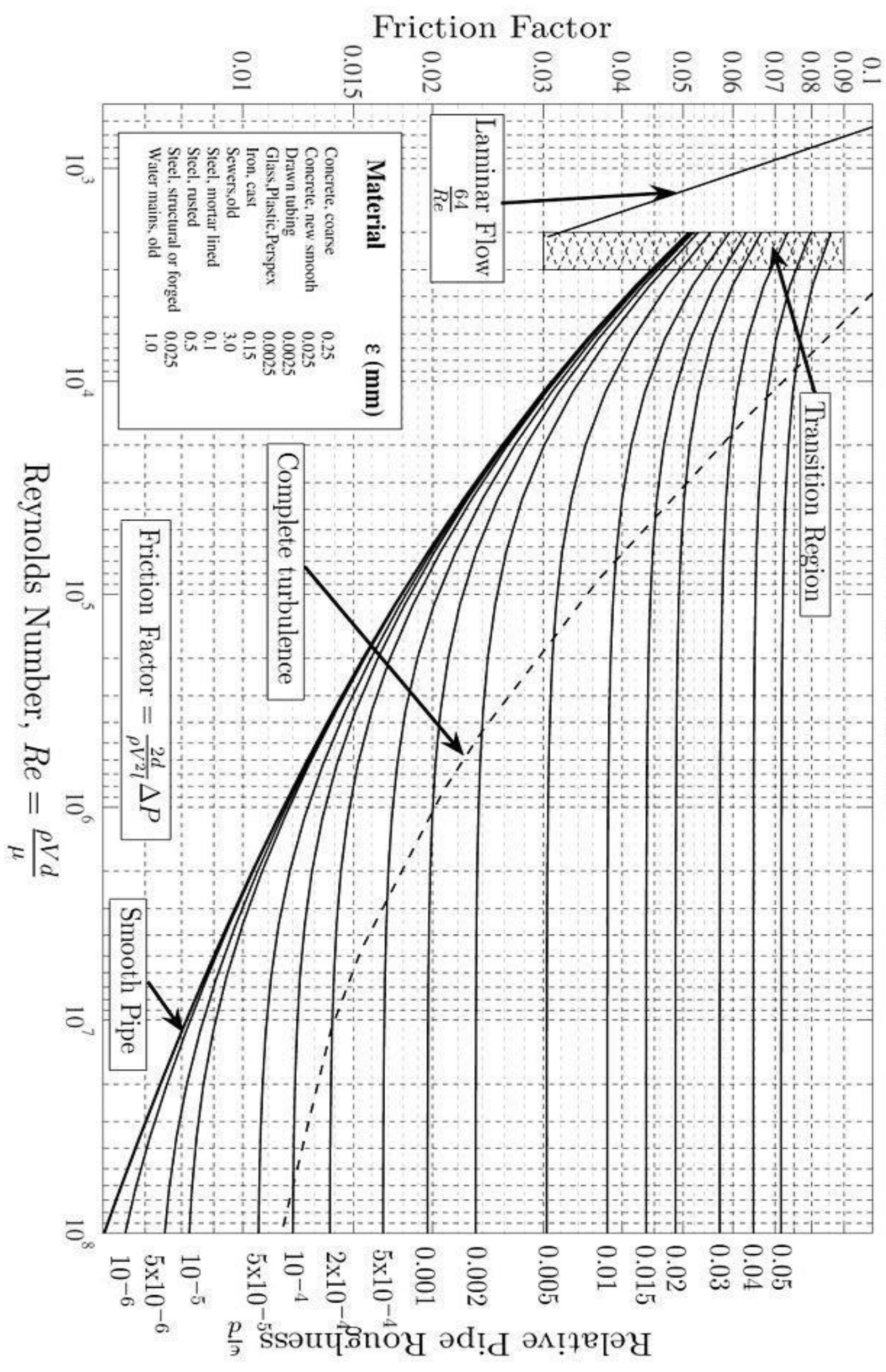


Diagramme de Moody



## 2.2. Les pertes de charge locales (singulières):

Les pertes de charge singulières proviennent d'un changement significatif des lignes de courant, elles se produisent donc lors de contractions et d'élargissements (brusque ou graduel) dans les vannes, les coudes, à l'entrée ou à la sortie d'une conduite. L'étude théorique de ces diverses pertes mineures est très complexe, on les évalue empiriquement. Elles sont habituellement exprimées en fonction de la hauteur vitesse.

$$\Delta H_s = \xi \frac{V^2}{2g}$$

Le tableau (1) résume les pertes de charge pour les différentes formes de singularités.

Accessoire	Perte de charge moyenne
1. De réservoir à conduite (perte à l'entrée)	$\Delta H_s = 0.5 \frac{V_2^2}{2g}$
2. De conduite à réservoir (perte à la sortie)	$\Delta H_s = 1.0 \frac{V_1^2}{2g}$
3. Divergent brusque	$\Delta H_s = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$
4. Divergent progressif	$\Delta H_s = \xi \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$
5. Venturis, buses et orifices	$\Delta H_s = \left( \frac{1}{c_v^2} - 1 \right) \frac{V_2^2}{2g}$
6. Convergent brusque	$\Delta H_s = \zeta \frac{V_2^2}{2g}$
7. Les valeurs de $\xi$ : -45°, coude...0,35 à 0,45 -90°, coude...0,5 à 0,75 -Té.....01,5 à 2 -Vanne de porte....0,25 -Vanne de contrôle.....3	$\Delta H_s = \xi \frac{V_2^2}{2g}$

Le tableau (2) : Valeurs de  $\xi$  (Convergent et divergent)

Convergent brusque		Divergent progressif pour un angle total de cône de :						
D1/D2	$\xi$	4°	10°	15°	20°	30°	50°	60°
1.2	0.08	0.02	0.04	0.09	0.16	0.25	0.35	0.37
1.4	0.17	0.03	0.06	0.12	0.23	0.36	0.50	0.53
1.6	0.26	0.03	0.07	0.14	0.26	0.42	0.57	0.61
1.8	0.34	0.04	0.07	0.15	0.28	0.44	0.61	0.65
2.0	0.37	0.04	0.07	0.16	0.29	0.46	0.63	0.68
2.5	0.41	0.04	0.08	0.16	0.30	0.48	0.65	0.70
3.0	0.43	0.04	0.08	0.16	0.31	0.48	0.66	0.71
4.0	0.45	0.04	0.08	0.16	0.31	0.49	0.67	0.72
5.0	0.46	0.04	0.08	0.16	0.31	0.50	0.67	0.72