# الفصل الأول: مفاهيم أساسية حول الجبر الخطي وحساب المصفوفات

**تمهيد**

نهدف من خلال هذا الفصل إلى التذكير ببعض المفاهيم الأساسية التي نحتاج لها كأدوات نستعملها في تحليل المعطيات، و يمكننا أن نقسم هذه الأدوات إلى ثلاث أقسام، أولها مفاهيم إحصائية مثل المتوسطات الحسابية و التباينات و التباين المشترك و معامل الارتباط الخطي البسيط والتي نتناولها في الفرع الأول. أما الصنف الثاني فهو الفضاءات الشعاعية و حساب المسافات و الذي نتطرق له في الفرع الثاني حيث أننا نوضح بعض المفاهيم المتعلقة بإحداثيات الإسقاط العمودي، حساب المسافة بين متغيرين أو فردين و التحليل في $\Re^n$ و $\Re^p$. و في الفرع الأخير نعمل على شرح بعض المفاهيم العامة حول الجبر الخطي و حساب المصفوفات مثل القيمة الذاتية، الشعاع الذاتي، الأشعة الذاتية الوحدوية، الاستقلال الخطي، أساس الفضاء الشعاعي الجزئي و رتبة المصفوفة.

## 1. مفاهيم إحصائية

نهدف من خلال هذا المبحث إلى التذكير المفاهيم الإحصائية مثل: المتوسط الحسابي، التباين، الانحراف المعياري، التباين المشترك، معامل الارتباط الخطي البسيط..... و هذا بغرض استرجاع هذه المفاهيم و كيفية توظيفها فيما بعد، و ذلك لأنها تستعمل في طرق تحليل المعطيات.

ليكن لدينا الجدول الإحصائي التالي:

| المجموع | $n$ | ......... | $i$ | ........ | 3 | 2 | 1 | الأفراد |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_X$ | $X_n$ | ........ | $X_i$ | ......... | $X_3$ | $X_2$ | $X_1$ | المتغير $X$ |
| $n_Y$ | $Y_n$ | ........ | $Y_i$ | ......... | $Y_3$ | $Y_2$ | $Y_1$ | المتغير $Y$ |

و من خلال هذا الجدول نعمل عل دراسة الخاصيتين $X$ و $Y$ بالنسبة لـ $n$ فرد.

### 1.1. المتوسطات الحسابية

المتوسط الحسابي للمتغير $X$ :

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{n_X}{n}$$

المتوسط الحسابي للمتغير $Y$ :

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{n_Y}{n}$$

### 2.1. التباينات

التباين للمتغير $X$ :

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2$$

أما الانحراف المعياري للمتغير $X$ فهو:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

التباين للمتغير $Y$:

$$V(Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-\bar{Y}^2$$

أما الانحراف المعياري للمتغير $Y$ فهو:

$$\sigma_Y=\sqrt{V(Y)}$$

غير انه يمكننا استعمال $S$ بدل $\sigma$ و هو الأفضل، إذ انه أي $S$ يمثل مقدر غير متحيز لـ $\sigma$. حيث أن:

$$S_X=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2} \quad \text{و} \quad S_Y=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2}$$

و يعتبر التباين أو الانحراف المعياري احد مقاييس التشتت، فهو يدل على مدى تباعد أفراد السلسلة الإحصائية عن مركز سحابة النقاط أي المتوسط، فكلما اتجه التباين إلى قيمة اقل كان الأفراد أكثر قرباً من المركز و يصبح عندئذٍ المتوسط الحسابي أكثر تعبيراً عن السلسلة الإحصائية، ففي حالة كانت السلسلة المدروسة مقاس على فترة زمنية فانه يمكننا القول أن هذه السلسلة أكثر استقراراً خلال فترة الدراسة عندما يكون التباين اقل ما يمكن. غير انه في الحالة العكسية أي عندما يأخذ التباين قيم كبرى فان المتوسط لا يعبر عن السلسلة الإحصائية و في حالة الدراسات المتعلقة بالزمن يمكننا القول عن هذه السلسلة أكثر تذبذباً. كما انه لا يمكننا المقارنة بين سلسلتين إحصائيتين من خلال الاعتماد على المتوسط الحسابي فقط، بل يجب الاستعانة بالتباين أو الانحراف المعياري.

### 3.1. التباين المشترك

التباين المشترك بين المتغير $X$ و المتغير $Y$:

$$Cov(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)\left(Y_i-\bar{Y}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-\bar{X}\bar{Y}$$

إن التباين المشترك بين المتغيرين $X$ و $Y$ يعبر فقط عن نوع العلاقة بين المتغيرين و لا يعبر عن كمية العلاقة، فعلى أساس إشارة التباين المشترك بين المتغير $X$ و المتغير $Y$ يمكننا تحديد العلاقة بين $X$ و $Y$:

- إذا كان: $Cov(X,Y)=0$ فان المتغير $X$ مستقل عن المتغير $Y$ ؛
- إذا كان: $Cov(X,Y)\succ 0$ فان المتغيرين $X$ و $Y$ يرتبطان ارتباط موجب؛
- إذا كان: $Cov(X,Y)\prec 0$ فان المتغيرين $X$ و $Y$ يرتبطان ارتباط سالب.

### 4.1. معامل الارتباط الخطي البسيط

معامل الارتباط الخطي البسيط بين المتغير $X$ و المتغير $Y$:

$$r_{X,Y}=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \quad ; \quad -1\le r_{X,Y}\le 1$$

البرهان على أن: $-1 \le r_{X,Y} \le 1$

ليكن $\beta$ عدد حقيقي يكون:

$$V(\beta X+Y)=V(\beta X)+2COV(\beta X,Y)+V(Y)=\beta^2 V(X)+2\beta\ COV(X,Y)+V(Y)\ge 0$$

و العبارة أعلاه هي كثير حدود من الدرجة الثانية لـ $\beta$ ، و حتى يكون كثير الحدود هذا موجب مهما كانت قيم $\beta$ يجب أن يكون المميز $\Delta$ سالب فتكون إشارة كثير الحدود من إشارة $\beta^2$ أي موجبة، فيكون:

$$\Delta = 4COV^2(X,Y)-4V(X)\times V(Y)\le 0 \Rightarrow \frac{COV^2(X,Y)}{V(X)\times V(Y)}\le 1 \Rightarrow r_{X,Y}\le 1$$

عليه فان: $-1 \le r_{X,Y} \le 1$

و معامل الارتباط الخطي البسيط بين المتغيرين $X$ و $Y$ : $r_{X,Y}$، فيعبر عن نوع و قوة العلاقة بين المتغيرين $X$ و $Y$ حيث أن:

- إذا كان: $r_{XY}=0$ فان المتغير $X$ مستقل عن المتغير $Y$ ؛
- إذا كان: $r_{XY}\to 1$ فان المتغيرين $X$ و $Y$ يرتبطان ارتباط قوي و موجب؛
- إذا كان: $r_{XY}\to -1$ فان المتغيرين $X$ و $Y$ يرتبطان ارتباط قوي و سالب.

## 2. الفضاءات الشعاعية و حساب المسافات

ليكن $R(n,p)$ الجدول الأولي للمعطيات الذي يحتوي على $n$ فرد ممثلين في الأسطر و $p$ متغير أو خاصية ممثلة في الأعمدة، و نكتب:

$$R(n,p)=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & ....... & j & ....... & p \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ . \\ . \\ i \\ . \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & .. & \eta_{1j} & .. & \eta_{1p} \\ .. & .. & .. & .. & ... & \\ .. & .. & .. & .. & .. & \\ \eta_{i1} & \eta_{i2} & .. & \eta_{ij} & .. & \eta_{ip} \\ .. & .. & .. & .. & & .. \\ \eta_{n1} & \eta_{n2} & .. & \eta_{nj} & .. & \eta_{np} \end{pmatrix} \end{array} \qquad i=\overline{1,n} \quad ; \quad j=\overline{1,p}$$

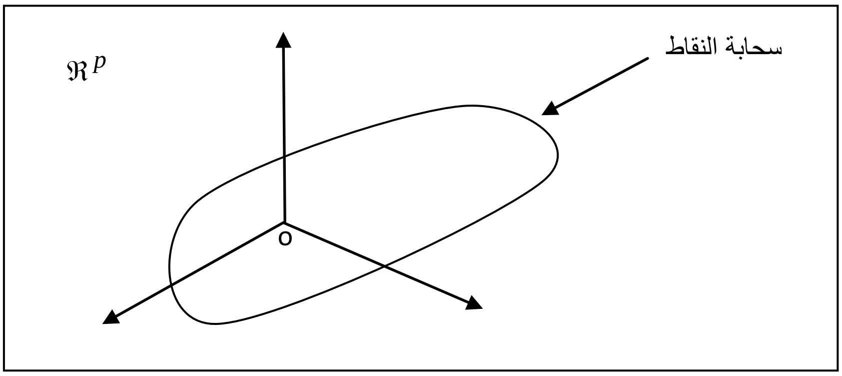
حيث أن $\eta_{ij}$ هو العنصر المولد للمصفوفة $R(n,p)$ .

### 1.2. التحليل في $\Re^p$

نعمل في هذا الفرع على دراسة و تحليل $n$ فرد ممثلين في الفضاء ذو البعد $p$ أي $\Re^p$، و عليه فإننا ننظر للأفراد كنقاط و المتغيرات كمحاور. و نسمي هذا بتحليل الأفراد في فضاء المتغيرات. فمثلاً إحداثيات

الفرد الأول في الفضاء $\Re^{p}$ هو: $\eta_1 = (\eta_{11} \quad \eta_{12} \quad ........... \quad \eta_{1j} \quad ............... \quad \eta_{1p})$ أي أن إحداثية الفرد الأول على المحور الأول هي $\eta_{11}$ و على المحور الثاني هي $\eta_{12}$ أما على المحور $j$ فهي $\eta_{1j}$. و يكون التمثيل البياني للأفراد في فضاء المتغيرات على النحو التالي:

الشكل(1): التمثيل البياني للأفراد في فضاء المتغيرات

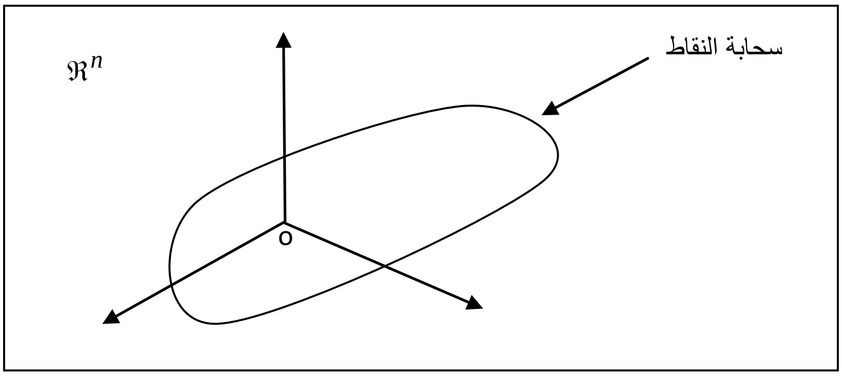



و تكون إحداثيات الفرد $i$ في الفضاء $\Re^{p}$ هو: $\eta_i = (\eta_{i1} \quad \eta_{i2} \quad ........... \quad \eta_{ij} \quad ............... \quad \eta_{ip})$

### 2.2. التحليل في $\Re^{n}$

أما في هذا الفرع فإننا نعمل على دراسة و تحليل $p$ متغير ممثلين في الفضاء ذو البعد $n$ أي $\Re^{n}$، و عليه فإننا ننظر للمتغيرات كنقاط و الأفراد كمحاور، و نسمي هذا بتحليل المتغيرات في فضاء الأفراد. فمثلاً إحداثيات المتغير الأول في الفضاء $\Re^{n}$ هو: $\eta^{1} = (\eta_{11} \quad \eta_{21} \quad ........... \quad \eta_{i1} \quad ............... \quad \eta_{n1})'$ أي أن إحداثية المتغير الأول على المحور الأول هي $\eta_{11}$ و على المحور الثاني هي $\eta_{21}$ أما على المحور $i$ فهي $\eta_{i1}$. و يكون التمثيل البياني المتغيرات في فضاء الأفراد على النحو التالي:

الشكل(2): التمثيل البياني للمتغيرات في فضاء الأفراد



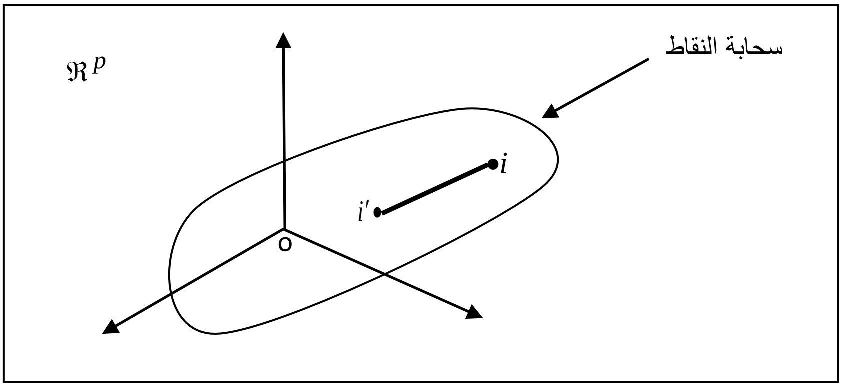

و تكون إحداثيات المتغير $j$ في الفضاء $\Re^{n}$ هو:

$$\eta^{j} = (\eta_{1j} \quad \eta_{2j} \quad ........... \quad \eta_{ij} \quad ............... \quad \eta_{nj})'$$

### 3.2. حساب المسافة بين الفردين $i$ و $i'$

بغرض حساب المسافة بين الفردين $i$ و $i'$ في الفضاء $\Re^p$:

الشكل(3): التمثيل البياني للمسافة بين الفردين $i$ و $i'$




فانه من الجدول الأولي للمعطيات $R(n,p)$ التالي:

$$R(n,p)=\begin{array}{c} \\ 1 \\ . \\ . \\ i \\ . \\ . \\ i' \\ . \\ n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \ldots\ldots & j & \ldots\ldots & p \end{array} \\ \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \cdots & \eta_{1j} & \cdot\cdot & \eta_{1p} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \\ \eta_{i1} & \eta_{i2} & . & \eta_{ij} & . & \eta_{ip} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \eta_{i'1} & \eta_{i'2} & . & \eta_{i'j} & . & \eta_{i'p} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & & \cdot\cdot \\ \eta_{n1} & \eta_{n2} & \cdot\cdot & \eta_{nj} & \cdot\cdot & \eta_{np} \end{pmatrix} \end{array} \qquad i,i'=\overline{1,n} \quad ; \quad j=\overline{1,p}$$

يمكننا استخراج إحداثيات الفردين $i$ و $i'$ في الفضاء $\Re^p$:

بالنسبة للفرد $i$: $\eta_i=(\eta_{i1} \quad \eta_{i2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \eta_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \eta_{ip})$

بالنسبة للفرد $i'$: $\eta_{i'}=(\eta_{i'1} \quad \eta_{i'2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \eta_{i'j} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \eta_{i'p})$

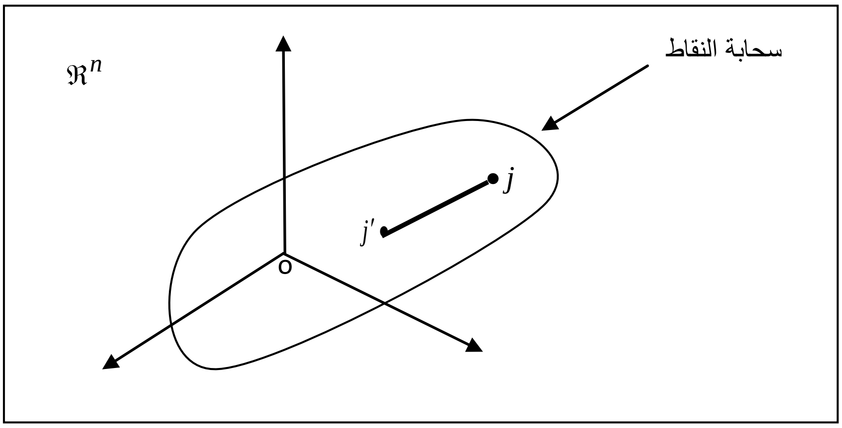
و عليه تكون المسافة بين الفردين $i$ و $i'$ :

$$\begin{aligned} d(i,i') &= \sqrt{(\eta_{i1}-\eta_{i'1})^2+(\eta_{i2}-\eta_{i'2})^2+\ldots\ldots\ldots+(\eta_{ip}-\eta_{i'p})^2} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{p}(\eta_{ij}-\eta_{i'j})^2} \end{aligned}$$

**4.2. حساب المسافة بين المتغيرين $j$ و $j'$**

بغرض حساب المسافة بين المتغيرين $j$ و $j'$ في الفضاء $\Re^n$:

الشكل(4): التمثيل البياني للمسافة بين المتغيرين $j$ و $j'$




فانه من الجدول الأولي للمعطيات $R(n,p)$ التالي:

$$R(n,p)=\begin{array}{c} \\ 1 \\ . \\ . \\ i \\ . \\ n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & ....... & j.........j' & ....... & p \end{array} \\ \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & .. & \eta_{1j}.....\eta_{1j'} & .. & \eta_{1p} \\ .. & .. & .. & .. & ... & \\ .. & .. & .. & .. & .. & \\ \eta_{i1} & \eta_{i2} & .. & \eta_{ij}......\eta_{ij'} & .. & \eta_{ip} \\ .. & .. & .. & .. & & .. \\ \eta_{n1} & \eta_{n2} & .. & \eta_{nj}.....\eta_{nj'} & .. & \eta_{np} \end{pmatrix}\end{array} \qquad i=\overline{1,n} \quad ; \quad j=\overline{1,p}$$

يمكننا استخراج إحداثيات الفردين $j$ و $j'$ في الفضاء $\Re^n$:

بالنسبة للمتغير $j$: $\eta^j=(\eta_{1j} \quad \eta_{2j} \quad ........... \quad \eta_{ij} \quad ............... \quad \eta_{nj})'$

بالنسبة للمتغير $j'$: $\eta^{j'}=(\eta_{1j'} \quad \eta_{2j'} \quad ........... \quad \eta_{ij'} \quad ............... \quad \eta_{nj'})'$

و عليه تكون المسافة بين المتغيرين $j$ و $j'$ :

$$d(j,j') = \sqrt{(\eta_{1j}-\eta_{1j'})^2+(\eta_{2j}-\eta_{2j'})^2+......................+(\eta_{nj}-\eta_{nj'})^2}$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\eta_{ij}-\eta_{ij'})^2}$$

بشرط أن تكون المتغيرات متجانسة أي لها نفس وحدة القياس.

### 5.2. الجدول المركز

ليكن لدينا الجدول الأولي للمعطيات $R(n,p)$ التالي:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ . \\ . \\ i \\ . \\ n \end{array} R(n,p)=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \ldots\ldots & j & \ldots\ldots & p \end{array} \\ \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & .. & \eta_{1j} & .. & \eta_{1p} \\ .. & .. & .. & .. & \cdots & \\ .. & .. & .. & .. & .. & \\ \eta_{i1} & \eta_{i2} & .. & \eta_{ij} & .. & \eta_{ip} \\ .. & .. & .. & .. & & .. \\ \eta_{n1} & \eta_{n2} & .. & \eta_{nj} & .. & \eta_{np} \end{pmatrix} \end{array} \qquad i=\overline{1,n} \quad ; \quad j=\overline{1,p}$$

نقوم في البداية بحساب المتوسطات الحسابية لمتغيرات الجدول أعلاه:

$$\forall j=\overline{1,p}:\ \overline{\eta_j}=\sum_{i=1}^{n}\eta_{ij}$$

فمثلاً المتوسط الحسابي للمتغير الأول هو: $$\overline{\eta_1}=\sum_{i=1}^{n}\eta_{i1}$$

و يكون إنشاء الجدول المركز $X$ بالاعتماد على الجدول الأولي $R(n,p)$ و المتوسطات الحسابية على النحو التالي:

$$X(n,p)=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & \ldots\ldots & j & \ldots\ldots & p \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ . \\ . \\ i \\ . \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} (\eta_{11}-\overline{\eta_1}) & (\eta_{12}-\overline{\eta_2}) & .. & (\eta_{1j}-\overline{\eta_j}) & .. & (\eta_{1p}-\overline{\eta_p}) \\ .. & .. & .. & .. & \cdots & \\ .. & .. & .. & .. & .. & \\ (\eta_{i1}-\overline{\eta_1}) & (\eta_{i2}-\overline{\eta_2}) & .. & (\eta_{ij}-\overline{\eta_j}) & .. & (\eta_{ip}-\overline{\eta_p}) \\ .. & .. & .. & .. & & .. \\ (\eta_{n1}-\overline{\eta_1}) & (\eta_{n2}-\overline{\eta_2}) & .. & (\eta_{nj}-\overline{\eta_j}) & .. & (\eta_{np}-\overline{\eta_p}) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$i=\overline{1,n} \quad ; \quad j=\overline{1,p}$$

و بصفة عامة:

$$X(n,p)=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \ldots\ldots & j & \ldots\ldots & p \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ . \\ . \\ i \\ . \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & .. & x_{1j} & .. & x_{1p} \\ .. & .. & .. & .. & \cdots & \\ .. & .. & .. & .. & .. & \\ x_{i1} & x_{i2} & .. & x_{ij} & .. & x_{ip} \\ .. & .. & .. & .. & & .. \\ x_{n1} & x_{n2} & .. & x_{nj} & .. & x_{np} \end{pmatrix} \end{array} \qquad ; \quad x_{ij}=\left(\eta_{ij}-\overline{\eta_j}\right)$$

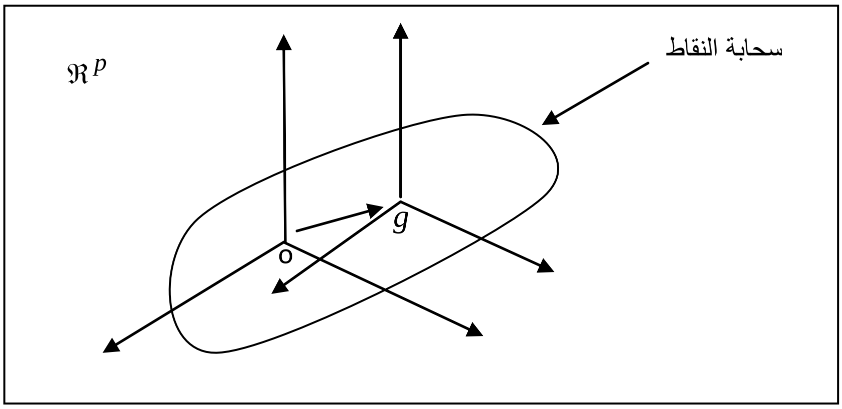
$$i=\overline{1,n} \quad ; \quad j=\overline{1,p}$$

أما بيانياً فان المتوسطات الحسابية السابقة لـ $p$ متغير تمثل إحداثيات مركز سحابة النقاط $g$.

$$g = (\overline{\eta}_1 \quad \overline{\eta}_2 \quad .......... \quad \overline{\eta}_j \quad .............. \quad \overline{\eta}_p)$$

فالقيمة $\overline{\eta}_j$ تمثل إحداثية مركز سحابة النقاط $g$ على المحور $j$.

الشكل(5): التمثيل البياني لنقل المعلم من المبدأ $o$ إلى مركز سحابة النقاط $g$




و بيانياً يمكننا تفسير العملية المتضمنة لإنشاء الجدول المركز $x$ بنقل المعلم من المبدأ $o$ إلى المعلم ذو المبدأ $g$. حيث أن $x$ يمثل إحداثيات الأفراد في المعلم ذو المبدأ $o$، فمثلاً إحداثيات الفرد $i$ في المعلم الجديد هي: $X_i = (x_{i1} \quad x_{i2} \quad .......... \quad x_{ij} \quad .............. \quad x_{ip})$

**ملاحظة:**

إن المسافات المحسوبة بين الأفراد انطلاقاً من الجدول الأولي $R(n,p)$ لا تتغير في حالة حسابها من الجدول المركز $x$. لاحظ انه في حالة حساب المسافة بين الفردين $i$ و $i'$ انطلاقاً من الجدول $x$:

$$d(i,i') = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} (x_{ij} - x_{i'j})^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} [(\eta_{ij} - \overline{\eta}_j) - (\eta_{i'j} - \overline{\eta}_j)]^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} (\eta_{ij} - \eta_{i'j})^2}$$

و هي نفسها المسافة بين الفردين $i$ و $i'$ المحسوبة انطلاقاً من الجدول $R(n,p)$.

**ملاحظة:**

في حالة البيانات المركزة فان المتوسطات الحسابية للمتغيرات معدومة:

$$\overline{X}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\eta_{ij} - \overline{\eta}_j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \eta_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{\eta}_j = \overline{\eta}_j - \frac{1}{n} \times n \times \overline{\eta}_j = 0$$

### 6.2. الجدول الممركز و المرجح

نسمي $X$ جدول ممركز و مرجح كل جدول من الشكل:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & \dots\dots & j & \dots\dots & p \end{array} \\ X_{(n,p)} = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{(\eta_{11}-\overline{\eta_1})}{\sigma_1} & \frac{(\eta_{12}-\overline{\eta_2})}{\sigma_2} & .. & \frac{(\eta_{1j}-\overline{\eta_j})}{\sigma_j} & .. & \frac{(\eta_{1p}-\overline{\eta_p})}{\sigma_p} \\ .. & .. & .. & .. & \dots & \\ .. & .. & .. & .. & .. & \\ \frac{(\eta_{i1}-\overline{\eta_1})}{\sigma_1} & \frac{(\eta_{i2}-\overline{\eta_2})}{\sigma_2} & .. & \frac{(\eta_{ij}-\overline{\eta_j})}{\sigma_j} & .. & \frac{(\eta_{ip}-\overline{\eta_p})}{\sigma_p} \\ .. & .. & .. & .. & & .. \\ \frac{(\eta_{n1}-\overline{\eta_1})}{\sigma_1} & \frac{(\eta_{n2}-\overline{\eta_2})}{\sigma_2} & .. & \frac{(\eta_{nj}-\overline{\eta_j})}{\sigma_j} & .. & \frac{(\eta_{np}-\overline{\eta_p})}{\sigma_p} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$i=\overline{1,n} \quad ; \quad j=\overline{1,p}$$

حيث أن $\sigma_j$ يمثل الانحراف المعياري للمتغير $j$

و يكون $X$ جدول ممركز و مرجح على النحو التالي:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & \dots\dots & j & \dots\dots & p \end{array} \\ X_{(n,p)} = \begin{array}{c} 1 \\ . \\ . \\ i \\ . \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & .. & x_{1j} & .. & x_{1p} \\ .. & .. & .. & .. & \dots & \\ .. & .. & .. & .. & .. & \\ x_{i1} & x_{i2} & .. & x_{ij} & .. & x_{ip} \\ .. & .. & .. & .. & & .. \\ x_{n1} & x_{n2} & .. & x_{nj} & .. & x_{np} \end{pmatrix} \end{array} \quad ; \quad x_{ij} = \frac{(\eta_{ij}-\overline{\eta_j})}{\sigma_j}$$

$$i=\overline{1,n} \quad ; \quad j=\overline{1,p}$$

في الجدول الأولي $R(n,p)$ إذا كانت المتغيرات من وحدات قياس مختلفة فانه يتعذر علينا حساب المسافة بين المتغيرات من الجدول $R(n,p)$ ، غير أن المتغيرات في الجدول $X$ تكون بدون وحدات قياس بسبب اختزالها في مراحل إنشاء الجدول $X$ ، فمثلاً إذا كانت وحدة قياس المتغير $j$ هي الدينار فان المتوسط من نفس الوحدة و كذلك الانحراف المعياري، و مع الاختزال يكون $x_{ij}$ بدون وحدة قياس. و عليه تصبح كل متغيرات الجدول $X$ بدون وحدة قياس أي أنها متجانسة، و يمكننا انطلاقاً من هذا الجدول قياس المسافة بين المتغيرات.

و بيانياً يمكننا تفسير الانتقال من الجدول الأولي $R(n,p)$ إلى الجدول المركز $X$ بنقل المعلم من المبدأ $o$ إلى المعلم ذو المبدأ $g$ ، بالإضافة إلى التعديل في تشتت أفراد سحابة النقاط على نحو معياري،

فإذا كان الانحراف المعياري لواحد من المتغيرات منخفض جداً فان التشتت يكون ضعيف و صورة سحابة النقاط تكون غير واضحة المعالم فعند القسمة على الانحراف المعياري يؤدي ذلك إلى ارتفاع قيم $x$ و توسع أفراد سحابة النقاط بشكل نموذجي يسمح بالتحليل و الدراسة.

أما في حالة إذا كان الانحراف المعياري لواحد من المتغيرات مرتفع جداً فان التشتت يكون كبير و صورة سحابة النقاط تكون غير ملائمة للتحليل و الدراسة فعند القسمة على الانحراف المعياري يؤدي ذلك إلى انخفاض قيم $x$ و تجمع أفراد سحابة النقاط بشكل نموذجي يسمح بالتحليل و الدراسة.

**ملاحظة:**

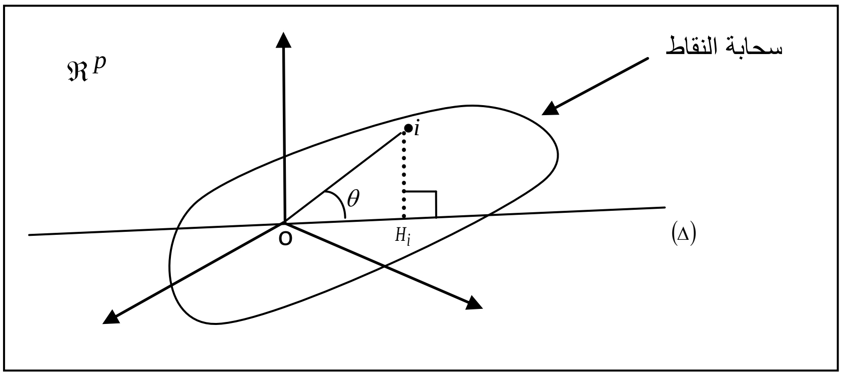
إن المسافات المحسوبة من الجدول المركز و مرجح $x$ تختلف عن المسافات المحسوبة من الجدول الأولي $R(n,p)$.

### 7.2. الإسقاط العمودي

ليكن $R(n,p)$ الجدول الأولي للبيانات، و نرغب في دراسة و تحليل $n$ فرد في الفضاء ذو البعد $p$ أي $\Re^p$. فالإسقاط العمودي للنقطة $i$ على المحور $(\Delta)$ يعطي لنا النقطة $H_i$، فإذا كانت $\theta$ هي الزاوية المحصورة بين $\vec{Oi}$ و $\overrightarrow{OH_i}$ فانه كلما كانت $\theta$ اقل ما يمكن تكون النقطة ممثلة أحسن تمثيل على المحور $(\Delta)$. و نكتب:

$$Cos\,\theta = \frac{\left\|\overrightarrow{OH_i}\right\|}{\left\|\overrightarrow{Oi}\right\|} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{OH_i}\right\| = \left\|\overrightarrow{Oi}\right\| \times Cos\,\theta$$

الشكل(6): التمثيل البياني للإسقاط العمودي




فعندما تؤول الزاوية $\theta$ إلى الصفر يؤول $Cos\,\theta$ إلى الواحد، وبالتالي تؤول المسافة على المحور $(\Delta)$ أي $OH_i$ إلى المسافة الحقيقية $Oi$ . و نكتب:

$$\lim_{\theta \to 0}\left\|\overrightarrow{OH_i}\right\| = \left\|\overrightarrow{Oi}\right\|$$

**ملاحظة:**

كما نعلم مسبقاً أن $Cos\theta$ دوماً اقل من الواحد و بالتالي فان مسافة الإسقاط على المحور دوماً اقل أو تساوي المسافة الحقيقية. و نكتب:

$$\left\|\overrightarrow{OH_i}\right\| \leq \left\|\overrightarrow{Oi}\right\|$$

### 8.2. إحداثيات الإسقاط

نهدف من خلال هذا الفرع إلى تحديد إحداثيات نقطة الإسقاط $H_i$ ، و من اجل هذا الغرض نفترض و بنفس معطيات الفرع السابق أن $U$ يمثل شعاع التوجيه للمحور $(\Delta)$ ، و على أساس أن التحليل في الفضاء $\Re^p$ فان الشعاع $U$ يملك $p$ مركبة، و نكتب:

$$U' = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots\ldots & u_j & \ldots\ldots\ldots & u_p \end{pmatrix}$$

و حتى يكون $U$ شعاع وحدة يجب أن يكون:

$$U'U = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots\ldots & u_j & \ldots\ldots\ldots & u_p \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ u_j \\ . \\ . \\ u_p \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{p} u_j^2 = 1$$

و إذا كان إسقاط النقطة $i$ على المحور $(\Delta)$ يعطينا النقطة $H_i$ ، فان البعد $OH_i$ يمثل إحداثية النقطة $i$ على المحور $(\Delta)$ و نكتب:

$$\boldsymbol{OH_i = \eta_i \times U}$$

حيث أن $\eta_i$ تمثل إحداثية الفرد $i$ في الفضاء $\Re^p$ :

$$\eta_i = \begin{pmatrix} \eta_{i1} & \eta_{i2} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \eta_{ij} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \eta_{ip} \end{pmatrix}$$

### 3. مفاهيم عامة حول الجبر الخطي و حساب المصفوفات

في هذا المبحث نعمل على شرح بعض المفاهيم العامة حول الجبر الخطي و حساب المصفوفات مثل القيمة الذاتية، الشعاع الذاتي، الأشعة الذاتية الوحدوية، الاستقلال الخطي، أساس الفضاء الشعاعي الجزئي و رتبة المصفوفة.

#### 1.3. مفهوم القيمة الذاتية

لتكن $A(p,p)$ مصفوفة مربعة حيث أن عدد الأسطر يساوي عدد الأعمدة و يساوي العدد $p$ ، نسمي $\lambda$ بالقيمة الذاتية للمصفوفة $A(p,p)$ إذا وفقط إذا كان:

$$\left|A(p,p)-\lambda I_p\right|=0$$

حيث أن $I_n$ يمثل العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجداء للمصفوفات، مثلاً:

$$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad ;\quad I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad ;\quad I_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

**ملاحظة:**

عدد القيم الذاتية للمصفوفة المربعة $A(p,p)$ هو $p$ قيمة ذاتية بما في ذلك القيم الذاتية المضاعفة.

**مثال:**

اوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A$ حيث أن: $A=\begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix}$

**حل المثال:**

$$\left|A(p,p)-\lambda I_p\right|=0\Rightarrow\left|A(2,2)-\lambda I_2\right|=0\Rightarrow\left|\begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right|=0\Rightarrow\left|\begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}2-\lambda&0\\3&1-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(2-\lambda)\times(1-\lambda)-3\times0=0\Rightarrow(2-\lambda)\times(1-\lambda)=0$$

$$\Rightarrow\lambda_1=2\ \wedge\ \lambda_2=1$$

أي أن القيم الذاتية للمصفوفة $A$ هي: $\lambda_1=2\ \wedge\ \lambda_2=1$

**ملاحظة:**

مجموع القيم الذاتية يساوي مجموع عناصر القطر الأول في المصفوفة $A$ ، و نكتب:

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha = trace(A)$$

ففي المثال السابق أن:
$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3$$

**مثال:**

اوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A$ حيث أن: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left|A(p,p) - \lambda I_n\right| = 0 \Rightarrow \left|A(2,2) - \lambda I_2\right| = 0 \Rightarrow \left|\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow \left|\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 0 & 2-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)\times(3-\lambda) - 4\times 0 = 0 \Rightarrow (3-\lambda)\times(3-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3 \ \wedge \ \lambda_2 = 3$$

أي أن القيم الذاتية للمصفوفة $A$ هي: $\lambda_1 = 3 \ \wedge \ \lambda_2 = 3$

أي أن: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ و تسمى هذه بالقيمة الذاتية المضاعفة.

### 2.3. مفهوم الشعاع الذاتي

ليكن $U_\alpha$ شعاع غير صفري، نقول عن $U_\alpha$ انه شعاع ذاتي للمصفوفة $A(p,p)$ و المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_\alpha$ إذا وفقط إذا كان:

$$\left(A_{p,p} - \lambda_\alpha I_P\right) \times U_\alpha = \underline{0}_p$$

و على أساس أن الشعاع الذاتي $U_\alpha$ موجود في الفضاء الشعاعي ذو البعد $p$ فانه يملك $p$ مركبة.

**مثال:**

اوجد الشعاع الذاتي للمصفوفة $A$ في المثال (1.3.1) و المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_1 = 2$

**حل المثال:**

ليكن $U_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix}$ الشعاع الذاتي للمصفوفة $A$ و المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_1 = 2$ يكون:

$$\left(A_{p,p}-\lambda_\alpha I_P\right)\times U_\alpha=\underline{0}_p \Rightarrow \left(A_{2,2}-\lambda_1 I_2\right)\times U_1=\underline{0}_2 \Rightarrow \left[\begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix}-2\times\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]\times\begin{pmatrix}u_{11}\\u_{12}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0&0\\3&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}u_{11}\\u_{12}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}0\times u_{11}+0\times u_{12}=0\\3\times u_{11}-1\times u_{12}=0\end{cases}\Rightarrow 3\times u_{11}-1\times u_{12}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}u_{11}\in\Re^*\\u_{12}=3\times u_{11}\end{cases}$$

و عليه يكون:

$$U_1=\begin{pmatrix}u_{11}\\u_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{11}\\3u_{11}\end{pmatrix}=u_{11}\times\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

أي أن كل الأشعة التي من الشكل $\begin{pmatrix}u_{11}\\3u_{11}\end{pmatrix}$ هي أشعة ذاتية للمصفوفة $A$ و المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_1=2$ ، فكلما نعطي قيمة لـ $u_{11}$ نحصل على شعاع ذاتي. أي أن: $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix}1/2\\3/2\end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}$ هي أشعة ذاتية للمصفوفة $A$ و المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_1=2$ .

و هذه النتيجة تعني أن الشعاع الذاتي يحدد المحور فقط، لان كل الأشعة السابقة تشترك في المنحى.

**ملاحظة:**

إذا كانت القيمة الذاتية معدومة فان الشعاع الذاتي المرافق لها هو شعاع تافه و لا يؤخذ بعين الاعتبار، أي لا يطلب تحديده.

**ملاحظة:**

تملك القيمة الذاتية المضاعفة و غير معدومة شعاعين ذاتيين مختلفين.

### 3.3. الأشعة الذاتية الوحدوية

إذا كان $U_\alpha$ شعاع ذاتي للمصفوفة $A(p,p)$ و المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_\alpha$ ، نقول عن $U_\alpha$ انه شعاع ذاتي وحدوي إذا كانت طويلة $U_\alpha$ مساوية للواحد، و نكتب:

$$\|U_\alpha\|=1\Rightarrow\sqrt{\sum_{j=1}^{p}u_{\alpha j}^2}=1$$

أما إذا كانت طويلة الشعاع غير مساوية للواحد يمكننا تعديل ذلك بقسمة مركبات الشعاع $U_\alpha$ على الطويلة و ذلك لأنه يحق لنا أن نضرب أو نقسم مركبات الشعاع الذاتي بنفس العدد، و نكتب:

$$U_\alpha = \begin{pmatrix} u_{\alpha 1}/\|U_\alpha\| \\ u_{\alpha 2}/\|U_\alpha\| \\ . \\ . \\ u_{\alpha j}/\|U_\alpha\| \\ . \\ . \\ . \\ u_{\alpha p}/\|U_\alpha\| \end{pmatrix}$$

و عليه يكون:

$$\|U_\alpha\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} \frac{u_{\alpha j}^2}{\|U_\alpha\|}} = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{p} u_{\alpha j}^2}}{\|U_\alpha\|} = 1$$

**مثال:**

في المثال $(1.3.3)$ الشعاع الذاتي للمصفوفة $A$ و المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_1 = 2$ هو $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

اوجد الشعاع الذاتي الوحدوي؟

**حل المثال:**

لدينا طويلة الشعاع الذاتي $U_1$ هي: $\|U_1\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \neq 1$

يكون الشعاع الذاتي الوحدوي هو: $U_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

### 4.3. الاستقلال الخطي

نقول عن سلسلة الأشعة $(U_1, U_2, ........., U_p)$ أنها مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كان:

$$\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + ......... + \alpha_p U_p = \underline{0}_p \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ........ = \alpha_p = 0$$

و بيانياً يمكننا تفسير الاستقلال الخطي على أساس التعامد، فإذا قلنا أن سلسلة الأشعة $(U_1, U_2, ........., U_p)$ أنها مستقلة خطياً يعني أن هذه الأشعة متعامدة مثنى مثنى.

**مثال:**

هل الشعاعان: $U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ، $U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ مستقلان خطياً؟

**حل المثال:**

لدينا:

$$\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 = \underline{0}_2 \Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 .....................(1) \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 .....................(2) \end{cases}$$

$$(1)+(2) \Rightarrow 4\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

بالتعويض في المعادلة الأولى أو الثانية ينتج أن: $\alpha_2 = 0$

و عليه يمكننا القول أن الشعاعان: $U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ، $U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ مستقلان خطياً.

**ملاحظة:**

الأشعة الذاتية لنفس المصفوفة دوماً متعامدة، أي أنها مستقلة خطياً.

### 5.3 . أساس الفضاء الشعاعي الجزئي

نقول عن الأشعة غير صفرية $(U_1, U_2, ........., U_p)$ أنها تشكل أساس للفضاء الشعاعي الجزئي $E_p$ ، إذا وفقط إذا كانت هذه الأشعة مستقلة خطياً.

**مثال:**

في المثال السابق وجدنا أن الشعاعان: $U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ، $U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ مستقلان خطياً و بالتالي يشكلان أساس أو قاعدة للفضاء الشعاعي الجزئي $E_2$ .

### 6.3. رتبة المصفوفة $Rang(A)$

لتكن $A(p,p)$ مصفوفة مربعة، نسمي العدد الأقل من الأسطر أو الأعمدة المستقلة خطياً برتبة المصفوفة $A(p,p)$ ، و نرمز له بالرمز $Rang(A)$ .

**مثال:**

اوجد رتبة المصفوفة $A(3,3)$ ، حيث أن:

$$A(3,3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**حل المثال:**

نلاحظ في المصفوفة $A(3,3)$ أن السطر الأول $(1 \quad 1 \quad 1)$ مرتبط مع السطر الثاني $(2 \quad 2 \quad 2)$ حيث انه يمكننا أن نضرب السطر الأول في العدد 2 لنحصل على السطر الثاني، أي أننا نستغني عن السطر الثاني، أما السطر الأول فهو مستقل عن السطر الثالث حيث انه لا يوجد عدد يمكننا ضربه في السطر الأول لنحصل على السطر الثالث. و على أساس هذا التحليل فان عدد الأسطر المستقلة خطياً ضمن

المصفوفة هو 2. أما باستعمال الأعمدة فإننا نلاحظ أن العمود الأول و الثاني مرتبطين خطياً أما العمود الثالث فهو مستقل عن البقية. و وعليه يمكننا القول أن رتبة المصفوفة هي 2. و نكتب: $Rang(A)=2$

**ملاحظة:**

إن رتبة المصفوفة $A(p,p)$ تساوي عدد القيم الذاتية غير معدومة، وبالتالي في توافق عدد الأشعة الذاتية غير تافهة.

**مثال:**

اوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A(3,3)$ في المثال $(1.3.7)$ ؟ ثم استنتج رتبة المصفوفة $A(3,3)$ .

**حل المثال:**

$$\left|A(3,3)-\lambda I_3\right|=0\Rightarrow\left\|\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\0&0&1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\2&2-\lambda&2\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}$$

و من اجل حساب المحددات الأعلى من 2 فإننا نختار سطر أو عمود، فإذا اخترنا السطر الأخير فان:

$$\left|A(3,3)-\lambda I_3\right|=0\Rightarrow +0\times\begin{vmatrix}1&1\\2-\lambda&2\end{vmatrix}-0\times\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\2&2\end{vmatrix}+(1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\2&2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow(1-\lambda)\times[(1-\lambda)\times(2-\lambda)-2]=0\Rightarrow\lambda\times(1-\lambda)\times(\lambda-3)=0$$

$$\Rightarrow\lambda_1=0\wedge\lambda_2=1\wedge\lambda_3=3$$

وعلى أساس ان رتبة المصفوفة $A(3,3)$ تساوي عدد القيم الذاتية غير معدومة يكون: $Rang(A)=2$