السلسلة رقم 01: التذكير ببعض المفاهيم الأساسية

التمرين01:

ليكن $R(4,3)$ الجدول الأولي للمعطيات الذي يحتوي على 4 افرد ممثلين في الأسطر و 3 متغيرات ممثلة في الأعمدة:

$$R(4,3)=\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. في الفضاء $\Re^3$ حدد إحداثيات الأفراد الأول، الثاني و الرابع؛
2. احسب المسافة بين الفردين الأول و الثاني، وبين الفردين الأول و الرابع
3. في الفضاء $\Re^4$ حدد إحداثيات المتغيرين الأول و الثاني؛
4. احسب المسافة بين المتغيرين الأول و الثاني $d(x_1,x_2)$ ؛
5. احسب المتوسطات الحسابية و الانحرافات المعيارية للمتغيرات الثلاثة السابقة، ثم اوجد:
   - a. إحداثيات مركز سحابة النقاط بالنسبة للأفراد؛
   - b. الجدول المركز X ، ماذا يمثل هذا الجدول؟
   - c. اوجد المصفوفة $V=\frac{1}{4}(X'X)$ ، عن ماذا تعبر المصفوفة V ؟
   - d. بالاعتماد على الجدول X اجب على السؤال الثاني، ماذا تلاحظ؟
   - e. الجدول المركز و المرجح Z ؛
   - f. اوجد المصفوفة $C=\frac{1}{4}(Z'Z)$ ، عن ماذا تعبر المصفوفة C ؟
6. إذا كان $U'=(0;0;2)$ شعاع في الفضاء $\Re^3$ ذو المبدأ الأصلي، و ليكن (Δ) هو المحور الحامل لهذا الشعاع، اوجد:
   - a. شعاع توجيه المحور (Δ) ؛
   - b. إحداثيات الأفراد السابقين على المحور (Δ) .
   - c. احسب المسافة بين الفردين الأول و الرابع على المحور (Δ) أي $d_\Delta(1,4)$ ، ماذا تلاحظ؟
   - d. احسب المسافة بين الفردين الأول و الثاني على المحور (Δ) أي $d_\Delta(1,2)$ ، ماذا تلاحظ؟

التمرين02:

لتكن المصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1. اوجد مجموع القيم الذاتية للمصفوفة A ؛
2. اوجد القيم الذاتية لـ A ؛
3. ما هي رتبة المصفوفة A ؛
4. اوجد الأشعة الذاتية الوحدوية للمصفوفة A ؛
5. هل هذه الأشعة تشكل أساسا؟ برر إجابتك.

التمرين03:

لتكن المصفوفة التالية:

$$X=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. احسب المصفوفة $A=(1/8)X'X$ ؛
2. احسب القيم الذاتية للمصفوفة A ؛
3. ما هي رتبة المصفوفة A ؛
4. ماذا تسمى المصفوفة A ، و ما تعليقك عن علاقة المتغيرات فيما بينها؛
5. اوجد الأشعة الذاتية الوحدوية المرافقة للقيم الذاتية $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$.

التمرين04: طريقة التحليل العاملي العام AFG

لتكن المصفوفة $X_{(8,3)}$ و التي تحتوي في الأسطر على ثمانية أفراد $(1,2,3,4,5,6,7,8)$ و 3 متغيرات (x_1, x_2, x_3) في الأعمدة، حيث أن:

$$X_{(8,3)}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

A- التحليل في R^3 :

1. احسب المتوسطات الحسابية للمتغيرات (x_1, x_2, x_3) ، ماذا تلاحظ ؟
2. اوجد المصفوفة A حيث أن: $A=X'X$
3. اوجد: $Rang(A)$ ثم استنتج أن $\lambda_3=0$ قيمة ذاتية للمصفوفة A ؛
4. احسب القيمتين الذاتيتين λ_1 ، λ_2 للمصفوفة A ؛
5. اوجد الأشعة الذاتية الوحدوية U_1 ، U_2 للمصفوفة A و المرفقتين بأكبر قيمتين ذاتيتين على التوالي: λ_1 ، λ_2 ؛
6. اوجد نسب التمثيل على المحاور، ثم استنتج نسبة التمثيل على المستوى $(\Delta_1 \otimes \Delta_2)$، ماذا تلاحظ؟
7. اوجد إحداثيات الأفراد $(1,2,3,4,5,6,7,8)$ على المحور الأول والثاني، ثم مثل بيانياً هذه النقط على المستوى $(\Delta_1 \otimes \Delta_2)$ ؛

B- التحليل في R^8:

1. بالاستعانة بعلاقات الانتقال من R^3 نحو R^8 اوجد الأشعة الذاتية V_1 ، V_2 للمصفوفة $A'=XX'$ و المرفقتين بأكبر قيمتين ذاتيتين على التوالي: λ_1 ، λ_2 ؛
2. اوجد إحداثيات المتغيرات (x_1, x_2, x_3) على المحور الأول و الثاني، ثم مثل بيانياً هذه المتغيرات على المستوى $(\Delta_1 \otimes \Delta_2)$.

تصحيح السلسلة رقم 01: التذكير ببعض المفاهيم الأساسية

التمرين01:

ليكن $R(4,3)$ الجدول الأولي للمعطيات الذي يحتوي على 4 افرد ممثلين في الأسطر و 3 متغيرات ممثلة في الأعمدة:

1. **في الفضاء $\Re^3$ إحداثيات الفردين الأول، الرابع و الرابع:**

- إحداثيات الفرد الأول هي: $(1 \quad 1 \quad 2)$

إي أن إحداثية الفرد الأول على المحور الأول هي 2، و على المحور الثاني هي 1 أما على المحور الثالث فهي 1.

- إحداثيات الفرد الثاني هي: $(-1 \quad -1 \quad -1)$

إي أن إحداثية الفرد الثاني على المحور الأول هي 1-، و على المحور الثاني هي 1- أما على المحور الثالث فهي 1-.

- إحداثيات الفرد الرابع هي: $(-1 \quad 1 \quad 2)$

إي أن إحداثية الفرد الرابع على المحور الأول هي 2، و على المحور الثاني هي 1 أما على المحور الثالث فهي 1-.

2. **حساب المسافات** $d(1,2)$ ، $d(1,4)$:

$$d(1,2) = \sqrt{\sum_{j=1}^{3}(\eta_{1j}-\eta_{4j})^2} = \sqrt{(2+1)^2+(1+1)^2+(1+1)^2} = 4.12$$

$$d(1,4) = \sqrt{\sum_{j=1}^{3}(\eta_{1j}-\eta_{4j})^2} = \sqrt{(2-2)^2+(1-1)^2+(1+1)^2} = 2$$

3. **في الفضاء $\Re^4$ إحداثيات المتغيرين الأول و الثاني:**

- إحداثيات المتغير الأول هي: $(2 \quad 1 \quad -1 \quad 2)'$ أي أن إحداثية المتغير الأول على المحور الأول هي 2 و على المحور الثاني هي 1- و على المحور الثالث هي 1 و على المحور الرابع هي 2.
- إحداثيات المتغير الثاني هي: $(1 \quad -1 \quad -1 \quad 1)'$ أي أن إحداثية المتغير الثاني على المحور الأول هي 1 و على المحور الثاني هي 1- و على المحور الثالث هي 1- و على المحور الرابع هي 1.

4. **حساب المسافة بين المتغيرين الأول و الثاني** $d(x_1,x_2)$:

$$d(x_1,x_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^{4}(\eta_{i1}-\eta_{i2})^2} = \sqrt{(2-1)^2+(-1+1)^2+(1+1)^2+(2-1)^2} = \sqrt{6} = 2.449$$

5. حساب المتوسطات الحسابية و الانحرافات المعيارية للمتغيرات الثلاثة السابقة:

- حساب المتوسطات الحسابية:

$$\bar{x}_1=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}x_i=\frac{2-1+1+2}{4}=1$$

$$\bar{x}_2=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}x_i=\frac{1-1-1+1}{4}=0$$

$$\bar{x}_3=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}x_i=\frac{1-1+1-1}{4}=0$$

- حساب الانحرافات المعيارية:

$$\sigma_1=\sqrt{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}=\sqrt{\frac{(2-1)^2+(-1-1)^2+(1-1)^2+(2-1)^2}{4}}=\sqrt{\frac{3}{2}}=1.225$$

$$\sigma_2=\sqrt{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}=\sqrt{\frac{(1-0)^2+(-1-0)^2+(-1-0)^2+(1-0)^2}{4}}=1$$

$$\sigma_3=\sqrt{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(x_{3i}-\bar{x}_3)^2}=\sqrt{\frac{(1-0)^2+(-1-0)^2+(1-0)^2+(-1-0)^2}{4}}=1$$

a. تحديد إحداثيات مركز سحابة النقاط بالنسبة للأفراد:

إن المتوسطات الحسابية للمتغيرات السابقة هي إحداثيات مركز سحابة النقاط، فيكون:

$g=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ أي أن إحداثية مركز سحابة النقاط على المحور الأول هي 1 و على المحور الثاني هي 0 و على المحور الثالث هي 0.

b. تحديد الجدول الممركز X :

$$X_{(4,3)}=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x_1 & x_2 & x_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}2-1 & 1-0 & 1-0\\ -1-1 & -1-0 & -1-0\\ 1-1 & -1-0 & 1-0\\ 2-1 & 1-0 & -1-0\end{pmatrix}\end{array}$$

$$=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x_1 & x_2 & x_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\end{array}$$

يمثل الجدول X إحداثيات الأفراد في المعلم ذو المبدأ g مركز سحابة النقاط، و هذا يعني أن إنشاء الجدول X هو سحب المعلم من المبدأ الأصلي O إلى المبدأ الجديد g مع المحافظة على الوضعية الأصلية لسحابة النقاط.

c. إيجاد المصفوفة $V=\frac{1}{4}(X'X)$:

$$V=\frac{1}{4}(X'X)=\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1.5 & 1 & 0.5\\ 1 & 1 & 0\\ 0.5 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

تعبر المصفوفة V عن مصفوفة التباين و التباين المشترك، حيث أنها مصفوفة متناظرة وتضم في القطر تباينات المتغيرات و العناصر الأخرى تمثل التباينات المشتركة فيما بين المتغيرات. نلاحظ أن $COV(x_2,x_3)=0$ و هذا يعني أن المتغيرين الثاني و الثالث مستقلين عن بعض.

$$V=\begin{pmatrix}1.5 & 1 & 0.5\\ 1 & 1 & 0\\ 0.5 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}V(x_1) & COV(x_1,x_2) & COV(x_1,x_3)\\ COV(x_2,x_1) & V(x_2) & COV(x_2,x_3)\\ COV(x_3,x_1) & COV(x_3,x_2) & V(x_3)\end{pmatrix}$$

مع العلم أن قيمة التباين المشترك تعبر عن اتجاه العلاقة بين المتغيرات و ليس عن قوة العلاقة.

d. حساب $d(1,2)$ ، $d(1,4)$ **بالاعتماد على الجدول** X :

$$d(1,2)=\sqrt{\sum_{j=1}^{3}(x_{1j}-x_{4j})^2}=\sqrt{(1+2)^2+(1+1)^2+(1+1)^2}=4.12$$

$$d(1,4)=\sqrt{\sum_{j=1}^{3}(x_{1j}-x_{4j})^2}=\sqrt{(1-1)^2+(1-1)^2+(1+1)^2}=2$$

نلاحظ أن المسافات بين الأفراد لم تتغير، و ذلك لان سحب المعلم من المبدأ الأصلي O إلى المبدأ الجديد g يكون مع المحافظة على الوضعية الأصلية لسحابة النقاط.

e. **إيجاد الجدول المركز و المرجع** Z :

$$Z_{(4,3)} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{2-1}{1.225} & \frac{1-0}{1} & \frac{1-0}{1} \\ \frac{-1-1}{1.225} & \frac{-1-0}{1} & \frac{-1-0}{1} \\ \frac{1-1}{1.225} & -1-0 & \frac{1-0}{1} \\ \frac{2-1}{1.225} & \frac{1-0}{1} & \frac{-1-0}{1} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.816 & 1 & 1 \\ -1.633 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0.816 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

f. **إيجاد المصفوفة** $C = \frac{1}{4}(Z'Z)$:

$$C = \frac{1}{4}(Z'Z) = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 0.816 & -1.633 & 0 & 0.816 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.816 & 1 & 1 \\ -1.633 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0.816 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0.816 & 0.408 \\ 0.816 & 1 & 0 \\ 0.408 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تعبر المصفوفة C عن مصفوفة الارتباطات، حيث أنها مصفوفة متناظرة وتضم في القطر ارتباطات المتغيرات مع ذاتها فهي القيمة 1 و العناصر الأخرى تمثل معاملات الارتباطات البسيطة فيما بين المتغيرات.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0.816 & 0.408 \\ 0.816 & 1 & 0 \\ 0.408 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_{x_1,x_2} & r_{x_1,x_3} \\ r_{x_2,x_1} & 1 & r_{x_2,x_3} \\ r_{x_3,x_1} & r_{x_3,x_2} & 1 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن هناك علاقة ارتباط قوي و موجب بين المتغيرين الأول و الثاني: $r_{x_1,x_2} = 0.816$.

6. إذا كان $U' = (0;0;2)$ شعاع في الفضاء $\Re^3$ ذو المبدأ الأصلي، و ليكن (Δ) هو المحور الحامل لهذا الشعاع، اوجد:

a. **شعاع توجيه المحور** (Δ) :

حتى يكون U شعاع توجيه للمحور (Δ) يجب أن يكون U شعاع وحدوي.

أولاً نقوم بحساب طويلة الشعاع U . $\|U\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = 2 \neq 1$

إذن الشعاع U ليس وحدوي، و حتى نجعل U شعاع وحدوي نقسم إحداثيات الشعاع على الطويلة، نجد:

$$U'_{unitaire} = (0;0;2) = \left(\frac{0}{2};\frac{0}{2};\frac{2}{2}\right) = (0;0;1)$$

b. إحداثيات الأفراد السابقين على المحور (Δ) :

$$OH = R \times U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

فإحداثيات الأفراد السابقين على المحور (Δ) هي:

إحداثية الفرد الأول على المحور (Δ) هي: 1

إحداثية الفرد الثاني على المحور (Δ) هي: 1-

إحداثية الفرد الثالث على المحور (Δ) هي: 1

إحداثية الفرد الرابع على المحور (Δ) هي: 1-

c. حساب المسافة بين الفردين الأول و الرابع على المحور (Δ) أي $d_\Delta(1,4)$:

$$d_\Delta(1,4) = \sqrt{(1+1)^2} = 2$$

نلاحظ أن: $d_\Delta(1,4) = d(1,4) = 2$ لما انتقلنا من فضاء أعلى درجة $\Re^3$ إلى فضاء جزئي اقل درجة $\Re$ لم يؤدي ذلك إلى فقدان جزء من المسافات، وبالتالي فان المحور (Δ) يمر على النقطتين 1 و 4 معاً.

d. حساب المسافة بين الفردين الأول و الثاني على المحور (Δ) أي $d_\Delta(1,2)$:

$$d_\Delta(1,2) = \sqrt{(1+1)^2} = 2$$

نلاحظ أن: $d_\Delta(1,2) = 2 \prec d(1,2) = 4.12$ وذلك لأنه كلما انتقلنا من فضاء أعلى درجة $\Re^3$ إلى فضاء جزئي اقل درجة $\Re$ يؤدي ذلك إلى احتمال فقدان جزء من المسافات، أي فقدان جزاء من المعلومات.

التمرين02:

1. حساب مجموع القيم الذاتية للمصفوفة A:

مجموع القيم الذاتية للمصفوفة A يساوي مجموع عناصر القطر للمصفوفة A و بالتالي نكتب:

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = Trace(A) = 4$$

2. حساب القيم الذاتية للمصفوفة A:

$$\left|A_{(p,p)} - \lambda I_p\right| = 0 \Rightarrow \left|A_{(3,3)} - \lambda I_3\right| = 0 \Rightarrow \left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\Rightarrow \left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow (2-\lambda) \times \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)\ \left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(1-\lambda-1)(1-\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda(2-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \ \wedge \ \lambda_2 = 2 \wedge \ \lambda_3 = 0$$

أي أن $\lambda = 2$ قيمة ذاتية مضاعفة.

3. تحديد رتبة المصفوفة A:

ان رتبة المصفوفة A تساوي عدد القيم الذاتية غير معدومة يكون: $Rang(A) = 2$

4. تحديد الأشعة الذاتية الوحدوية للمصفوفة A:

ليكن $U_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix}$ الشعاع الذاتي للمصفوفة A و المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_1 = 2$ يكون:

$$(A_{3,3} - \lambda_1 I_3) \times U_1 = \underline{0}_3 \Rightarrow (A - 2I_3) \times U_1 = \underline{0}_3 \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -u_{11} - u_{12} = 0 \\ -u_{11} - u_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow -u_{11} - u_{12} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{11}, u_{13} \in \Re^* \\ u_{12} = -u_{11} \end{cases}$$

و عليه يكون:

$$U_1=\begin{pmatrix}u_{11}\\u_{12}\\u_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{11}\\-u_{11}\\u_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{11}\\-u_{11}\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\u_{13}\end{pmatrix}=u_{11}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+u_{13}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\lambda=2$ قيمة ذاتية مضاعفة فهي تملك شعاعين ذاتيين:

$$U_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \quad و \quad U_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

لدينا طويلة الشعاع الذاتي U_1 هي: $\|U_1\|=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}\neq 1$

يكون الشعاع الذاتي الوحدوي هو: $U_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$

لدينا طويلة الشعاع الذاتي U_2 هي: $\|U_2\|=\sqrt{0^2+0^2+1^2}=\sqrt{1}=1$

يكون الشعاع الذاتي الوحدوي هو: $U_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

U_3 الشعاع الذاتي للمصفوفة A و المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_1=0$ يكون U_3 شعاع تافه لا يطلب تعيينه.

5. هل هذه الأشعة تشكل أساسا؟ مع التبرير الإجابة:

إن الأشعة U_1 و U_2 تشكل أساس لأنها أشعة ذاتية.

التبرير: حتى يكون الشعاعان U_1 و U_2 يشكلان أساس يجب أن يكونا مستقلين، وحتى يتحقق شرط الاستقلالية يجب أن يكون:

$$\alpha_1U_1+\alpha_2U_2=\underline{0}_2 \Rightarrow \alpha_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=0\\\alpha_2=0\end{cases}\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=0$$

و عليه يمكننا القول أن الشعاعان: U_1 و U_2 مستقلان خطياً، فهما يشكلان أساس.

التمرين03:

1. **حساب المصفوفة** $A=(1/8)X'X$:

$$A=(\frac{1}{8})X'X=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}2&2&2&2&-2&-2&-2&-2\\0&0&0&0&1&1&-1&-1\\-1&1&-1&1&0&0&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&0&-1\\2&0&1\\2&0&-1\\2&0&1\\-2&1&0\\-2&1&0\\-2&-1&0\\-2&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&0.5&0\\0&0&0.5\end{bmatrix}$$

2. **حساب القيم الذاتية للمصفوفة** A :

$$\left|A_{(p,p)}-\lambda I_p\right|=0\Rightarrow\left|A_{(3,3)}-\lambda I_3\right|=0\Rightarrow\left|\begin{pmatrix}4&0&0\\0&0.5&0\\0&0&0.5\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\Rightarrow\left|\begin{pmatrix}4-\lambda&0&0\\0&0.5-\lambda&0\\0&0&0.5-\lambda\end{pmatrix}\right|=0\Rightarrow(4-\lambda)(0.5-\lambda)(0.5-\lambda)=0$$

$$\Rightarrow\lambda_1=4\ \wedge\ \lambda_2=0.5\wedge\ \lambda_3=0.5$$

3. **رتبة المصفوفة** A : ان رتبة المصفوفة A تساوي عدد القيم الذاتية غير معدومة يكون:

$$Rang(A)=3$$

4. **تسمى المصفوفة** A **بمصفوفة التباين و التباين المشترك** و ذلك لان المتوسطات الحسابية للمتغيرات معدومة و المصفوفة تما حسابها من العلاقة $A=(\frac{1}{8})X'X$ ، و من خلال النتائج المتحصل عليها في حساب المصفوفة A نلاحظ أن كل التباينات المشتركة بين المتغيرات معدومة و هذا يدل على إن كل المتغيرات مستقلة فيما بينها مثنى مثنى.

5. **إيجاد الأشعة الذاتية الوحدوية المرافقة للقيم الذاتية** $\lambda_3,\ \lambda_2,\ \lambda_1$:

ليكن $U_1=\begin{pmatrix}u_{11}\\u_{12}\\u_{13}\end{pmatrix}$ الشعاع الذاتي للمصفوفة A و المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_1=4$ يكون:

$$(A_{3,3}-\lambda_1 I_3)\times U_1=\underline{0}_3\Rightarrow(A-4I_3)\times U_1=\underline{0}_3\Rightarrow\left[\begin{pmatrix}4&0&0\\0&0.5&0\\0&0&0.5\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\times\begin{pmatrix}u_{11}\\u_{12}\\u_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-3.5&0\\0&0&-3.5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}u_{11}\\u_{12}\\u_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-3.5u_{12}=0\\-3.5u_{13}=0\end{cases}\Rightarrow -u_{12}=u_{13}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}u_{11}\in\Re^*\\u_{12}=u_{13}=0\end{cases}$$

و عليه يكون:

$$U_1=\begin{pmatrix}u_{11}\\u_{12}\\u_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{11}\\0\\0\end{pmatrix}=u_{11}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

لدينا طويلة الشعاع الذاتي U_1 هي:

$$\|U_1\|=\sqrt{0^2+0^2+1^2}=1$$

و بالتالي U_1 شعاع ذاتي وحدوي.

ليكن $U_2=\begin{pmatrix}u_{21}\\u_{22}\\u_{23}\end{pmatrix}$ الشعاع الذاتي للمصفوفة A و المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_2=0.5$ يكون:

$$(A_{3,3}-\lambda_2 I_3)\times U_2=\underline{0}_3\Rightarrow (A-0.5I_3)\times U_2=\underline{0}_3\Rightarrow\left[\begin{pmatrix}4&0&0\\0&0.5&0\\0&0&0.5\end{pmatrix}-0.5\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\times\begin{pmatrix}u_{21}\\u_{22}\\u_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}3.5&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}u_{21}\\u_{22}\\u_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow 3.5u_{11}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}u_{22},u_{23}\in\Re^*\\u_{11}=0\end{cases}$$

و عليه يكون:

$$U_2=\begin{pmatrix}u_{21}\\u_{22}\\u_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\u_{22}\\u_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\u_{22}\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\u_{23}\end{pmatrix}=u_{22}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+u_{23}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

و على أساس أن $\lambda=0.5$ قيمة ذاتية مضاعفة فهي تملك شعاعين ذاتيين، و هما:

$U_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ و $U_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ و كلاهما شعاع ذاتي وحدوي

التمرين04: طريقة التحليل العاملي العام AFG

A- التحليل في R^3 :

1. حساب المتوسطات الحسابية للمتغيرات (x_1,x_2,x_3) :

$$\bar{x}_1=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}x_{i1}=0$$

$$\bar{x}_2=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}x_{i2}=0$$

$$\bar{x}_3=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}x_{i3}=0$$

نلاحظ أن كل المتوسطات الحسابية للمتغيرات معدومة $(\bar{x}_1=\bar{x}_2=\bar{x}_3=0)$ وهذا يعني أن مركز سحابة النقاط مطابق للمبدأ، و عليه فان الجدول الأولى للمعطيات هو جدول ممركز.

2. إيجاد المصفوفة A حيث أن: $A=X'X$

$$A=X'X=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&-1&1&-1\\1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\0&0&0&0&2&-2&2&-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\\1&-1&2\\-1&-1&-2\\1&-1&2\\-1&-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&8\\0&8&0\\8&0&16\end{pmatrix}$$

3. حساب $Rang(A)$ **ثم استنتاج أن** $\lambda=0$ **قيمة ذاتية للمصفوفة** A:

كما نعلم مسبقاً أن رتبة المصفوفة هي عدد الأسطر أو الأعمدة المستقلة خطياً، فإننا نلاحظ أنه لا يوجد عدد يمكننا ضربه في السطر الأول لنحصل على السطر الثاني و بالتالي فان السطر الأول مستقل عن السطر الثاني، غير انه يمكننا أن نحصل على السطر الثالث انطلاقاً من ضرب السطر الأول في العدد 2 و بالتالي فان السطر الأول مرتبط بالسطر الثالث، و عليه فان رتبة المصفوفة A هي 2 ، و نكتب:

$$Rang(A)=2$$

استنتاج أن $\lambda=0$ قيمة ذاتية للمصفوفة A:

و من جهة أخرى نعلم أن للمصفوفة A ثلاث قيم ذاتية كما أن رتبة المصفوفة توافق عدد القيم الذاتية غير معدومة، فإذا كانت رتبة المصفوفة A هي 2 فهذا يعني أن عدد القيم الذاتية غير معدومة هو قيمتين، و عليه فان $\lambda_3=0$ قيمة ذاتية للمصفوفة A.

1. حساب القيمتين الذاتيتين λ_1، λ_2 **للمصفوفة** A:

$$\left|A_{(p,p)}-\lambda I_p\right|=0\Rightarrow\left|A_{(3,3)}-\lambda I_3\right|=0\Rightarrow\left|\begin{pmatrix}4&0&8\\0&8&0\\8&0&16\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}4-\lambda&0&8\\0&8-\lambda&0\\8&0&16-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(4-\lambda)(8-\lambda)(16-\lambda)-64(8-\lambda)=0$$

$$\Rightarrow\lambda(8-\lambda)(\lambda-20)=0\Rightarrow\lambda_1=20\ \wedge\ \lambda_2=8\ \wedge\lambda_3=0$$

أي أن القيم الذاتية للمصفوفة A هي: $\lambda_1 = 20 \ \wedge \ \lambda_2 = 8 \ \wedge \lambda_3 = 0$

2. إيجاد الأشعة الذاتية الوحدوية U_1، U_2 للمصفوفة A و المرفقتين بأكبر قيمتين ذاتيتين على التوالي: λ_1، λ_2:

ليكن $U_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix}$ الشعاع الذاتي للمصفوفة A و المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_1 = 20$ يكون:

$$(A_{3,3} - \lambda_1 I_3)\times U_1 = \underline{0}_3 \Rightarrow (A - 20I_3)\times U_1 = \underline{0}_3 \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 16 \end{pmatrix} - 20\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\times\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -16 & 0 & 8 \\ 0 & -12 & 0 \\ 8 & 0 & -4 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -16u_{11} + 8u_{13} = 0 \\ -12u_{12} = 0 \\ 8u_{11} - 4u_{13} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{13} = 2u_{11} \\ u_{12} = 0 \\ u_{11} \in \Re^* \end{cases}$$

و عليه يكون:

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} \\ 0 \\ 2u_{11} \end{pmatrix} = u_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

لدينا طويلة الشعاع الذاتي U_1 هي: $\|U_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = 2.236$

و بالتالي الشعاع الذاتي U_1 الوحدوي هو:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2.236} \\ 0 \\ \frac{2}{2.236} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.447 \\ 0 \\ 0.894 \end{pmatrix}$$

ليكن $U_2 = \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{pmatrix}$ الشعاع الذاتي للمصفوفة A و المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_1 = 8$ يكون:

$$(A_{3,3} - \lambda_2 I_3)\times U_2 = \underline{0}_3 \Rightarrow (A - 8I_3)\times U_2 = \underline{0}_3 \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 16 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\times\begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4u_{21} + 8u_{23} = 0 \\ 8u_{21} - 8u_{23} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{21} = u_{23} = 0 \\ u_{22} \in \Re^* \end{cases}$$

و عليه يكون:

$$U_2=\begin{pmatrix}u_{21}\\u_{22}\\u_{23}\end{pmatrix}=u_{22}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

لدينا طويلة الشعاع الذاتي U_2 هي:

$$\|U_2\|=\sqrt{0^2+1^2+0^2}=1$$

و بالتالي U_2 الشعاع الذاتي الوحدوي هو:

$$U_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

3. إيجاد نسب التمثيل على المحاور:

لدينا: الكثافة الكلية للبيانات هي:

$$It=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=28$$

فنسبة التمثيل على المحور الأول هي:

$$\tau_1=\frac{\lambda_1}{It}=\frac{20}{28}=71.43\%$$

أي أن 71.43% من بيانات المصفوفة X ممثلة على المحور (Δ_1).

فنسبة التمثيل على المحور الثاني هي:

$$\tau_2=\frac{\lambda_2}{It}=\frac{8}{28}=28.57\%$$

أي أن 28.57% من بيانات المصفوفة X ممثلة على المحور (Δ_2).

فنسبة التمثيل على المحور الثالث هي:

$$\tau_2=\frac{\lambda_2}{It}=\frac{0}{28}=0\%$$

أي أن 0% من بيانات المصفوفة X ممثلة على المحور (Δ_3).

و الجدول التالي يلخص نسب التمثيل على المحاور:

رقم المحور	القيمة الذاتية	نسبة التمثيل على المحاور	النسبة التجميعية
1	20	%71.43	%71.43
2	8	%28.57	100%
3	0	%0	100%
المجموع	28	100%	/

استنتاج نسبة تمثيل البيانات على المستوى الأول $(\Delta_1\otimes\Delta_2)$:

نسبة التمثيل على المستوي الأول $(\Delta_1\otimes\Delta_2)$ هي:

$$\tau(\Delta_1\otimes\Delta_2)=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{It}=\frac{20+8}{28}=100\%$$

أي أن 100% من بيانات المصفوفة X ممثلة على المستوي الأول $(\Delta_1 \otimes \Delta_2)$.

نلاحظ انه عند الانتقال من $\Re^3$ إلى $\Re^2$ لا نفقد أي معلومات، و هذا يعني انه في الأصل بيانات المصفوفة X موجودة على المستوي و هذا ما تؤكده النتيجة السابقة أن رتبة المصفوفة هي 2.

4. حساب إحداثيات الأفراد $(1,2,3,4,5,6,7,8)$ على المحور الأول والثاني:

حساب إحداثيات الأفراد على المحور الأول:

$$F_1 = XU_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.447 \\ 0 \\ 0.894 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2.236 \\ -2.236 \\ 2.236 \\ -2.236 \end{pmatrix}$$

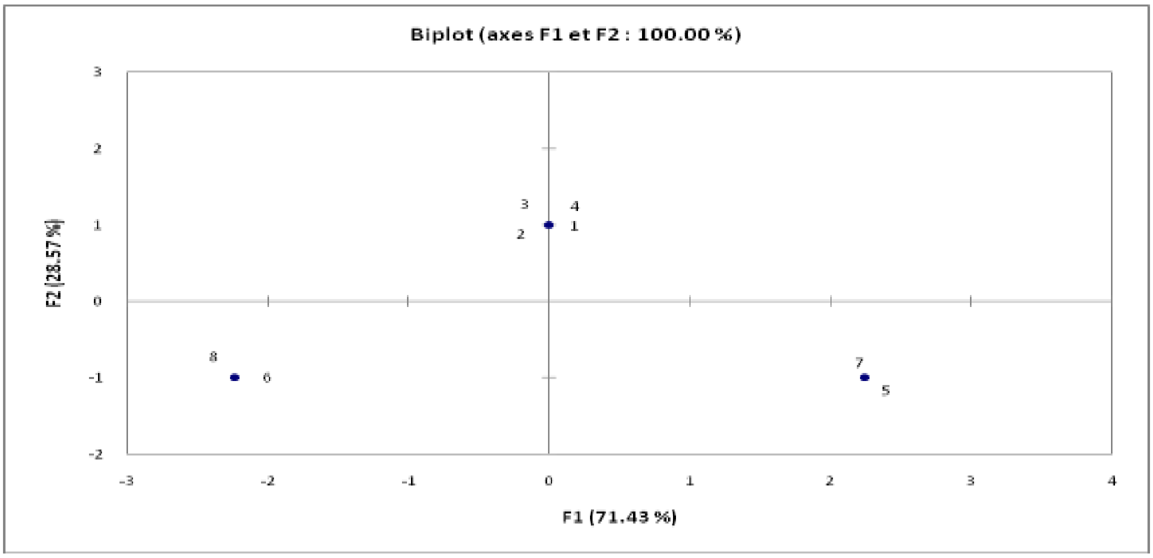
حساب إحداثيات الأفراد على المحور الثاني:

$$F_2 = XU_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

و الجدول التالي يلخص إحداثيات الأفراد على المحورين الأول والثاني:

الأفراد	F1	F2
1	0.0000	1.0000
2	0.0000	1.0000
3	0.0000	1.0000
4	0.0000	1.0000
5	2.2361	-1.0000
6	-2.2361	-1.0000
7	2.2361	-1.0000
8	-2.2361	-1.0000

التمثيل البياني الأفراد على المستوى $(\Delta_1 \otimes \Delta_2)$:



B- التحليل في R^8:

1. بالاستعانة بعلاقات الانتقال من R^3 نحو R^8 اوجد الأشعة الذاتية V_1، V_2 للمصفوفة $A' = XX'$ و المرفقتين بأكبر قيمتين ذاتيتين على التوالي: λ_1، λ_2:

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} F_1 = \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2.236 \\ -2.236 \\ 2.236 \\ -2.236 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} \quad ; \quad V_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} F_2 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.354 \\ 0.354 \\ 0.354 \\ 0.354 \\ -0.354 \\ -0.354 \\ -0.354 \\ -0.354 \end{pmatrix}$$

2. حساب إحداثيات المتغيرات (x_1, x_2, x_3) على المحور الأول و الثاني:

حساب إحداثيات المتغيرات على المحور الأول:

$$G_1 = \sqrt{\lambda_1}\; U_1 = \sqrt{20} \times \begin{pmatrix} 0.447 \\ 0 \\ 0.894 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

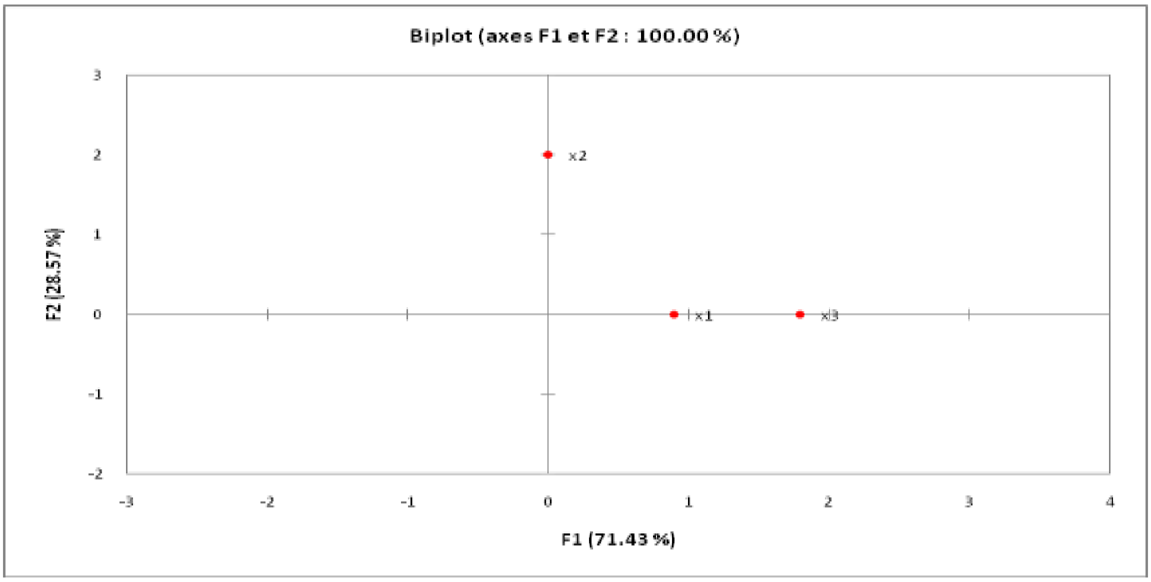
حساب إحداثيات المتغيرات على المحور الثاني:

$$G_2 = \sqrt{\lambda_2}\; U_2 = \sqrt{8} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.83 \\ 0 \end{pmatrix}$$

و الجدول التالي يلخص إحداثيات الأفراد على المحورين الأول والثاني:

المتغيرات	G1	G2
x1	2.00	0.00
x2	0.00	2.83
x3	4.00	0.00

التمثيل البياني للمتغيرات على المستوى $(\Delta_1 \otimes \Delta_2)$:



السلسلة رقم 02: طريقة التحليل بالمركبات الأساسية Analyse en Composante Principale (ACP)

التمرين01:

علامات 6 طلاب في ثلاثة مقاييس موضحة في الجدول

مقياس العلوم	مقياس الرياضيات	مقياس اللغة الفرنسية	المقياس الطالب
11	6	10	1
7	10	8	2
9	7	9	3
6	8	14	4
10	11	11	5
12	8	10	6

1. هل يمكن تحليل الجدول السابق باستعمال طريقة التحليل بالمركبات الأساسية البسيطة (ACP - Non Normés)؟ برر إجابتك؛
2. باستعمال هذه الطريقة حلل الجدول المقترح؛
3. تحصل الطالب 7 على علامة 12 في مقياس اللغة الفرنسية، 8 في مقياس الرياضيات و 16 في مقياس العلوم، اوجد إحداثيات الطالب 7 على المستوى المقترح.

ملاحظة: $\lambda_1 = 5.5$ و $\lambda_2 = 3.29$ قيم ذاتية لمصفوفة التباين والتباين المشترك V.

التمرين02:

في إطار دراسة و تحليل محددات حصة الفرد من الناتج الحقيقي في الجزائر خلال الفترة من 2001 إلى غاية 2012، نعتمد على نموذج سولوا (Solow) للنمو الاقتصادي حيث يعتبر أن لوغاريتم حصة الفرد من رأس المال المادي $\log k$ و لوغاريتم حصة الفرد من رأس المال البشري $\log h$ هي المحددات الأساسية للوغاريتم حصة الفرد من الناتج الحقيقي $\log pibh$ ، و نكتب:

السنوات	Log pibh	Log k	Log h
2001	7.82125723	3.12850289	1.730539401
2002	8.00395922	3.20158369	1.725889685
2003	7.95425562	3.18170225	1.721239968
2004	7.94702199	3.1788088	1.716590251
2005	8.0801115	3.10773519	1.711994501
2006	8.1709418	3.14266992	1.74873589
2007	8.50332532	3.27050974	1.78547728
2008	8.77572489	3.3752788	1.82221867
2009	9.47385211	3.64378927	1.858960059
2010	9.33752206	3.59135464	1.899117988
2011	8.99619762	3.46007601	1.936846876
2012	8.96347662	3.44749101	1.974575764

و عن مصدر البيانات فان k و pibh أخذت من قاعدة البيانات للبنك العالمي 2017، أما h فهي تمثل متوسط عدد سنوات الدراسة للأفراد 15 سنة فما فوق وتما جلب هذه المتغيرة من قاعدة البيانات لبارو و لي.

1. هل يمكن تطبيق طريقة التحليل بالمركبات الأساسية البسيطة (ACP - Non Normés) لتحليل الجدول السابق؟ برر إجابتك؛

2. إن تطبيق طريقة التحليل (ACP - Normés) على الجدول السابق أعطى النتائج المسجلة في الصفحة الموالية، حلل النتائج السابقة موضحاً طريقة استخراج هذه الجداول.

Test de sphéricité de Bartlett :

Khi² (Valeur observée)	39.9344
Khi² (Valeur critique)	7.8147
DDL	3
p-value	< 0.0001
alpha	0.05

Mesure de précision de l'échantillonnage de Kaiser-Meyer-Olkin :

Log pibh	0.6375
Log k	0.6656
Log h	0.9164
KMO	0.7134

Variables	Log pibh	Log k	Log h
Log pibh	**1**	**0.9747**	**0.8621**
Log k	**0.9747**	**1**	**0.8392**
Log h	**0.8621**	**0.8392**	**1**

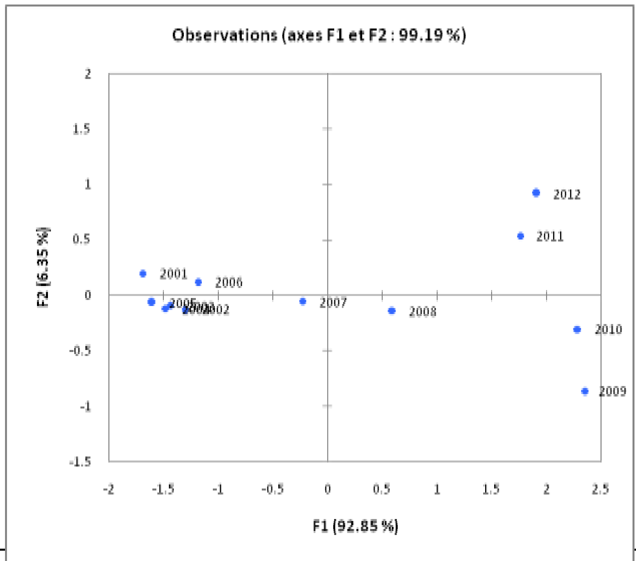
Variable	Moyenne	Ecart-type
Log pibh	8.5023	0.5863
Log k	3.3108	0.1871
Log h	1.8027	0.0939

Valeurs propres :

	F1	F2	F3
Valeur propre	2.7854	0.1905	0.0242
Variabilité (%)	92.8457	6.3485	0.8058

Vecteurs propres :

	F1	F2	F3
Log pibh	0.5887	-0.3367	0.7349
Log k	0.5841	-0.4513	-0.6747



Coordonnées des observations :

Observation	F1	F2	F3
2001	-1.6822	0.1958	-0.1432
2002	-1.2983	-0.1263	-0.1743
2003	-1.4380	-0.0908	-0.1615
2004	-1.4819	-0.1205	-0.1567
2005	-1.5975	-0.0660	0.2697
2006	-1.1786	0.1210	0.2306
2007	-0.2271	-0.0549	0.1592
2008	0.5921	-0.1406	0.0958
2009	2.3499	-0.8658	-0.0244
2010	2.2884	-0.3075	-0.0358
2011	1.7604	0.5372	-0.0179
2012	1.9128	0.9184	-0.0413

Contributions des observations (%) :

	F1	F2	F3
2001	9.2360	1.8297	7.7158
2002	5.5015	0.7617	11.4309
2003	6.7486	0.3931	9.8126
2004	7.1676	0.6936	9.2397
2005	8.3294	0.2078	27.3589
2006	4.5336	0.6987	19.9938
2007	0.1684	0.1436	9.5293
2008	1.1442	0.9436	3.4513
2009	18.0230	35.7778	0.2243
2010	17.0912	4.5147	0.4808
2011	10.1146	13.7742	0.1209
2012	11.9419	40.2614	0.6418

Cosinus carrés des observations :

	F1	F2	F3
2001	**0.9796**	0.0133	0.0071
2002	**0.9732**	0.0092	0.0175
2003	**0.9837**	0.0039	0.0124
2004	**0.9825**	0.0065	0.0110
2005	**0.9707**	0.0017	0.0277
2006	**0.9535**	0.0100	0.0365
2007	**0.6453**	0.0376	0.3170
2008	**0.9237**	0.0521	0.0242
2009	**0.8804**	0.1195	0.0001
2010	**0.9820**	0.0177	0.0002
2011	**0.9147**	0.0852	0.0001
2012	**0.8124**	0.1873	0.0004

Contributions des variables (%) :

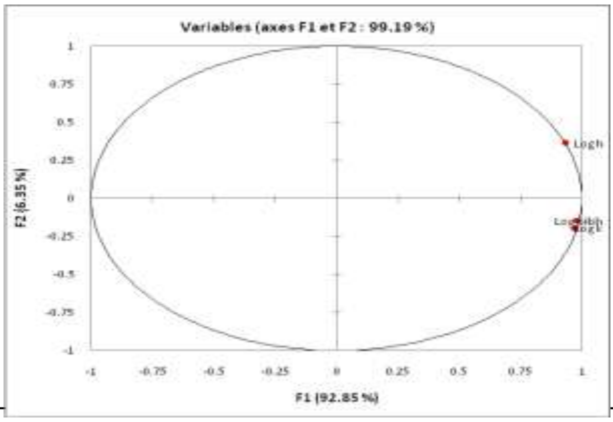
	G1	G2	G3
Log pibh	34.6580	11.3357	54.0062
Log k	34.1141	20.3689	45.5170
Log h	31.2279	68.2953	0.4768

Coordonnées des variables :

	G1	G2	G3
Log pibh	0.9825	-0.1469	0.1143
Log k	0.9748	-0.1970	-0.1049
Log h	0.9326	0.3607	-0.0107

Cosinus carrés des variables :

	G1	G2	G3
Log pibh	**0.9654**	0.0216	0.0131
Log k	**0.9502**	0.0388	0.0110
Log h	**0.8698**	0.1301	0.0001



التمرين03:

في إطار دراسة أداء ثمانية عدائين $(8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1)$ نهتم بالمتغيرات الثلاثة التالية: الطول مقاس بالسنتمتر، الوزن مقاس بالكيلوغرام و السعة الرئوية للتنفس باللتر. فإذا كان $R_{8,3}$ يمثل الجدول الأولي للبيانات الذي يحتوي على ثمانية اسطر و هم الأفراد السابقين وثلاثة أعمدة نرمز لها ب $\eta_3,\ \eta_2,\ \eta_1$ وهم المتغيرات السابقة الذكر على التوالي.

إن تحليل الجدول $R_{8,3}$ بطريقة التحليل بالمركبات الأساسية المرجحة (ACP- Normé) أعطي النتائج التالية:

أ-/ المتوسطات الحسابية و الانحرافات المعيارية للمتغيرات:

المتغير	الطول بالسنتمتر η_1	الوزن بالكيلوغرام η_2	السعة الرئوية للتنفس باللتر η_3
المتوسط الحسابي	0170.000	165.000	03.001
الانحراف المعياري	684610.	9.0873	0.5456

ب-/ $U_1' = (-0.6763;0.2561;0.6907)$ و $U_2' = (0.2411;0.9629;-0.1209)$ هما الشعاعان الذاتيان لمصفوفة الارتباطات و المرفقتين بأكبر قيمتين ذاتيتين $\lambda_1 = 2.0678$ و $\lambda_2 = 0.9322$ على التوالي.

ج-/ الجدول التالي يوضح المركبات الأساسية و نسب تمثيل الأفراد على المحاور:

1. احسب القيمة الذاتية الثالثة λ_3 ، أعطي تفسير لهذا المحور؟
2. نرغب في هذا الفرع إلى إعادة تشكيل العناصر الأصلية لمصفوفة الارتباطات C :

1.2. اوجد جدول معاملات ارتباط المتغيرات مع المركبتين الأساسيتين الأولى و الثانية، ثم مثل هذا الجدول على دائرة الارتباطات. قدم تعليقاً على هذا التمثيل البياني موضحاً العلاقة بين المتغيرات فيما بينها ثم طبيعة العلاقة بين المتغيرات و المركبات الأساسية.

2.2. إذا كنا نعلم أن كل المتغيرات تقع على سطح كرة مركزها المبدأ و نصف قطرها الواحد، قدم لنا العلاقة التي تمكننا من حساب المسافة الحقيقية بين المتغيرين j و j' في الفضاء.

الأفراد	$F_1(i)$	$F_2(i)$	$F_3(i)$	$Cos^2(\theta_1)$	$Cos^2(\theta_2)$	$Cos^2(\theta_3)$
1	-0.6632	1.0237		0.2956		
2		-0.2932		0.9853		
3	1.3302	1.3773		0.4826		
4	-1.3302	-1.3773		0.4826		
5	-2.4028	0.2932		0.9853		
6	0.5370	-0.8354		0.2924		
7	-0.5370			0.2923		
8	0.6632	-1.0238		0.2956		

3.2. استنتج الآن معاملات الارتباط الخطي البسيط بين المتغيرات السابقة، ثم اكتب مصفوفة الارتباطات.

3. أكمل الجدول المذكور في الفرع "ج" مع التبرير.

1.3. مثل بيانياً الأفراد على المستوى الأول $(F_1 \otimes F_2)$، معلم متعامد وتجانس.

2.3. ما هي نسبة التمثيل على المستوي الأول؟ اشرح هذه النسبة.

3.3. ماذا يمثل مبدأ المحاور $F_2, \ F_1$ بالنسبة لسحابة النقط؟ برر إجابتك.

4. من خلال الربط بين التمثيل البياني للأفراد و المتغيرات أكمل ما يا لي مع التبرير:

- من بين كل الأفراد، الفرد الذي يملك طول اكبر و اقل سعة رئوية للتنفس هو: ....
- من بين كل الأفراد، الفرد الذي يملك طول اقل و اكبر سعة رئوية للتنفس هو: ....
- من بين كل الأفراد، الفردين اللذين يملكن اكبر وزن هما: ....

5. إذا علمت أن الفرد الإضافي (9) يملك المواصفات التالية: الوزن 74.0874 كلغ، الطول 180.6846 سم و السعة الرئوية للتنفس هي 3.5466 ل

حدد إحداثيات هذا الفرد على المستوي الأول $(F_1 \otimes F_2)$.

6. نرغب في هذا الفرع إلى إعادة تشكيل قيم الجدول الأولي للبيانات R:

1.6. بالاستعانة بعبارات الانتقال برهن أن عبارة إعادة تشكيل الجدول X (X جدول ممركز ومرجح) هي:

$$X = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} F_\alpha G'_\alpha$$

2.6. أوجد قيم الجدول X.

3.6 استنتج قيم الجدول R للمعطيات الأولية.

<u>التمرين04:</u>

الجدول التالي يوضح قيم المتغيرين X_1، X_2 لعشرة أفراد(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10):

الفرد / المتغير	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_1	-0.38	-0.98	-1.38	-1.18	-0.88	0.72	1.12	1.52	-0.38	1.82
X_2	-0.94	0.26	-0.44	-0.84	1.56	-1.64	1.06	0.26	2.56	-1.84

حيث أن: $Var(X_1)=1.27$ ، $Var(X_2)=1.81$ و $Cov(X_1, X_2)=-0.36$

1. مثل بيانياً الأفراد من 1 إلى 10 في المعلم المتعامد و المتجانس $\overline{i=1.10}$ $(X_1(i)\otimes X_2(i))$
2. لتكن المركبة الخطية التالية: $F_1=\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2$ حيث أن: $\alpha_1^2+\alpha_2^2=1$.

1.2. إذا علمت أن F_1 ذات تباين أعظمي $V(F_1)$ $Maximale$ ، حدد قيم F_1 بالنسبة للأفراد السابقين، ثم مثل هذه المركبة في المستوي السابق؛

2.2. استنتج المتوسط الحسابي و تباين المركبة F_1؛

3. لتكن المركبة الخطية التالية: $F_2=\beta_1 X_1+\beta_2 X_2$ حيث أن: $\beta_1^2+\beta_2^2=1$ و $F_2\perp F_1$.

1.3. إذا علمت أن F_2 ذات تباين أعظمي $V(F_2)$ $Maximale$ ، حدد قيم F_2 بالنسبة للأفراد السابقين، ثم مثل هذه المركبة في المستوي السابق؛

2.3. استنتج المتوسط الحسابي و تباين المركبة F_2؛

4. نفترض فيما يلي أن الأفراد:6، 7، 8، 9 و 10 هم ذو جنس ذكر و البقية إناث، في المستوي السابق حدد المركبة التي يمكنها الفصل بين الجنسين.

تصحيح السلسلة رقم 02: طريقة التحليل بالمركبات الأساسية

Analyse en Composante Principale (ACP)

التمرين01:

4. هل يمكن تحليل الجدول السابق باستعمال طريقة التحليل بالمركبات الأساسية البسيطة (ACP - Non Normés)؟ برر إجابتك؛

في الجدول السابق كل المتغيرات لها نفس وحدات القياس فهي متجانسة و بالتالي يمكننا تحليل الجدول السابق بطريقة التحليل بالمركبات الأساسية البسيطة (ACP – Non normé) .

5. باستعمال هذه الطريقة حلل الجدول المقترح؛

إن تطبيق طريقة التحليل بالمركبات الأساسية البسيطة (ACP – Non normé) يتضمن الخطوات التالية:

الخطوة (1) : حساب المتوسطات الحسابية للمتغيرات

$$\overline{\eta}_1 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\eta_{i1} = \frac{10+8+9+14+11+10}{6} = 10.33$$

$$\overline{\eta}_2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\eta_{i2} = \frac{6+10+7+8+11+8}{6} = 8.33$$

$$\overline{\eta}_3 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\eta_{i3} = \frac{11+7+9+6+10+12}{6} = 9.17$$

المتغيرات	η_1	η_2	η_3
المتوسطات الحسابية	10.33	8.33	9.17

و عليه فان إحداثيات مركز سحابة النقاط هي: $g(10.33;8.33;9.17)$

الخطوة (2) : حساب مصفوفة التباين و التباين المشترك

في البداية نستخرج المصفوفة المركزة X على النحو التالي:

$$X_{(6,3)} = \begin{pmatrix} \eta_{11}-\overline{\eta}_1 & \eta_{12}-\overline{\eta}_2 & \eta_{13}-\overline{\eta}_3 \\ \eta_{21}-\overline{\eta}_1 & \eta_{22}-\overline{\eta}_2 & \eta_{23}-\overline{\eta}_3 \\ \eta_{31}-\overline{\eta}_1 & \eta_{32}-\overline{\eta}_2 & \eta_{33}-\overline{\eta}_3 \\ \eta_{41}-\overline{\eta}_1 & \eta_{42}-\overline{\eta}_2 & \eta_{43}-\overline{\eta}_3 \\ \eta_{51}-\overline{\eta}_1 & \eta_{52}-\overline{\eta}_2 & \eta_{53}-\overline{\eta}_3 \\ \eta_{61}-\overline{\eta}_1 & \eta_{62}-\overline{\eta}_2 & \eta_{63}-\overline{\eta}_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10-10.33 & 06-8.33 & 11-9.17 \\ 08-10.33 & 10-8.33 & 07-9.17 \\ 09-10.33 & 07-8.33 & 09-9.17 \\ 14-10.33 & 08-8.33 & 06-9.17 \\ 11-10.33 & 11-8.33 & 10-9.17 \\ 10-10.33 & 08-8.33 & 12-9.17 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.33 & -2.33 & 1.83 \\ -2.33 & 1.67 & -2.17 \\ -1.33 & -1.33 & -0.17 \\ 3.67 & -0.33 & -3.17 \\ 0.67 & 2.67 & 0.83 \\ -0.33 & -0.33 & 2.83 \end{pmatrix}$$

إن المصفوفة أعلاه تعبر عن إحداثيات الأفراد في المعلم ذو المبدأ مركز سحابة النقاط.

حساب مصفوفة التباين و التباين المشترك:
$$V=\frac{X'X}{n}=\begin{pmatrix}3.56 & -0.11 & -1.22\\ -0.11 & 2.89 & -0.89\\ -1.22 & -0.89 & 4.47\end{pmatrix}$$

من مصفوفة التباين و التباين المشترك يمكننا أن نستنتج أن تباين المتغير الاول هو 3.56 أما تباين المتغير الثاني فهو 2.89 و بالنسبة للمتغير الثالث هو 4.47. أما التباينات المشتركة بين المتغيرات فهي 0.11- بين المتغير الأول و الثاني أما بين الأول و الثالث فهو 1.22- و بين الثاني و الثالث فهو 0.89-. و هذا يدل على أن كل المتغيرات لها علاقة عكسية فيما بينها.

الخطوة (3) : حساب القيم الذاتية

نقوم بحساب القيم الذاتية من مصفوفة التباين و التباين المشترك من العلاقة التالية:
$$|V-\lambda I_3|=0\Rightarrow\left|\begin{pmatrix}3.56 & -0.11 & -1.22\\ -0.11 & 2.89 & -0.89\\ -1.22 & -0.89 & 4.47\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right|=0$$
$$\Rightarrow\begin{vmatrix}3.56-\lambda & -0.11 & -1.22\\ -0.11 & 2.89-\lambda & -0.89\\ -1.22 & -0.89 & 4.47-\lambda\end{vmatrix}=0$$

لدينا: $\lambda_1=5.5$ و $\lambda_2=3.29$

كما أن: $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=Trace(V)=10.92\Rightarrow\lambda_3=2.13$

الخطوة(4) : حساب نسب التمثيل على المحاور

الجدول التالي يلخص نسب التمثيل على المحاور:

رقم المحور	القيمة الذاتية	نسبة التمثيل على المحاور	النسبة التجميعية
1	5.5	50.37%	50.37%
2	3.29	30.11%	80.48%
3	2.13	19.52%	100%
المجموع	10.92	100%	/

أي أن 50.37% من بيانات الجدول الأولي للمعطيات $R(6,3)$ ممثلة على المحور (Δ_1). و 30.11% من بيانات الجدول الأولي للمعطيات $R(6,3)$ ممثلة على المحور (Δ_2). ومنه 80.48% من بيانات الجدول الأولي للمعطيات $R(6,3)$ ممثلة على المستوي الأول $(\Delta_1\otimes\Delta_2)$. و هي نسبة مقبولة للتمثيل و الدراسة.

الخطوة (5) : إيجاد الأشعة الذاتية الوحدوية

نعمل على إيجاد الأشعة الذاتية المرافقة للقيم الذاتية من العلاقة:

$$\left(V_{(3,3)}-\lambda_\alpha I_3\right)\times U_\alpha=\underline{0}_3$$

الشعاع الذاتي الأول لما: $\lambda_1=5.5$

$$\left(V-\lambda_1 I_3\right)=0_3\Rightarrow\begin{pmatrix}-1.94 & -0.11 & -1.22\\ -0.11 & -2.61 & -0.89\\ -1.22 & -0.89 & -1.03\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}u_{11}\\ u_{12}\\ u_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}1.94u_{11}+0.11u_{12}+1.22u_{13}=0............(1)\\ 0.11u_{11}+2.61u_{12}+0.89u_{13}=0............(2)\\ 1.22u_{11}+0.89u_{12}+1.03u_{13}=0............(3)\end{cases}$$

$$(1)\times 0.11\Rightarrow 0.2134u_{11}+0.0121u_{12}+0.1342u_{13}=0...........(4)$$
$$(2)\times 1.94\Rightarrow 0.2134u_{11}+5.0634u_{12}+1.7266u_{13}=0...........(5)$$
$$(4)-(5)\Rightarrow u_{12}=-0.315u_{13}..(6)$$

نعوض النتيجة (6) في المعادلة (1) نجد أن: $u_{11}=-0.611u_{13}$

نعوض هذه النتائج في الشعاع الذاتي الأول نجد أن:

$$U_1=\begin{pmatrix}u_{11}\\ u_{12}\\ u_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.611u_{13}\\ -0.315u_{13}\\ u_{13}\end{pmatrix}=u_{13}\begin{pmatrix}-0.611\\ -0.315\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow U_1=\begin{pmatrix}-0.611\\ -0.315\\ 1\end{pmatrix}$$

ولدينا طويلة الشعاع الذاتي U_1 هي: $\|U_1\|=\sqrt{(-0.611)^2+(-0.611)^2+1}=1.213\neq 1$

يكون شعاع وحدوي:

$$U_1=\begin{pmatrix}\frac{-0.611}{1.213}\\ \frac{-0.315}{1.231}\\ \frac{1}{1.21}\end{pmatrix}$$

ومنه: $U_1=\begin{pmatrix}-0.504\\ -0.259\\ 0.824\end{pmatrix}$ شعاع ذاتي وحدوي

و بنفس الطريقة نجد أن:

الشعاع الذاتي الثاني لما: $\lambda_2=3.29$ يكون: $U_2=\begin{pmatrix}0.702\\ -0.678\\ 0.216\end{pmatrix}$ شعاع وحدوي

الشعاع الذاتي الثالث لما: $\lambda_3=2.13$ يكون: $U_3=\begin{pmatrix}0.508\\ 0.688\\ 0.524\end{pmatrix}$ شعاع وحدوي

الخطوة (6) : إحداثيات الأفراد على المحاور

نعمل على حساب إحداثيات الأفراد على المحاور من العلاقة: $F_{\alpha} = X \times U_{\alpha}$

على المحور الأول: $F_1 = X \times U_1$

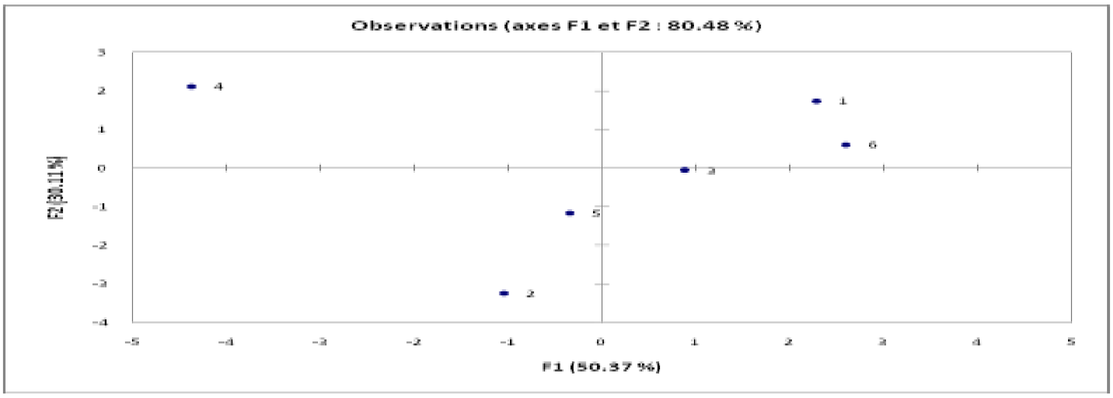
على المحور الثاني: $F_2 = X \times U_2$

على المحور الثالث: $F_3 = X \times U_3$

و الجدول التالي يلخص إحداثيات الأفراد على المحاور:

الأفراد	F1	F2	F3
1	2.2837	1.7439	-0.8124
2	-1.0428	-3.2373	-1.1615
3	0.8797	-0.0686	-1.6747
4	-4.3698	2.1182	-0.0436
5	-0.3403	-1.1599	2.6055
6	2.5893	0.6037	1.0867

الخطوة (7) : التمثيل البياني للأفراد على المستوي



و في إطار التعليق على هذا التمثيل لبياني فانه يمكننا القول أن كل الأفراد تمثيلهم مقبول على هذا المستوي ما عدا الفردين الثالث و الخامس بسبب قربهم من المبدأ، حيث انه يمكننا أن نميز الأفراد الأول، الرابع و السادس تمثيلهم جيد على المحور الأول الفردين الأول و السادس بإحداثية موجبة و الفرد الرابع بإحداثية سالبة. أما على المحور الثاني فالفرد الثاني بإحداثيات سالبة و الفردين الأول و الرابع بإحداثيات موجبة هما الأفضل تمثيل على هذا المحور.

الخطوة (8) : نسب تمثيل الأفراد على المحاور

يمكننا أن نحسب نسب تمثيل الأفراد على المحور α من العلاقة التالية:

$$Cos^2\theta_{i\alpha} = \frac{F_{\alpha}^2(i)}{d^2(g,i)} \qquad ; \qquad d^2(g,i) = \sum_{\alpha=1}^{p} F_{\alpha}^2(i)$$

على المحور الأول: $d^2(g,i)=\sum_{\alpha=1}^{3} F_\alpha^2(i)$; $Cos^2\theta_{i1}=\frac{F_1^2(i)}{d^2(g,i)}$

على المحور الثاني: $d^2(g,i)=\sum_{\alpha=1}^{3} F_\alpha^2(i)$; $Cos^2\theta_{i2}=\frac{F_2^2(i)}{d^2(g,i)}$

على المحور الثالث: $d^2(g,i)=\sum_{\alpha=1}^{3} F_\alpha^2(i)$; $Cos^2\theta_{i3}=\frac{F_3^2(i)}{d^2(g,i)}$

و الجدول التالي يلخص نتائج الحساب:

المجموع	$Cos^2\theta_{i3}$	$Cos^2\theta_{i2}$	$Cos^2\theta_{i1}$	الأفراد
%100	0.0740	0.3411	**0.5849**	1
%100	0.1045	**0.8114**	0.0842	2
%100	**0.7827**	0.0013	0.2160	3
%100	0.0001	0.1902	**0.8097**	4
%100	**0.8229**	0.1631	0.0140	5
%100	0.1431	0.0442	**0.8127**	6

فالقيمة $Cos^2\theta_{41}=0.8097$ تمثل نسبة تمثيل الفرد الرابع على المحور الأول أي حوالي 81% من هذا الفرد ممثلة على المحور الأول، و حوالي 19% من هذا الفرد ممثلة على المحور الثاني، أما على المحور الثالث تقريباً معدومة. و بالتالي فان مجموع نسب تمثيل هذا الفرد على المحاور هو 100% .

و في إطار التعليق على هذا الجدول فإننا نلاحظ أن الفردين الرابع و السادس هما الأفضل تمثيل على المحور الأول، أما عن المحور الثاني فإننا نميز فقط الفرد الثاني.

الخطوة(9) : مساهمة الأفراد في تشكيل المحاور

يمكننا أن نحسب نسب مساهمة الأفراد في تشكيل المحور α من العلاقة التالية:

$$C_i^\alpha=\frac{F_\alpha^2(i)}{\sum_{i=1}^{n} F_\alpha^2(i)}=\frac{F_\alpha^2(i)}{6\lambda_\alpha}$$

على المحور الأول: $$C_i^1=\frac{F_1^2(i)}{\sum_{i=1}^{n} F_1^2(i)}=\frac{F_1^2(i)}{6\lambda_1}$$

على المحور الثاني: $$C_i^2=\frac{F_2^2(i)}{\sum_{i=1}^{n} F_2^2(i)}=\frac{F_2^2(i)}{6\lambda_2}$$

على المحور الثالث:

$$C_i^3 = \frac{F_3^2(i)}{\sum_{i=1}^{n} F_3^2(i)} = \frac{F_3^2(i)}{6\lambda_3}$$

و الجدول التالي يلخص نتائج الحساب:

الأفراد	C_i^1	C_i^2	C_i^3
1	**15.8081**	15.4201	5.1622
2	3.2958	**53.1378**	10.5522
3	2.3459	0.0239	21.9364
4	**57.8771**	**22.7489**	0.0148
5	0.3510	6.8213	53.0983
6	**20.3222**	1.8480	9.2360
المجموع	**100%**	**100%**	**100%**

الأفراد الذين لهم اكبر نسب مساهمة في تشكيل المحور الأول هم: الفرد الأول بنسبة قدرها حوالي 16 % و الفرد الرابع بنسبة قدرها حوالي 58 % و الفرد السادس بنسبة قدرها حوالي 20 % ، أي أن الأفراد الثلاثة يساهمون في تشكيل هذا المحور بنسبة قدرها حوالي 94 % و هي نسبة كبيرة جداً، و هذا يدل على الدور الكبير لهذه الأفراد في إنشاء هذا المحور و هذا بعكس بقية الأفراد.

أما عن المحور الثاني فالفردين الثاني و الرابع لهما دور كبير في تشكيل هذا المحور الفرد الثاني بنسبة قدرها 53 % و الفرد الرابع بنسبة قدرها حوالي 23 %.

الخطوة (10) : إحداثيات المتغيرات على المحاور

يمكننا أن نحسب إحداثيات المتغيرات على المحور α من العلاقة التالية: $G_\alpha = X'V_\alpha$

على المحور الأول: $G_1 = X'V_1$

على المحور الثاني: $G_2 = X'V_2$

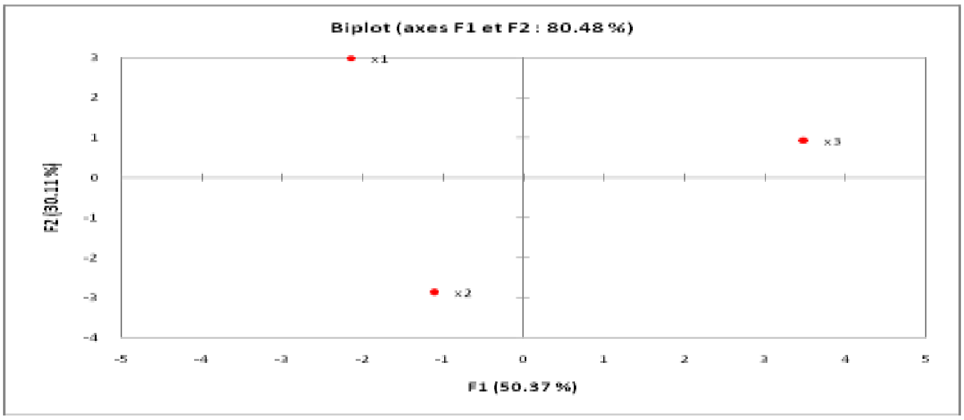
على المحور الثالث: $G_3 = X'V_3$

أو الاستعانة بعبارات الانتقال: $G_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha}\, U_\alpha$

و الجدول التالي يلخص نتائج الحساب:

المتغيرات	G1	G2	G3
x1	-1.1808	1.2737	0.7340
x2	-0.6080	-1.2294	1.0039
x3	1.9325	0.3915	0.7643

الخطوة (11) : التمثيل البياني للمتغيرات



6. تحديد إحداثيات الفرد الإضافي الطالب 7 على المستوى المقترح:

لدينا: $R^{+} = (12 \;\; ; \;\; 08 \;\; ; \;\; 16)$ يكون:

$$\Rightarrow X^{+} = (12-10.33 \;\; ; \;\; 8-8.33 \;\; ; \;\; 16-9.17)$$

يكون: $X^{+} = (1.67 \;\; ; \;\; -0.33 \;\; ; \;\; 6.83)$

$$F_1^{+}(9) = X^{+}U_1 = (1.67 \quad -0.33 \quad 6.83) \times \begin{pmatrix} -0.504 \\ -0.259 \\ 0.824 \end{pmatrix} = 4.87$$

$$F_2^{+}(9) = X^{+}U_2 = (1.67 \quad -0.33 \quad 6.83) \times \begin{pmatrix} 0.702 \\ -0.678 \\ 0.216 \end{pmatrix} = 2.87$$

التمرين02:

1. اختبار الكفاية و فعالية التحليل بطريقة ACP:

التطرق إلى تحليل و دراسة النتائج المتحصل عليها يجب في البداية التأكد من كفاية حجم العينة للتحليل بطريقة ACP و قوة الترابط بين متغيرات محل الدراسة، و يكون ذلك في الاختبارين التاليين:

أ. اختبار كفاية العينة KMO (Kaiser-Meyer-Olkin):

Kaiser-Meyer-Olkin :

Log pibh	0.6375
Log k	0.6656
Log h	0.9164
KMO	0.7134

كما هو معلوم فان التحليل ألعاملي يعتمد على مصفوفة الارتباطات بين متغيرات الدراسة و التي عناصرها تضم معاملات الارتباط الخطي البسيط بين المتغيرات و التي تتأثر بحجم عينة الدراسة، و عليه فإننا نستخدم اختبار KMO لاختبار كفاية العينة للتحليل و الدراسة. و الإحصائية المحسوبة لهذا الاختبار KMO تتراوح بين القيمتين 0 و 1، فإذا كانت قيمتها اكبر من 0.5 يعني وجود علاقة بين المتغيرات محل الدراسة و التي تمكننا من اختزالها إلى عوامل مكتوبة على شكل خطي بدلالة المتغيرات السابقة. أي أن للتحليل ألعاملي فائدة و طريقة ACP تساعدنا على ضغط و تلخيص المعلومات، أما إذا كانت قيمتها اقل من 0.5 يعني ذلك عدم وجود علاقة بين متغيرات الدراسة و تصبح طريقة ACP بدون فائدة. و نتيجة هذا الاختبار مسجلة في الجدول التالي:

نتيجة اختبار KMO هي 0.7134 اكبر من 0.5 تعني وجود علاقة بين المتغيرات محل الدراسة و التي تمكننا من اختزالها إلى عوامل مكتوبة على شكل خطي بدلالة المتغيرات السابقة، أي أن للتحليل ألعاملي فائدة و طريقة ACP تساعدنا على ضغط و تلخيص المعلومات.

ب. اختبار فعالية التحليل العاملي (Bartlett) :

يعتمد هذا الاختبار على الفرضية المعدومة التي تنص على أن مصفوفة الارتباطات هي مصفوفة وحدة و عند قبول هذه الفرضية لا يمكننا تطبيق طريقة ACP و اختزال المحاور لعدم وجود علاقة بين متغيرات الدراسة، و الإحصائية المحسوبة لهذا الاختبار تتوزع حسب توزيع كي ألتربيعي. و نتيجة هذا الاختبار مسجلة في الجدول التالي:

Test de sphéricité de Bartlett :

Khi² (Valeur observée)	39.9344
Khi² (Valeur critique)	7.8147
DDL	3
p-value	< 0.0001
alpha	0.05

و على أساس الاحتمال المرافق للإحصائية المحسوبة يمكننا رفض الفرضية المعدومة و القول بان مصفوفة الارتباطات تختلف عن مصفوفة الوحدة و بالتالي وجود ارتباطات كافية بين متغيرات الدراسة تمكننا من تطبيق ACP و اختزال المحاور.

2. تحليل جدول المتوسطات الحسابية و الانحرافات المعيارية:

من خلال ملاحظة معامل التغاير يمكننا القول أن المتغير الأكثر استقرارا خلال فترة الدراسة هو متغير رأس المال البشري لأنه يحوز على CV الأقل من بين كل المتغيرات، غير أن المتغير الأكثر تشتت هو متغير حصة الفرد من الناتج الحقيقي لأنه يحوز على CV الأكبر من بين كل المتغيرات اي يخضع لاضطرابات كبيرة خلال فترة الدراسة.

Variable	Moyenne	Ecart-type	معامل التغاير CV
Log pibh	8.5023	0.5863	0.0690
Log k	3.3108	0.1871	0.0565
Log h	1.8027	0.0939	0.0521

3. مصفوفة الارتباطات:

في البداية نستخرج المصفوفة المركزة و المرجحة X على النحو التالي:

السنوات	Log pibh	Log k	Log h
2001	-1.162	-0.974	-0.768
2002	-0.850	-0.584	-0.818
2003	-0.935	-0.690	-0.867
2004	-0.947	-0.705	-0.917
2005	-0.720	-1.085	-0.966
2006	-0.565	-0.899	-0.575
2007	0.002	-0.215	-0.183
2008	0.466	0.345	0.208
2009	1.657	1.780	0.599
2010	1.424	1.499	1.027
2011	0.842	0.798	1.429
2012	0.787	0.731	1.831

و باستعمال الجدول R و جدول المتوسطات و الانحرافات المعيارية نجد أن:

$$X_{(12,3)} = \begin{pmatrix} \\ x_{ij} = \frac{\eta_{ij} - \overline{\eta}_j}{\sigma_j} \\ \\ \end{pmatrix} \quad i = \overline{1,12} \quad j = \overline{1,3}$$

إن المصفوفة أعلاه تعبر عن إحداثيات الأفراد في المعلم ذو المبدأ مركز سحابة النقاط g.

حساب مصفوفة الارتباطات:

$$C=\frac{X'X}{n}=\begin{pmatrix}1 & 0.975 & 0.862\\ 0.975 & 1 & 0.839\\ 0.862 & 0.839 & 1\end{pmatrix}$$

Variables	Log pibh	Log k	Log h
Log pibh	**1**	**0.9747**	**0.8621**
Log k	**0.9747**	**1**	**0.8392**
Log h	**0.8621**	**0.8392**	**1**

إن مصفوفة الارتباطات تضم معاملات الارتباط الخطي البسيط بين المتغيرات، فمن المصفوفة أعلاه يمكننا أن نستنتج أن معامل الارتباط الخطي البسيط بين المتغير الأول و الثاني هو $r_{1,2}=0.9747$ أي أن العلاقة بين متغيرة حصة الفرد من الناتج الحقيقي و متغير حصة الفرد من رأس المال هي علاقة قوية و موجبة، كما أن معامل الارتباط الخطي البسيط بين المتغير الأول و الثالث هو $r_{1,3}=0.8621$ أي أن العلاقة بين متغيرة حصة الفرد من الناتج الحقيقي و متغير رأس المال البشري هي علاقة قوية و موجبة، و معامل الارتباط الخطي البسيط بين المتغير الثاني و الثالث هو $r_{2,3}=0.8392$ أي أن العلاقة بين متغيرة رأس المال المادي و متغير رأس المال البشري هي علاقة قوية و موجبة. و يمكننا أن نخلص إلى أن كل المتغيرات لها علاقة قوية و موجبة فيما بينها.

4. القيم الذاتية:

نقوم بحساب القيم الذاتية من مصفوفة الارتباطات من العلاقة التالية:

$$|C-\lambda I_3|=0\Rightarrow\left|\begin{pmatrix}1 & 0.975 & 0.862\\ 0.975 & 1 & 0.839\\ 0.862 & 0.839 & 1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda & 0.975 & 0.862\\ 0.975 & 1-\lambda & 0.839\\ 0.862 & 0.839 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

و يكون: $\lambda_1=2.7854\qquad \lambda_2=0.1905\qquad \lambda_3=0.0242$

حيث أن القيم الذاتية ترتب ترتيباً تنازلياً، كما أن: $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=Trace(C)=3$

5. نسب التمثيل على المحاور

الجدول التالي يلخص نسب التمثيل على المحاور:

	F1	F2	F3
Valeur propre	2.7854	0.1905	0.0242
Variabilité (%)	92.8457	6.3485	0.8058
% cumulé	92.8457	99.1942	100.0000

أي أن 92.85% من بيانات الجدول الأولي للمعطيات ممثلة على المحور (Δ_1) . و6.35% من بيانات الجدول الأولي للمعطيات ممثلة على المحور (Δ_2) . أي أن99.20% من بيانات الجدول الأولي للمعطيات ممثلة على المستوي الأول $(\Delta_1 \otimes \Delta_2)$ و هي نسبة مقبولة جداً للتمثيل و الدراسة.

6. إيجاد الأشعة الذاتية الوحدوية

نعمل على إيجاد الأشعة الذاتية المرافقة للقيم الذاتية من العلاقة:

$$(C - \lambda_\alpha I_3) \times U_\alpha = \underline{0}_3$$

الشعاع الذاتي الأول لما: $\lambda_1 = 2.7854$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0.5887 \\ 0.5841 \\ 0.5588 \end{pmatrix}$$ شعاع وحدوي

الشعاع الذاتي الثاني لما: $\lambda_2 = 0.1905$

$$U_2 = \begin{pmatrix} -0.3367 \\ -0.4513 \\ 0.8264 \end{pmatrix}$$ شعاع وحدوي

الشعاع الذاتي الثالث لما: $\lambda_3 = 0.0242$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 0.7349 \\ -0.6747 \\ -0.0690 \end{pmatrix}$$ شعاع وحدوي

7. إحداثيات الأفراد على المحاور

نعمل على حساب إحداثيات الأفراد على المحاور من العلاقة: $F_\alpha = X \times U_\alpha$

على المحور الأول: $F_1 = X \times U_1$

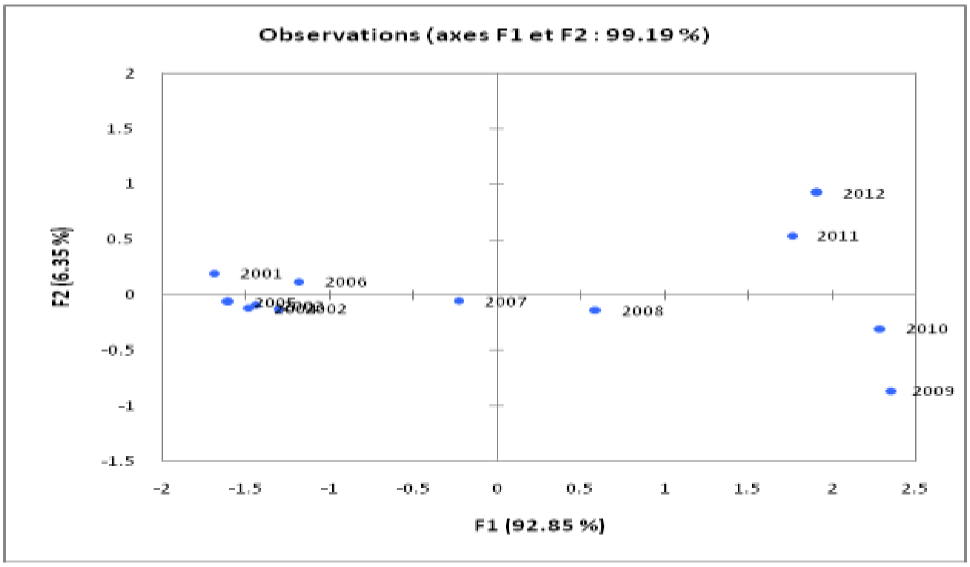
على المحور الثاني: $F_2 = X \times U_2$

على المحور الثالث: $F_3 = X \times U_3$

و الجدول التالي يلخص إحداثيات الأفراد على المحاور:

الأفراد	F1	F2	F3
2001	-1.7569	0.2049	-0.1500
2002	-1.3563	-0.1318	-0.1818
2003	-1.5019	-0.0943	-0.1688
2004	-1.5476	-0.1261	-0.1639
2005	-1.6684	-0.0692	0.2817
2006	-1.2314	0.1261	0.2414
2007	-0.2367	-0.0573	0.1664
2008	0.6184	-0.1470	0.0997
2009	2.4543	-0.9047	-0.0256
2010	2.3895	-0.3209	-0.0373
2011	1.8386	0.5612	-0.0189
2012	1.9985	0.9591	-0.0429

8. التمثيل البياني للأفراد على المستوي



و في إطار التعليق على هذا التمثيل البياني فانه يمكننا القول أن كل الأفراد تمثيلهم مقبول على هذا المستوي ما عدا الفردين 2007 و 2008 بسبب قربهم من المبدأ، حيث انه يمكننا أن نميز الأفراد 2009، 2010، 2011 و 2012 تمثيلهم جيد على المحور الأول و بإحداثيات موجبة و على نفس المحور فان الأفراد من 2001، 2002، 2003، 2004، 2005 و 2006 تمثيلهم جيد و بإحداثيات سالبة. أما على المحور

الثاني فكل الأفراد تمثيلهم سيئ ماعدا الفردين 2012 و 2009 الأول بإحداثيات موجبة و الثاني بإحداثيات سالبة.

9. نسب تمثيل الأفراد على المحاور

يمكننا أن نحسب نسب تمثيل الأفراد على المحور α من العلاقة التالية:

$$Cos^2\theta_{i\alpha} = \frac{F_\alpha^2(i)}{d^2(g,i)} \qquad ; \qquad d^2(g,i) = \sum_{\alpha=1}^{p} F_\alpha^2(i)$$

على المحور الأول:

$$Cos^2\theta_{i1} = \frac{F_1^2(i)}{d^2(g,i)} \qquad ; \qquad d^2(g,i) = \sum_{\alpha=1}^{3} F_\alpha^2(i)$$

على المحور الثاني:

$$Cos^2\theta_{i2} = \frac{F_2^2(i)}{d^2(g,i)} \qquad ; \qquad d^2(g,i) = \sum_{\alpha=1}^{3} F_\alpha^2(i)$$

على المحور الثالث:

$$Cos^2\theta_{i3} = \frac{F_3^2(i)}{d^2(g,i)} \qquad ; \qquad d^2(g,i) = \sum_{\alpha=1}^{3} F_\alpha^2(i)$$

و الجدول التالي يلخص نتائج الحساب:

الأفراد	$Cos^2\theta_{i1}$	$Cos^2\theta_{i2}$	$Cos^2\theta_{i3}$	المجموع
2001	**0.9795**	0.0133	0.0071	%100
2002	**0.9733**	0.0092	0.0175	%100
2003	**0.9837**	0.0039	0.0124	%100
2004	**0.9825**	0.0065	0.0110	%100
2005	**0.9707**	0.0017	0.0277	**%100**
2006	**0.9534**	0.0100	0.0366	%100
2007	**0.6442**	0.0378	0.3181	%100
2008	**0.9238**	0.0522	0.0240	%100
2009	**0.8803**	0.1196	0.0001	%100
2010	**0.9821**	0.0177	0.0002	%100
2011	**0.9147**	0.0852	0.0001	%100
2012	**0.8125**	0.1871	0.0004	%100

و في إطار التعليق على هذا الجدول فإننا نلاحظ أن كل الأفراد تمثيلهم جيد على المحور الأول، أما عن المحور الثاني فان كل الأفراد تمثيلهم غير مقبول.

10. نسب مساهمة الأفراد في تشكيل المحاور

يمكننا أن نحسب نسب مساهمة الأفراد في تشكيل المحور α من العلاقة التالية:

$$C_i^{\alpha} = \frac{F_{\alpha}^2(i)}{\sum_{i=1}^{n} F_{\alpha}^2(i)} = \frac{F_{\alpha}^2(i)}{12\lambda_{\alpha}}$$

على المحور الأول:

$$C_i^1 = \frac{F_1^2(i)}{\sum_{i=1}^{n} F_1^2(i)} = \frac{F_1^2(i)}{12\lambda_1}$$

على المحور الثاني:

$$C_i^2 = \frac{F_2^2(i)}{\sum_{i=1}^{n} F_2^2(i)} = \frac{F_2^2(i)}{12\lambda_2}$$

على المحور الثالث:

$$C_i^3 = \frac{F_3^2(i)}{\sum_{i=1}^{n} F_3^2(i)} = \frac{F_3^2(i)}{12\lambda_3}$$

و الجدول التالي يلخص نتائج الحساب:

الأفراد	C_i^1	C_i^2	C_i^3
2001	9.2353	1.8359	7.7520
2002	5.5041	0.7604	11.3821
2003	6.7486	0.3888	9.8139
2004	7.1657	0.6961	9.2455
2005	8.3284	0.2094	27.3252
2006	4.5371	0.6959	20.0706
2007	0.1677	0.1437	9.5294
2008	1.1442	0.9447	3.4218
2009	**18.0227**	**35.8036**	0.2259
2010	**17.0824**	4.5040	0.4779
2011	**10.1139**	**13.7772**	0.1231
2012	**11.9500**	**40.2403**	0.6326
المجموع	**100%**	**100%**	**100%**

الأفراد الذين لهم اكبر نسب مساهمة في تشكيل المحور الأول هم: 2009 بنسبة قدرها حوالي 18 % و الفرد 2010 بنسبة قدرها حوالي 17 % و الفرد 2011 بنسبة قدرها حوالي 10 % و الفرد 2012 بنسبة قدرها حوالي 12 % ، أي أن الأفراد السابقين يساهمون في تشكيل هذا المحور بنسبة قدرها حوالي 57 %

و هي نسبة معتبرة، و هذا يدل على الدور الكبير لهذه الأفراد في إنشاء هذا المحور و هذا بعكس بقية الأفراد.

أما عن المحور الثاني فالأفراد 2009، 2011 و 2012 لهم دور كبير في تشكيل هذا المحور بنسبة قدرها حوالي 90 % و هي نسبة جبيرة جداً توحي بالدور المهم لهذه الأفراد في تكوين هذا المحور.

11. إحداثيات المتغيرات على المحاور

يمكننا أن نحسب إحداثيات المتغيرات على المحور α من العلاقة التالية: $G_{\alpha} = X'V_{\alpha}$

على المحور الأول: $G_1 = X'V_1$

على المحور الثاني: $G_2 = X'V_2$

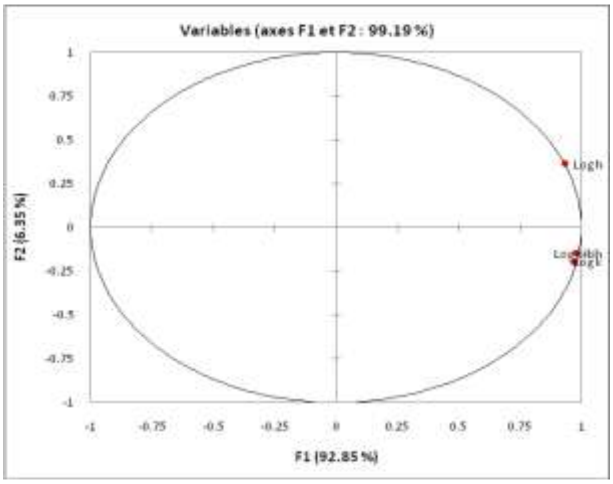
على المحور الثالث: $G_3 = X'V_3$

و الجدول التالي يلخص نتائج الحساب:

Coordonnées des variables :

	G1	G2	G3
Log pibh	0.9825	-0.1469	0.1143
Log k	0.9748	-0.1970	-0.1049
Log h	0.9326	0.3607	-0.0107

12. التمثيل البياني للمتغيرات



التعليق على التمثيل البياني للمتغيرات: إن التعليق على التمثيل البياني للمتغيرات يضم ثلاثة أقسام و هي:

أ. جودة التمثيل:

كل المتغيرات الثلاثة تقع بالقرب من محيط دائرة الارتباطات مما يعني أنها ممثل أحسن تمثيل على المستوي الأول $(G_1 \otimes G_2)$، مما يعني أن كل المتغيرات مقبولة في التحليل الدراسة.

ب. علاقة المتغيرات بالمحاور:

نلاحظ أن كل المتغيرات لها ارتباط قوي و موجب مع المركبة الأولى، فمعامل الارتباط الخطي البسيط بين المركبة الأولى و متغيرة حصة الفرد من الناتج الحقيقي هي $(r_{1,1}=G_1(1)=0.9825)$ أما معامل الارتباط الخطي البسيط بين المركبة الأولى و متغيرة حصة الفرد من رأس المال المادي هي $(r_{1,2}=G_1(2)=0.9784)$ و معامل الارتباط الخطي البسيط بين المركبة الأولى و متغير رأس المال البشري هي $(r_{1,2}=G_1(2)=0.9326)$. غير أن كل متغيرات الدراسة شبه مستقلة عن المركبة الثانية.

ت. علاقة المتغيرات فيما بينها:

و من خلال ملاحظة المسافة بين المتغيرات يمكننا القول أن كل المتغيرات قريب من بعضها البعض و هذا يفسر على أساس وجود ارتباط قوي و موجب بين هذه المتغيرات، و هذه النتيجة تتوافق مع التوقعات النظرية لنموذج سولوا، أي انه يمكننا القول أن كل من رأس المال المادي و البشري هي المحددة الأساسية لحصة الفرد من الناتج الحقيقي في الجزائر خلال فترة الدراسة.

13. **الربط بين التمثيل البياني للأفراد و المتغيرات**

على أساس التحليل السابق فان كل متغيرات الدراسة لها ارتباط قوي و موجب مع المركبة الأولى، و على نفس المركبة فان الأفراد 2009، 2010، 2011 و 2012 تمثيلهم جيد و بإحداثيات موجبة و الأفراد من 2001، 2002، 2003، 2004، 2005 و 2006 تمثيلهم جيد و بإحداثيات سالبة مما يعني انه خلال الفترة من 2001 إلى غاية 2006 عانى الاقتصاد الجزائري من تدني في مؤشرات حصة الفرد من الناتج الحقيقي، حصة الفرد من رأس المال المادي و البشري، و على العكس من ذلك فخلال الفترة من 2009 إلى غاية 2012 شهدا الاقتصاد الجزائري تحسن كبير في المؤشرات السابقة و يعود ذلك إلى الارتفاع الكبير في أسعار البترول و زيادة الاحتياطات النقدية من العملة الصعبة.

<u>التمرين03</u>:

1. **حساب القيمة الذاتية الثالثة** λ_3 :

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\lambda_\alpha = Trace(C) \Rightarrow \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 3 \Rightarrow \lambda_3 = 0$$

إعطاء تفسير لهذا المحور:

القيمة الذاتية الثالثة معدومة مما يعني أن الشعاع الذاتي الثالث تافه كما أن المحور الثالث مهمل، وهذا يجعل من نسبة التمثيل على هذا المحور معدومة.

2. **نرغب في هذا الفرع إلى إعادة تشكيل العناصر الأصلية لمصفوفة الارتباطات C :**

1.2. **حساب معاملات ارتباط المتغيرات مع المركبتين الأساسيتين الأولى و الثانية:**

باستعمال علاقة الانتقال التالية: $\alpha=1.2$ $\quad G_\alpha=\sqrt{\lambda_\alpha}U_\alpha$

نجد أن:

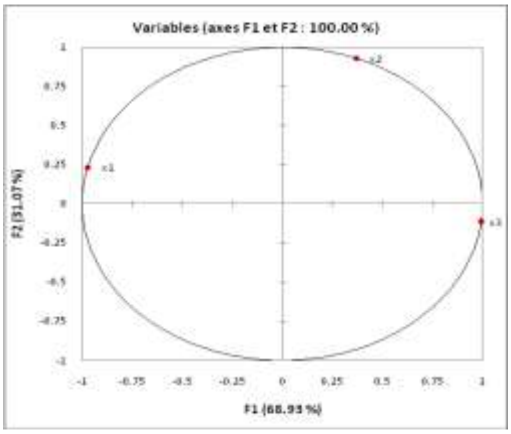
$$\alpha = 1 \Rightarrow G_1 = \sqrt{\lambda_1} \times U_1 = \sqrt{2.0678} \times \begin{pmatrix} -0.6763 \\ 0.2561 \\ 0.6907 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.9725 \\ 0.3683 \\ 0.9931 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = 2 \Rightarrow G_2 = \sqrt{\lambda_2} \times U_2 = \sqrt{0.9322} \times \begin{pmatrix} 0.2411 \\ 0.9629 \\ -0.1209 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2328 \\ 0.9297 \\ -0.1167 \end{pmatrix}$$

و الجدول التالي يلخص إحداثيات المتغيرات على المحورين الأول و الثاني:

المتغيرات	$G_1(j)$	$G_2(j)$
X_1	- 0.9725	80.232
X_2	0.3683	70.929
X_3	0.9931	0.1167 -

التمثيل البياني للمتغيرات:



التعليق على التمثيل البياني:

نلاحظ أن كل المتغيرات الثلاثة تقع بالقرب من محيط دائرة الارتباطات مما يعني أنها ممثلة أحسن تمثيل على هذا المستوي $(G_1 \otimes G_2)$ و من خلال ملاحظة المسافة بين المتغيرات يمكننا القول أن المتغير X_2 مستقل عن البقية و نكتب: $r_{2.1} \cong r_{2.3} \cong 0$ و ذلك لان: $d(X_1, X_2) \cong d(X_2, X_3) \cong \sqrt{2}$ ، وعلى أساس أن المسافة أعظمية بين المتغيرين X_1 و X_3: $d(X_1, X_3) \cong 2$ فان العلاقة بين هاتين المتغيرين قوية وسالبة ونكتب: $r_{3.1} \cong -1$.

أما العلاقة بين المركبات الأساسية و المتغيرات فانه من خلال التمثيل البياني تُظهر المركبة الأولى ارتباط قوي مع المتغيرين X_1 وX_3 مع الأول سالبة $G_1(1) = -0.9725$. أما الثالث فموجبة $G_1(3) = 0.9931$ ، غير أنها مستقلة عن المتغير X_2. و بالنسبة للعلاقة بين المركبة الأساسية الثانية فهي ترتبط ارتباط قوي و موجب مع المتغير X_2 و مستقلة عن البقية.

2.2. إذا كنا نعلم أن كل المتغيرات تقع على سطح كرة مركزها المبدأ و نصف قطرها الواحد، فالعلاقة التي تمكننا من حساب المسافة الحقيقية بين المتغيرين j و j' في الفضاء هي:

$$d(j,j')=\sqrt{(G_1(j)-G_1(J'))^2+(G_2(j)-G_2(J'))^2}$$

حساب المسافات الحقيقة في الفضاء بين المتغيرات الثلاث مثنى مثنى:

$d(2,3)=1.2189$, $d(1,3)=1.9965$, $d(1,2)=1.5111$

3.2. قدم العلاقة التي تمكننا من حساب معامل الارتباط الخطي البسيط بين المتغيرين j و j' انطلاقاً من المسافة بينهما:

الإجابة: $$r_{(j,j')}=1-d^2(j,j')/2$$

استنتج الآن معاملات الارتباط الخطي البسيط بين المتغيرات السابقة: الإجابة: $0.75\ pts$

$r(2,3)=0.2572$, $r(1,3)=-0.9930$, $r(1,2)=-0.1417$

و عليه تكون مصفوفة الارتباطات (قيم حقيقية وليست تقريبية) من الشكل: الإجابة:

$$C=\begin{bmatrix}1 & -0.1417 & -0.9930\\ & 1 & 0.2572\\ & & 1\end{bmatrix}$$

3. إكمال الجدول المذكور في الفرع "ج" مع التبرير:

الأفراد	$F_1(i)$	$F_2(i)$	$F_3(i)$	$Cos^2(\theta_1)$	$Cos^2(\theta_2)$	$Cos^2(\theta_3)$
1	-0.6632	1.0237	**0.000**	0.2956	**0.7044**	**0.000**
2	**2.4028**	-0.2932	**0.000**	0.9853	**0.0147**	**0.000**
3	1.3302	1.3773	**0.000**	0.4826	**0.5174**	**0.000**
4	-1.3302	-1.3773	**0.000**	0.4826	**0.5174**	**0.000**
5	-2.4028	0.2932	**0.000**	0.9853	**0.0147**	**0.000**
6	0.5370	-0.8354	**0.000**	0.2924	**0.7076**	**0.000**
7	-0.5370	**0.8354**	**0.000**	0.2923	**0.7077**	**0.000**
8	0.6632	-1.0238	**0.000**	0.2956	**0.7044**	**0.000**

التبرير:

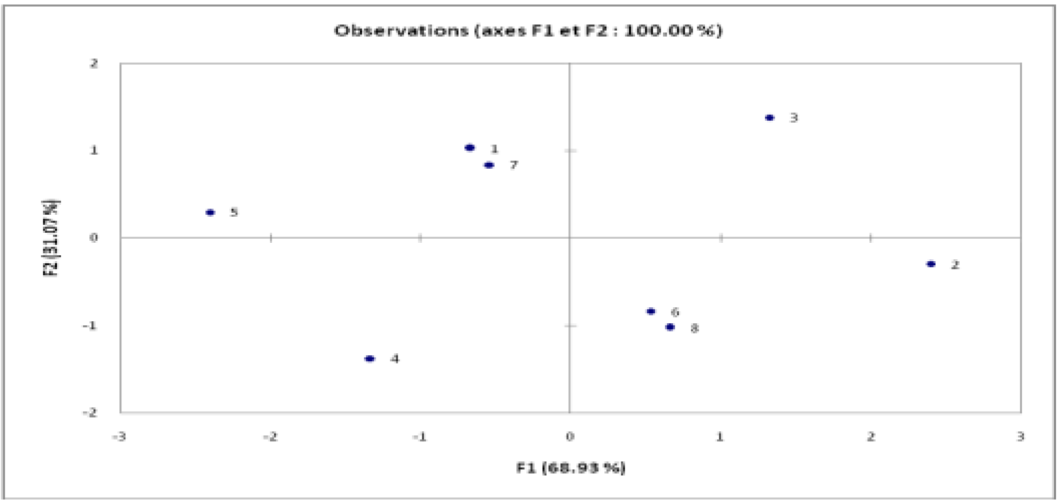
بالنسبة لإيجاد قيم $F_1(2)$, $F_2(7)$ نستعمل الخاصية: $\overline{F}=0$

بالنسبة لإيجاد قيم $F_3(i)$ نستعمل الخاصية: $F_3(i)=XU_3=0$ لان الشعاع U_3 تافه.

بالنسبة لإيجاد قيم $Cos^2(\theta_3)$ نستعمل الخاصية: $Cos^2\theta_{i3}=\dfrac{F_3^2(i)}{d^2(g,i)} \quad \wedge \quad F_3(i)=0$

بالنسبة لإيجاد قيم $Cos^2(\theta_2)$ نستعمل الخاصية: $\sum_{\alpha=1}^{3} Cos^2(\theta_{i\alpha})=1$

التمثيل البياني للأفراد على المستوى الأول $(F_1 \otimes F_2)$:



1.3. نسبة التمثيل على المستوي الأول:

نسبة التمثيل على المستوي الأول: $Cr(F_1 \otimes F_2)=(\lambda_1+\lambda_2)/It=100\%$

الشرح: 100% من بيانات الجدول الأولي R ممثلة على المستوي الأول ولا يوجد فقدان لأي معلومة في هذا المستوي.

2.3. يمثل مبدأ المحاور F_1, F_2 مركز سحابة النقط g

التبرير:

وذلك لأننا استعملنا في تحليل الجدول R طريقة التحليل بالمركبات الأساسية المرجحة (ACP- Normé) و التي تقتضي نقل المعلم إلى مركز البيانات g .

4. من خلال الربط بين التمثيل البياني للأفراد و المتغيرات أكمل ما يا لي مع التبرير:

- من بين كل الأفراد الفرد الذي يملك طول اكبر و اقل سعة رئوية للتنفس هو: 5

التبرير: الفرد 5 ممثل أحسن تمثيل على المركبة F_1 و بقيمة سالبة، كما أن F_1 ترتبط ارتباط قوي و سالب مع متغيرة الطول X_1 و ارتباط قوي و موجب مع متغيرة السعة الرئوية X_3 مما يجعل من الفرد 5 يأخذ اكبر القيم على X_1 و اقل القيم على X_3 .

- من بين كل الأفراد الفرد الذي يملك طول اقل و اكبر سعة رئوية للتنفس هو: 2

التبرير: الفرد 2 ممثل أحسن تمثيل على المركبة F_1 و بقيمة موجبة، كما أن F_1 ترتبط ارتباط قوي و سالب مع متغيرة الطول X_1 و ارتباط قوي و موجب مع متغيرة السعة الرئوية X_3 مما يجعل من الفرد 2 يأخذ اقل القيم على X_1 و اكبر القيم على X_3 .

- من بين كل الأفراد الفردين اللذين يملكن اكبر وزن هما: 1 و 3

التبرير: الفردين 1 و 3 ممثلين أحسن تمثيل على المركبة F_2 و بقيم موجبة كما أن هاتي المركبة لها ارتباط قوي و موجب مع متغيرة الوزن X_2 مما يعني أن الفردين 1 و 3 هما الأكبر وزناً من بين كل الأفراد على الإطلاق.

5. إذا علمت أن الفرد الإضافي (9) يملك المواصفات التالية: الوزن 74.0874 كلغ، الطول 180.6846 سم و السعة الرئوية للتنفس هي 3.5466 ل.

تحدد إحداثيات هذا الفرد على المستوي الأول $(F_1 \otimes F_2)$.

إحداثيات الفرد الإضافي (9) لدينا:

$$R^{+} = (180.6846 \;;\; 74.0874 \;;\; 3.5466)$$

$$\Rightarrow X^{+} = \left(\frac{180.6846-170}{10.6846} \;;\; \frac{74.0874-65.0001}{9.0873} \;;\; \frac{3.5466-3.0010}{0.5456}\right)$$

يكون:

$$X^{+} = (1 \;;\; 1 \;;\; 1)$$

$$F_1^{+}(9) = X^{+}U_1 = (1 \quad 1 \quad 1)\times\begin{pmatrix}-0.6763\\ 0.2561\\ 0.6907\end{pmatrix} = 0.2704$$

$$F_2^{+}(9) = X^{+}U_2 = (1 \quad 1 \quad 1)\times\begin{pmatrix}0.2411\\ 0.9629\\ -0.1209\end{pmatrix} = 1.0832$$

أي أن إحداثيات الفرد الإضافي (9) هي: $(0.2704 \quad 1.0832)$

5. نرغب في هذا الفرع إلى إعادة تشكيل قيم الجدول الأولي للبيانات R:

1.5. بالاستعانة بعبارات الانتقال برهن أن عبارة إعادة تشكيل الجدول X (X جدول ممركز ومرجح) هي: $X = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} F_\alpha G'_\alpha$

لدينا عبارتي الانتقال هما:

$$U_\alpha = X'V_\alpha \Big/ \sqrt{\lambda_\alpha} = G_\alpha \Big/ \sqrt{\lambda_\alpha} \;\wedge\; V_\alpha = XU_\alpha \Big/ \sqrt{\lambda_\alpha} = F_\alpha \Big/ \sqrt{\lambda_\alpha}$$

نعوض في X نجد أن:

$$X = \sum_{\alpha=1}^{3} \sqrt{\lambda_\alpha} V_\alpha U'_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} F_\alpha G'_\alpha$$

2.5. إيجاد قيم الجدول X:

$$X = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} F_\alpha G'_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} F_1 G'_1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} F_2 G'_2$$

$$X=\frac{1}{\sqrt{2.0678}}\begin{bmatrix}-0.6632\\ 2.4028\\ 1.3302\\ -1.3302\\ -2.4028\\ 0.5370\\ -0.5370\\ 0.6632\end{bmatrix}\otimes[-0.9725;0.3683;0.9932]+\frac{1}{\sqrt{0.9322}}\begin{bmatrix}1.0237\\ -0.2932\\ 1.3773\\ -1.3773\\ 0.2932\\ -0.8354\\ 0.8355\\ -1.0238\end{bmatrix}\otimes[0.2328;0.9297;-0.1167]$$

$$X=\begin{vmatrix}0.4485 & -0.1698 & -0.6822\\ -1.6250 & 0.6153 & 2.4716\\ -0.8996 & 0.3406 & 1.3683\\ 0.8996 & -0.3406 & -1.3683\\ 1.6250 & -0.6153 & -2.4716\\ -0.3632 & 0.1375 & 0.5523\\ 0.3631 & -0.1375 & -0.5523\\ -0.4485 & 0.1698 & 0.6822\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0.2469 & 0.9858 & -0.1238\\ -0.0707 & -0.2823 & 0.0355\\ 0.3321 & 1.3262 & -0.1665\\ -0.3321 & -1.3262 & 0.1665\\ 0.0707 & 0.2823 & -0.0354\\ -0.2014 & -0.8044 & 0.1010\\ 0.2015 & 0.8045 & -0.1010\\ -0.2469 & -0.9858 & 0.1238\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0.6954 & 0.8159 & -0.8060\\ -1.6957 & 0.3330 & 2.5070\\ -0.5675 & 1.6668 & 1.2017\\ 0.5675 & -1.6669 & -1.2017\\ 1.6957 & -0.3330 & -2.5070\\ -0.5646 & -0.6669 & 0.6534\\ 0.5646 & 0.6670 & -0.6533\\ -0.6954 & -0.8160 & 0.8060\end{vmatrix}$$

3.5. استنتج قيم الجدول R للمعطيات الأولية:

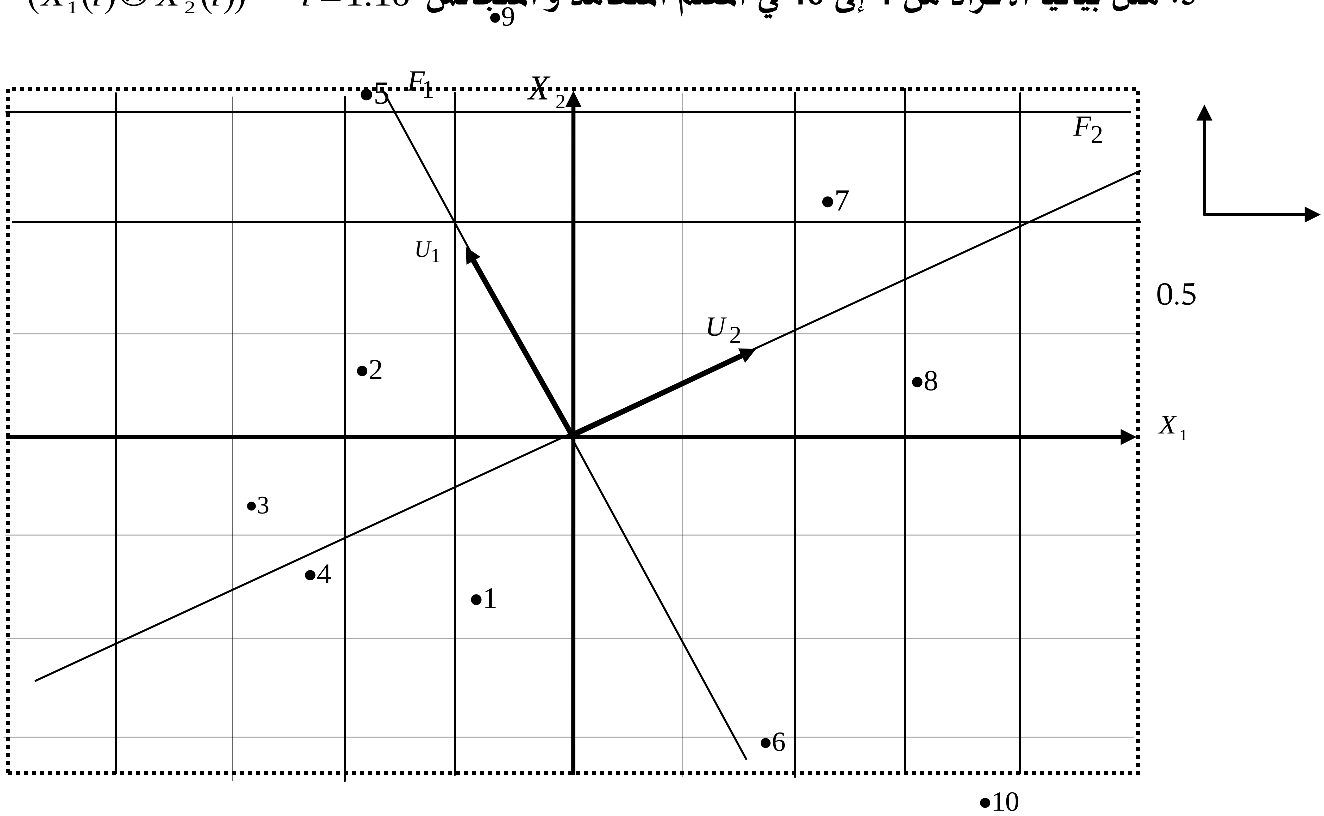
لدينا:
$$X=\left[x_{ij}=\frac{\eta_{ij}-\overline{\eta}_j}{s_j}\right]\Rightarrow R=\left[\eta_{ij}=s_j x_{ij}+\overline{\eta}_j\right]$$

باستعمال المتوسطات و الانحرافات المعيارية للمتغيرات المذكورة في الجدول الأول مع قيم X نجد أن:

المتغير / الأفراد	الطول بالسنتيمتر	الوزن بالكيلو غرام	السعة الرئوية للتنفس باللتر
1	177.43	72.41	2.56
2	151.88	68.03	4.37
3	163.94	80.15	3.66
4	176.06	49.85	2.35
5	188.12	61.97	1.63
6	163.97	58.94	3.36
7	176.03	71.06	2.64
8	162.57	57.59	3.44

التمرين04:

5. مثل بيانياً الأفراد من 1 إلى 10 في المعلم المتعامد و المتجانس $\overline{i=1.10}$ $\left(X_1(i)\otimes X_2(i)\right)$



6. لتكن المركبة الخطية التالية: $F_1=\alpha_1X_1+\alpha_2X_2$ **حيث أن:** $\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2=1$.

1.2. إذا علمت أن F_1 **ذات تباين أعظمي** $V(F_1)$ *Maximale* **، حدد قيم** F_1 **بالنسبة للأفراد السابقين، ثم مثل هذه المركبة في المستوي السابق؛**

بوضع: $x=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}$ و $U_1=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$ نجد أن:
$$\begin{cases}F_1=XU_1=\begin{pmatrix}X_1 & X_2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\alpha_1X_1+\alpha_2X_2\\ U_1'U_1=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2=1\end{cases}$$

و العبارة $U_1'U_1=\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2=1$ تعني أن الشعاع U_1 شعاع وحدة.

و يصبح لدينا تباين F_1 هو:
$$V(F_1)=\frac{F_1'F_1}{n}=\frac{U_1'X'XU_1}{n}$$

و بالتالي يصبح المشكل المطروح هو:
$$\begin{cases}MaxV(F_1)=\dfrac{F_1'F_1}{n}=\dfrac{U_1'X'XU_1}{n}\\ \qquad S/c\\ U_1'U_1=1\end{cases}$$

و لحل هذا المشكل نستعمل دالة لاغرانج فنجد أن: $L(U_1,\lambda_1)=\frac{U_1'X'XU_1}{n}-\lambda_1(U_1'U_1-1)$ و يكون:

$$\begin{cases}\frac{\partial L(U_1)}{\partial U_1}=0\\ \frac{\partial L(U_1)}{\partial \lambda_1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(\frac{X'X}{n}\right)U_1=\lambda_1 U_1\\ U_1'U_1=1\end{cases}$$

و على أساس أن البيانات $X=(X_1\ X_2)$ ممركزة فان المصفوفة $\left(\frac{X'X}{n}\right)$ تمثل مصفوفة التباين و التباين المشترك $V=\left(\frac{X'X}{n}\right)$.

من العبارة التي تحصلنا عليها: $VU_1=\lambda_1 U_1$ يمكننا القول أن U_1 يمثل شعاع ذاتي لمصفوفة التباين و التباين المشترك V و المرفق بالقيمة الذاتية λ_1. غير أن المصفوفة المربعة V ذات البعد 2 تملك قيمتين ذاتيتين، فأي قيمة نأخذ؟

إذا رجعنا إلى المشكل الأصلي المطروح للحل نجد أن الهدف الأساسي هو تعظيم تباين F_1

لدينا: $$V(F_1)=\frac{F_1'F_1}{n}=\frac{U_1'X'XU_1}{n}=\lambda_1(U_1'U_1)=\lambda_1$$

و منه فإننا نأخذ اكبر قيمة ذاتية لـλ_1، وعليه فإننا نقوم أولاً بتحديد قيم مصفوفة التباين و التباين المشترك V:

$$V=\left(\frac{X'X}{n}\right)=\frac{1}{n}\begin{pmatrix}X_1'\\X_2'\end{pmatrix}\otimes(X_1\ X_2)=\begin{bmatrix}V(X_1) & Cov(X_1,X_2)\\ Cov(X_1,X_2) & V(X_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.27 & -0.36\\ -0.36 & 1.81\end{bmatrix}$$

ثم نقوم بحساب القيم الذاتية لـ V:

$$(\lambda\ valeur\ propre\ de\ V)\Leftrightarrow|V-\lambda I_2|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1.27-\lambda & -0.36\\ -0.36 & 1.81-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda_1=1.99\ \wedge\lambda_2=1.09$$

نأخذ القيمة الذاتية $\lambda_1=1.99$ ثم نبحث عن الشعاع الذاتي $U_1=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}$ المرافق لها.

لدينا:

$$(U_1\ vecteur\ propre\ associe\ a\ \lambda_1\ de\ V)\Leftrightarrow(V-\lambda_1 I_2)U_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-0.72 & -0.36\\ -0.36 & -0.18\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

يكون: $$\begin{cases}-0.72u_1-0.36u_2=0\\ -0.36u_1-0.18u_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_1=-0.5u_2\\ u_2\in\Re\end{cases}\Rightarrow U_1=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.5u_2\\u_2\end{pmatrix}=u_2\begin{pmatrix}-0.5\\1\end{pmatrix}\Rightarrow U_1=\begin{pmatrix}-0.5\\1\end{pmatrix}$$

و لدينا طويلة الشعاع U_1 هي: $\|U_1\|=\sqrt{(-0.5)^2+1^2}=1.12\neq1$ و بالتالي يجب جعل U_1 شعاع وحدة:

$$U_1=\begin{pmatrix}-0.5/1.12\\ 1/1.12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.44\\0.90\end{pmatrix}_{norme}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=-0.44\\ \alpha_2=0.90\end{cases}$$

و بالتالي عبارة المركبة الخطية F_1 هي: $F_1=-0.44X_1+0.90X_2$ و بتعويض قيم $X_1;X_2$ في F_1 نجد أن:

الأفراد	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_1	-0.68	0.67	0.21	-0.24	1.79	-1.79	0.46	-0.43	2.47	-2.46

2.2. استنتج المتوسط الحسابي و تباين المركبة F_1؛

$$\overline{F_1}=0 \quad ; \quad Var(F_1)=\lambda_1=1.99$$

7. لتكن المركبة الخطية التالية: $F_2=\beta_1X_1+\beta_2X_2$ حيث أن: $\beta_1^2+\beta_2^2=1$ و $F_2\perp F_1$.

1.3. إذا علمت أن F_2 ذات تباين أعظمي $V(F_2)$ Maximale، حدد قيم F_2 بالنسبة للأفراد السابقين، ثم مثل هذه المركبة في المستوي السابق؛

بنفس الطريقة السابقة يمكننا وضع: $X=(X_1\ X_2)$ و $U_2=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$ نجد أن:

$$\begin{cases} MaxV(F_2)=\dfrac{F_2'F_2}{n}=\dfrac{U_2'X'XU_2}{n} \\ \qquad\qquad S/c \\ U_2'U_2=1 \end{cases}$$

و لحل هذا المشكل نستعمل دالة لاغرانج فنجد أن: $L(U_2)=\dfrac{U_2'X'XU_2}{n}-\lambda_2(U_2'U_2-1)$ و يكون:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(U_2)}{\partial U_2}=0 \\ \dfrac{\partial L(U_2)}{\partial \lambda_2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{X'X}{n}\right)U_2=\lambda_2U_2 \\ U_2'U_2=1 \end{cases}$$

من العبارة التي تحصلنا عليها: $VU_2=\lambda_2U_2$ يمكننا القول أن U_2 يمثل شعاع ذاتي لمصفوفة التباين و التباين المشترك V و المرفق بالقيمة الذاتية λ_2. و من خلال النتائج السابقة $\lambda_1=1.99$ يكون:

$$\lambda_1+\lambda_2=Trace(V)\Rightarrow\lambda_2=1.09$$

لدينا:

$$\left(U_2\ vecteur\ propre\ associe\ a\ \lambda_2\ de\ V\right)\Leftrightarrow(V-\lambda_2I_2)U_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0.18 & -0.36\\ -0.36 & 0.72\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

يكون:
$$\begin{cases}0.18u_1-0.36u_2=0\\ -0.36u_1+0.72u_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_2=0.5u_1\\ u_1\in\Re\end{cases}\Rightarrow U_2=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1\\0.5u_1\end{pmatrix}=u_1\begin{pmatrix}1\\0.5\end{pmatrix}\Rightarrow U_2=\begin{pmatrix}1\\0.5\end{pmatrix}$$

و لدينا طويلة الشعاع U_2 هي: $\|U_2\|=\sqrt{(0.5)^2+1^2}=1.12\neq1$ و بالتالي يجب جعل U_2 شعاع وحدة:

$$U_2=\begin{pmatrix}1/1.12\\ 0.5/1.12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.90\\0.44\end{pmatrix}_{norme}\Rightarrow\begin{cases}\beta_1=0.90\\ \beta_2=0.44\end{cases}$$

و بالتالي عبارة المركبة الخطية F_2 هي: $F_2 = 0.90X_1 + 0.44X_2$ و بتعويض قيم $X_1 ; X_2$ في F_2 نجد أن:

الأفراد	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_1	-0.76	-0.77	-1.44	-1.43	-0.11	-0.07	1.47	1.48	0.78	0.83

2.3. استنتج المتوسط الحسابي و تباين المركبة F_2؛

$$\overline{F_2} = 0 \quad ; \quad Var(F_2) = \lambda_2 = 1.09$$

8. نفترض فيما يلي أن الأفراد:6، 7، 8، 9 و 10 هم ذو جنس ذكر و البقية إناث، في المستوى السابق حدد المركبة التي يمكنها الفصل بين الجنسين؛ المركبة F_1