1. فضاء الاحتمال(Probability model)

1.1 التجربة العشوائية(Random experience)

تعريف:

نسمي التجربة العشوائية E، كل تجربة لا تكون نتيجتها معروفة مسبقا، بل تؤدي بصفة عشوائية إلى عدة نتائج ممكنة.

نسمي فضاء العينة Ω بالمجموعة الأساسية والتي تحتوي على كل النتائج الممكنة للتجربة العشوائية.

مثال:

1) عند رمي زهرة نرد متزنة(لضمان عشوائية التجربة) مرة واحدة فإن النتائج الممكنة لهذه التجربة العشوائية هي: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. لو أن زهرة النرد ذات الستة أوجه تحمل نفس الرقم، تصبح التجربة غير عشوائية لأنها لا تحتمل عدة نتائج ممكنة.

2) نرمي قطعة نقد متزنة مرتين. النتائج الممكنة لهذه التجربة هي: $\Omega=\{PP,PF,FP,FF\}$

ملاحظة:

قد تكون المجموعة الأساسية غير قابلة للعد. كأن نقول نرمي قطعة نقد متزنة حتى الحصول على وجه، تصبح النتائج الممكنة للتجربة العشوائية هي: $\Omega=\{F,PF,PPF,PPPF,PPPPF,.....\}$

.

2.1 الحدث العشوائي(Random event)

تعريف:

نسمي الحدث العشوائي A، كل حدث جزئي من المجموعة الأساسية أو كل حدث يتحقق انطلاقا من نتائج التجربة العشوائية بشرط أن تكون Ω مجموعة منتهية.

مثال:

عند رمي زهرة النرد المتزنة مرة واحدة، تكون المجموعة الأساسية: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

- نسمي الحدث A : الحصول على الرقم 1. إذن: $A=\{1\}$. (حدث جزئي من Ω)
- نسمي الحدث B : الحصول على عدد زوجي. إذن: $B=\{2,4,6\}$. (حدث جزئي يتحقق انطلاقا من Ω)

عمليات على الأحداث العشوائية:

1) نسمي الحدث العكسي لـ A ونرمز له بالرمز $\overline{A}$، متم A في Ω ونكتب:

$$\overline{A}=\{\omega\in\Omega:\omega\notin A\}$$

$$\overline{A}\cup A=\Omega$$

مثال:

عند رمي قطعة نقد متزنة مرة واحدة، إذا كان الحدث A هو الحصول على وجه: $A=\{F\}$، فإن الحدث العكسي $\overline{A}$ هو الحصول على كتابة: $\overline{A}=\{P\}$ حيث أن $\overline{A}\cup A=\Omega$.

2) نسمي Ω بالحدث الأكيد ونسمي المجموعة الخالية $\{\ \}$ بالحدث المستحيل.

3) لتكن لدين الحدثين العشوائيين A و B:

- $A\subset B$ محقق يعني أنه إذا تحققت A فإن B محققة
- الحدث $A\cup B$ محقق إذا A أو B محققة: $A\cup B=\{\omega\in\Omega:\omega\in A ou \omega\in B\}$
- الحدث $A\cap B$ محقق إذا A و B محققة: $A\cap B=\{\omega\in\Omega:\omega\in A et \omega\in B\}$

- نقول عن A و B أنهما حدثين مانعين(Incompatibles) إذا: $A\cap B=\phi$. ومن الواضح أن الحدثين A و $\overline{A}$ دوما مانعين

3.1 الاحتمال(Probability)

قبل التطرق لتعريف الاحتمال، لابد من الإشارة إلى أن الثنائية $(\Omega,\Im)$ تشكل الفضاء الاحتمالي(Probabilistic space) بحيث تمثل $\Im$ مجموعة أحداث Ω المتعلقة بالتجربة العشوائية بحيث أنه:

- إذا كان $A\in\Im$ فإن $\overline{A}\in\Im$
- من أجل كل عائلة الأحداث العشوائية $(A_n)_{n\geq 0}$، لدينا: $\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n\in\Im$

تعريف:

نسمي احتمال في الفضاء $(\Omega,\Im)$ كل تطبيق P من $\Im$ في $[0,1]$ بحيث أن:

1) $P(\Omega)=1$

2) إذا كانتا A و B حدثين عشوائيين مانعين إذن: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

3) إذا كانت $(A_n)_{n\geq 0}$ عائلة الأحداث العشوائية المانعة مثنى مثنى، فإن: $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(A_n)$

نسمي الآن الثلاثية $(\Omega,\Im,P)$ بفضاء الاحتمال(Espace de probabilité)، ويمكن حساب الاحتمال بالعلاقة التالية: $\forall A\in\Im$ فإن:

$$P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

حيث:

$card(A)$: يمثل أصلي أو عدد الحالات الملائمة(Favorables)

$card(\Omega)$: يمثل أصلي أو عدد الحالات الممكنة(Possibles)

مثال:

1) نسمي الحدث A : الحصول على عدد زوجي عند رمي زهرة نرد متزنة مرة واحدة. احتمال A هو:

$$P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

2) نسمي الحدث ω : الحصول على العدد i عند رمي زهرة نرد متزنة مرة واحدة، حيث $i=\overline{1,6}$. احتمال ω هو دائما: $P(\omega)=\frac{1}{card(\Omega)}=\frac{1}{6}$، هذا الاحتمال يسمى أحادي الشكل ويعني إن كل الأحداث الجزئية لـ Ω لها نفس احتمال الحدوث.

مثال:

نرمي زهرة نرد متزنة مرتين: المجموعة الأساسية هي: $\Omega=\{(1;1),(1,2),...,(6,6)\}=6\times 6=36$

نعرف الحدث A : مجموع العددين الظاهرين يساوي 4. إذن:

$A=\{(1;3),(3,1),(2,2)\}\Rightarrow card(A)=3$.

احتمال A هو: $P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{3}{36}$

خصائص:

إذا كانتا A و B حدثين عشوائيين، لدينا:

1) $0 \le P(A) \le 1$ و $P(\overline{A})=1-P(A)$، وتسمى بنظرية الاحتمال العكسي وتستعمل عادة إذا كان من الصعب إيجاد احتمال A

2) $P(\phi)=0$

3) إذا $A \subset B$ فإن $P(A) \le P(B)$

4) إذا كانت Ω قابلة للعد، إذا: $P(A)=\sum_{\omega \in A} P(\omega)$

5) قانون بوانكاري(Poincaré): $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

6) قانون كريبل(Crible): $P(A_1\cup A_2\cup \ldots \cup A_n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k P(A_1\cap A_2\cap \ldots \cap A_n)$

حالة خاصة بالنسبة لثلاثة أحداث عشوائية A، B و C لدينا:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

2. الاحتمال الشرطي والاستقلالية(Conditional probability independence)

1.2 الاحتمالات الشرطية(Conditional probability)

تقديم:

نرمي زهرة نرد متزنة مرتين. تكون لدينا المجموعة الأساسية: $\Omega=\{(1,1),(1,2),\ldots,(6,6)\}$، إذا $card(\Omega)=36$. حيث أن كل الأحداث الجزئية لـ Ω لديها نفس احتمال الحدوث وهو $1/36$.

ليكن الحدث A : مجموع النقاط ≥ 10. إذن: $A=\{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$، ومنه:

$$P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

نفترض الآن الأحداث B_i : نتيجة النرد الأولى تساوي i، حيث $i=\overline{1,6}$. نأخذ الآن كمثال B_5:

$$B_5=\{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,6)\}$$

- إذا تحقق الحدث B_1 فإن الحدث A لا يتحقق(Irréalisable) لأن مجموع النقاط لا يتجاوز 7. نقول أن الاحتمال الشرطي للحدث A إذا تحقق الحدث B_1 يساوي 0 ونرمز له بالرمز $P(A/B_1)=0$
- إذا تحقق الحدث B_5 فإن للحصول على المجموع يساوي 10، لابد أن تكون نتيجة النرد الثانية 5 أو 6 إذن: $P(A/B_5)=1/6+1/6=1/3$.

نلاحظ أن الحدث $A\cap B_5$ هو: $A\cap B_5=\{(5,5),(5,6)\}$ أي أن: $P(A\cap B_5)=2/36=1/18$. بالإضافة إلى أن احتمال الحدث B_5 هو: $P(B_5)=6/36=1/6$. بقسمة $P(A\cap B_5)$ على $P(B_5)$ نجد أنه يساوي $P(A/B_1)$ كما يلي: $P(A/B_1)=\frac{P(A\cap B_5)}{P(B_5)}=\frac{1/18}{1/6}=\frac{1}{3}$ ومنه نستنتج تعريف الاحتمال الشرطي.

تعريف:

ليكن $(\Omega,\Im,P)$ فضاء الاحتمال، وليكن A و B حدثين عشوائيين بحيث أن $P(B)\neq 0$. نسمي الاحتمال الشرطي لـ A علما أن B محقق العدد الحقيقي:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

بحيث أن $P(B)=0$ فإن الاحتمال الشرطي غير معرف.

ملاحظات:

1) من أجل A في $\Im$ لدينا $0\leq P(A/B)\leq 1$ لأن $(A\cap B)\subset B$. بالإضافة إلى ذلك:

$$P(\Omega/B)=\frac{P(\Omega\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$$

2) إذا كان الحدثين A و C مانعين فإن:

$$P(A\cup C/B)=\frac{P((A\cup C)\cap B)}{P(B)}=\frac{P((A\cap B)\cup(C\cap B))}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}+\frac{P(C\cap B)}{P(B)}=P(A/B)+P(C/B)$$

3) إذا كانت $(A_n)_{n\geq 0}$ عائلة أحداث مانعة مثنى مثنى فإن:

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n\Big/B\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(A_n/B)$$

4) لدينا: $P(\overline{A}/B)=1-P(A/B)$

2.2 قانون الاحتمالات المركبة(Multiplication formula)

ليكن A و B حدثين عشوائيين، انطلاقا من العلاقة (*)، يمكن أن نكتب:

$P(A\cap B)=P(A)P(B/A)$ إذا كان $P(A)\neq 0$

أو $P(A\cap B)=P(B)P(A/B)$ إذا كان $P(B)\neq 0$.

ونسمي $P(A\cap B)$ بالاحتمال المركب.

أكثر تعميم إذا كان $A_1,A_2,...,A_n$ n حدث عشوائي مع $P(A_i)\neq 0$، لدينا:

$$P(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)...P(A_n/A_1\cap A_2\cap...\cap A_{n-1})$$

مثال:

لدينا صندوق يحتوي على 10 كريات(5حمراء، 3زرقاء، 2بيضاء). نسحب بدون إرجاع 3 كريات من الصندوق. أحسب احتمال الحصول بالترتيب على كريه حمراء، كريه زرقاء وكريه بيضاء.

نعرف الأحداث التالية:

A: الكريه الأولى المسحوبة حمراء.

B: الكريه الثانية المسحوبة زرقاء،

C: الكريه الثالثة المسحوبة بيضاء.

نبحث عن الاحتمال $P(A\cap B\cap C)$. باستعمال قانون الاحتمالات المركبة، لدينا:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B/C)P(C/A\cap B)=?$$

لدينا: $P(A)=5/10$ ، $P(B/C)=3/9$ ، $P(C/A\cap B)=2/8$ إذن:

$$P(A\cap B\cap C)=5/10\times 3/9\times 5/10=1/24$$

3.2 قانون الاحتمالات الكلية(Law of total probability)

ليكن A و B حدثين عشوائيين، مع $P(A)\neq 0$ و $P(A)\neq 1$ ، يمكن أن نكتب:

$$P(B)=P(A)P(B/A)+P(\overline{A})P(B/\overline{A})$$

ونسمي $P(B)$ بالاحتمال الكلي.

أكثر تعميم، إذا كانت $(A_i)_{i\in I}$ تشكل تقسيم لـ Ω، يعني أن $\Omega=\bigcup_{i\in I} A_i$ ومن أجل $i,j\in I$ مع $i\neq j$ فإن الأحداث مانعة مثنى مثنى $A_i\cap A_j=\phi$، لدينا:

$$P(B)=\sum_{i\in I} P(A_i)P(B/A_i)$$

مثال:

لدينا 3 قطع نقدية، حيث أن القطعة الأولى متزنة، القطعة الثانية تحتوي على كتابتين(2P) والقطعة الثالثة تحتوى على وجهين(2F). نسحب عشوائيا قطعة نقدية. احسب احتمال الحصول على كتابة(P).

نعرف الحدثين التاليين:

A_i: سحب القطعة i، بحيث $i=1,2,3$

B: الحصول على كتابة(P).

نبحث عن الاحتمال $P(B)$. باستعمال قانون الاحتمالات الكلية، لدينا:

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)$$

لدينا: $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=1/3$ ، $P(B/A_1)=1/2$ ، $P(B/A_2)=2/2=1$ ، $P(B/A_3)=0/2=0$ إذا:

$$P(B)=1/3\times 1/2+1/3\times 1+1/3\times 0=1/2$$

3. تمارين مقترحة محلولة

تمرين(1):

صندوق يحتوي على كريات متشابهة: كريه خضراء تحمل الرقم1، كريه خضراء تحمل الرقم2، كريتين سوداوين تحملان الرقم1 و N كريه سوداء تحمل الرقم2. نفترض أن: $N=4$. وكانت لدينا الأحداث التالية:

E: الحصول على كريه خضراء.

F: الحصول على كريه تحمل الرقم1.

نسحب ثلاث كريات من الصندوق.

1) أحسب احتمال الأحداث التالية: E ، F ، $E\cap F$ ، $E\cup F$.

2) هل الحادثتين E و F مستقلتين أو مانعتين ؟(مع التعليل).

3) ما هي قيمة N حتى يكون احتمال الحصول على الأقل على كريه خضراء يساوي 7/12.

الحل:

لدينا: (2 كريه خضراء و $N+2$ كريه سوداء) و(3 كريات تحمل الرقم1 و $N+1$ كريه تحمل الرقم2). بما أن $N=4$ يصبح لدينا: (2 كريه خضراء و6 كريه سوداء) و(3 كريات تحمل الرقم1 و5كريه تحمل الرقم2).

سنقوم باستعمال التوفيقات لإيجاد أصلي الأحداث العشوائية لأن السحب بدون إرجاع وترتيب الكريه المسحوبة غير مهم.

(1 $P(E)=\dfrac{card(E)}{card(\Omega)}=\dfrac{C_2^1\times C_6^2}{C_8^3}=\dfrac{15}{28}$ ، $P(F)=\dfrac{card(F)}{card(\Omega)}=\dfrac{C_3^1\times C_5^2}{C_8^3}=\dfrac{15}{28}$

$$P(E\cap F)=\frac{card(E\cap F)}{card(\Omega)}=\frac{C_1^1\times C_1^0\times C_2^0\times C_4^2}{C_8^3}+\frac{C_1^1\times C_1^0\times C_2^1\times C_4^1}{C_8^3}=\frac{1}{4}$$

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)=\frac{23}{28}$$

2) الحدثين غير مانعين لأن $P(E\cap F)\neq 0$ وغير مستقلين لأن $P(E\cap F)\neq P(E)\times P(F)$

3) لدينا A : الحصول على الأقل على كريه خضراء. نستعمل الاحتمال العكسي لـ A لتسهيل الحساب وبالتالي يصبح $\overline{A}$: عدم الحصول على كريه خضراء. كما يلي:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{card(\overline{A})}{card(\Omega)}=1-\frac{C_{N+2}^{3}}{C_{N+4}^{3}}$$

بحث عن N بحيث $P(A)=\frac{7}{12}$ ، لدينا: $1-\frac{C_{N+2}^{3}}{C_{N+4}^{3}}=\frac{7}{12}$ ومنه $\frac{7}{12}N^{2}-\frac{23}{12}N-5=0$

نجد جذر واحد موجب هو $N=5$.

تمرين(2):

ليكن لدينا مجموعة من أزهار النرد المتزنة.

1) ما هو احتمال الحصول على الأقل على الرقم6 عند رمي أربع مرات زهرة نرد.

2) ما هو احتمال الحصول على الأقل مرة واحدة على الثنائية$(6,6)$ عند رمي 24 مرة زهرتي نرد.

الحل:

لدينا الحدثين:

A : الحصول على الأقل على الرقم6 عند رمي أربع مرات زهرة نرد.

B : الحصول على الأقل مرة واحدة على الثنائية$(6,6)$ عند رمي 24 مرة زهرتي نرد.

1) لتسهيل الحساب، نستعمل الحدث العكسي لـ A وهو $\overline{A}$: عدم الحصول على الرقم6 عند رمي أربع مرات زهرة نرد. كما يلي: $card(\overline{A})=5$ و $card(\Omega)=6$. عدد الرميات هو 4:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{card(\overline{A})}{card(\Omega)}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{4}$$

إذن: $\underline{P(A)\approx 0.51}$

2) لتسهيل الحساب كذلك، نستعمل الحدث العكسي لـ B وهو $\overline{B}$: عدم الحصول على الثنائية $(6,6)$ عند رمي 24 مرة زهرتي نرد. كما يلي: $card(\overline{B})=35$ و $card(\Omega)=36$. عدد الرميات هو 24:

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{card(\overline{B})}{card(\Omega)}=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

إذن: $\underline{P(B)\approx 0.49}$

تمرين(3):

قمنا بإجراء سبر أراء حول مدى قراءة الأشخاص لثلاث مجلات مختلفة. بعد استجوابنا لـ 2000 شخص حصلنا على النتائج التالية: 650 شخص يقرؤون(L'equipe)، 550 شخص يقرؤون(Onze-Mondial)، 600 شخص يقرؤون(Economica)، 200 شخص يقرؤون(L'equipe et Onze-Mondial)، 195 شخص يقرؤون(L'equipe et Economica)، 50 شخص يقرؤون(Onze-Mondial et Economica) و50 شخص يقرؤون كل المجلات الثلاث.

1) وسيم من بين 2000 شخص المستجوبين، ما هو احتمال أنه لا يقرأ كل المجلات الثلاث ؟

2) إذا علمنا أن وسيم يقرأ(L'equipe)، ما هو احتمال أنه يقرأ(Economica) ؟ هل الحادثتين السابقتين مستقلتين ؟

3) تقوم إحدى الشركات المتخصصة في إنتاج مواد التجميل بوضع إعلاناتها في مجلة(Economica). إذا رغب مسؤول هذه الشركة أن يضع إعلانات أخرى في مجلة إضافية. أي المجلتين يختار(L'equipe) أو(Onze-Mondial) ؟

الحل:

لدين الأحداث التالية:

A : وسيم يقرأ L'equipe.

B : وسيم يقرأ Onze-Mondial.

C : وسيم يقرأ Economica.

1) نبحث عن الاحتمال التالي $P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$. بإستعمال خاصية مورقان(Morgan) والاحتمال العكسي لتسهيل الحساب كما يلي:

$$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}\Rightarrow P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)$$

ومنه بإستعمال قانون كريبل(Crible)، تصبح العلاقة السابقة:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)]$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=1-\left[\frac{650}{2000}+\frac{550}{2000}+\frac{600}{2000}-\frac{200}{2000}-\frac{150}{2000}-\frac{50}{2000}+\frac{50}{2000}\right]=\frac{595}{2000}$$

إذن: $\underline{P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=0.2975}$

2) المقصود من السؤال هو حساب الاحتمال الشرطي $P(C/A)$ لأن الحدث A محقق:

$$P(C/A)=\frac{P(C\cap A)}{P(A)}=\frac{195/2000}{650/2000}$$

إذن: $\underline{P(C/A)=0.3}$

نلاحظ أن: احتمال $P(C)=\frac{600}{2000}=0.3$ يساوي $P(C/A)==0.3$ ، يعني أن:

$P(C/A)=\frac{P(C\cap A)}{P(A)}=\frac{P(C)\times P(A)}{P(A)}=P(C)$ ومنه الحدثين A و C مستقلين.

3) بما أن الشركة المتخصصة في إنتاج مواد التجميل توضع إعلاناتها في مجلة(Economica)، نبحث عن النسبة الأكبر من القراء الذي يقرؤون(L'equipe) ولا يقرؤون(Economica) ويقرؤون(Onze-Mondial) ولا يقرؤون(Economica) كما يلي:

$$P(A)-P(A\cap C)=\frac{650}{2000}-\frac{195}{2000}=\frac{455}{2000}=0.22$$

and

$$P(B)-P(B\cap C)=\frac{550}{2000}-\frac{50}{2000}=\frac{500}{2000}=0.25$$

إذن: $\underline{0.25\succ 0.22}$ ، ومنه يختار مسؤول الشركة مجلة(Onze-Mondial).