المحتويات	الصفحة

تقديم

لقد دفعنا إلى كتابة ونشر كتاب الأساليب الكمية وتطبيقاتها في العلوم الاقتصادية الرغبة بشكل أساسي في إفادة الطلبةالجامعيينسواء للذين هم بصدد التحضير لشهادة الليسانس أو الماستر في الاقتصاد والإحصاء التطبيقي وكل التخصصات ذات الصلة، إضافة إلى إثراء وتزويد المكتبة الجزائرية بالمناهج الكمية في علم الاقتصاد والتي شهدت رواجاً واهتماماً كبيرين في مجالات البحث العلمي في السنوات الأخيرة، وتعتبر الأساليب الكمية الدعامة الأساسية التي يرتكز عليها الاقتصاد التطبيقي أو الكمي ولهذا السبب ارتأينا أن يكون هذاالكتاب بين أيدي الطلبة والباحثين ليوضح لهم المبادئ الأساسية لهذا المنهج.

ويعتبر تطبيق الأساليب الكمية ضمن العلوم الاقتصادية من أهم المناهج التي ظهرت وتطورت في العصر الحديث،فهي تعمل على جمع البيانات المتعلقة بظاهرة اقتصادية ما وصياغتها بشكل رقمي وكمي بهدف تحديد مسبباتها وتحديد اتجاهها وضبط سلوكها وتطورها في المستقبل. وضمن هذا الكتاب قمنا بمناقشة النظريات والمفاهيم الأساسية الكامنة وراء كل موضوع دون اللجوء للكثير من البراهين الرياضية غير ضرورية وهذا بغرض تسهيل استعمال الطرق والأساليب الكمية ضمن العلوم الاقتصادية، بحيث تما شرح وتوضيح أهم النظريات التي تدخل ضمن عناصر هذا الكتاب مع أمثلة تطبيقية تدعم وتوضح كيفية التعامل مع هذه النظريات أو النماذج في الجانب التطبيقي حيث تما الاستعانة بالبرنامج الإحصائي Eviewsإذا اقتضى الأمر ذلك مع تقديم شرح مفصل للنتائج وربطها بوقائع اقتصادية.

وضمن الأساليب الكمية يمكننا أن نميزبين نوعين من الإحصاء، وهما الإحصاء الوصفي(Descriptive statistics) والإحصاء الرياضي أو الاستدلالي(Inferential statistics)، فالإحصاء الوصفي يعتبر المرحلة أو الخطوة الأولى في الطريقة والدراسة الإحصائية، فهو يهتم بالبحث عن المعلومات حول الظاهرة المدروسة وعرض المشاهدات سواء كانت كمية أو كيفية ومعالجتها لتكون قابلة للدراسة والتحليل، فهو إذا يعتمد على المعطيات العددية، أما الإحصاء الاستدلالي والذي يمثل الجزء الأكبر من علم الإحصاء الحديث ولوجود معطيات غير عددية فيعتمد على مجموعة النظريات والمفاهيم في مجال الرياضيات والقوانين الاحتمالية وهذا لوضع أسس وفرضيات يهدف من خلالها بناء وتحديد نماذج رياضية وتقديرها، حيث تدرس العلاقات واتجاهاتها (طرديةأوعكسية) بين مختلف الظواهر ومدى ارتباطهاببعضها البعض أو التنبؤ القيم ظاهرة ما مستقبلا، وبهذا يعتبر الإحصاء الاستدلالي الأساس في اتخاذ القرارات المناسبة لرسم الخطط والسياسات المختلفة للمجتمع محل الدراسة. إن من أهم أهداف علم الإحصاء هو استقراء النتائج واتخاذ القرارات السليمة والموثوقة، فمن خلال تطبيق أدوات الإحصاء وبناءا على المعطيات التي تمثل الواقع المدروس وهذا في أي مجال، يمكن البحث ودراسة العلاقات بين أهم المتغيرات وحساب تأثيراتها، وانطلاقا من نتائج التحليل الإحصائي يمكن فهم الظاهرة المدروسة ومعرفة أهم العوامل المرتبطة بها أو المؤثرة فيها ويساعد هذا في اتخاذ القرار المناسب ورسم السياسات الملائمة مستقبلا، ففي المجال الاقتصادي وعلى المستوى الكلي عند دراسة ظاهرة الاستهلاك الخاصبقطاع العائلات الجزائرية مثلا وباستعمال طرق القياس الاقتصادي(Econometric) وبناءا على المعطيات الممثلة لواقع الأسر الجزائرية يمكن تحديد النموذج الأفضل المفسر لسلوك استهلاك الأسر حيث لوحظ في

هذه الدراسة أن الدخل هو العامل الرئيسي المحدد الاستهلاك الأسر الجزائرية وبالتالي إذا أرادت الدولة أن ترفع من حجم الاستهلاكالاعتباراتاقتصادية منها طبعا زيادة حجم الطلب على السلع والخدمات حتى ترفع من وتيرة النشاط الاقتصادي فترفع من مستوى الأجور حتى يتحقق ذلك، ولاشك أن هذه السياسة كانت مبنية على الدراسة القياسية لظاهرة الاستهلاك، وعلى المستوى الجزئي إذا أرادت مؤسسة ما التنبؤ الحجم مبيعاتها حتى تتجنب الخسائر وتحافظ أو تحاول تحسين مستوى أدائها مستقبلا يستعمل في مجال التنبؤ نماذج السلاسل الزمنية(Time series models) وهذا انطلاقا من سلسلة المعطيات السابقة الخاصة بقيم حجم المبيعات فتتمكن المؤسسة وبمستوى ثقة أكبر من معرفة قيمة الطلب على منتجاتها في الفترة القادمة مما يمكنها من التحكم في مواردها أو البرمجة والتخطيط لمستقبلها عموما، وهكذا وفي جميع المجالات يلاحظ هنا مدى فاعلية استخدام طرق الإحصاء.

ومن اجل الصياغة المنهجية والعلمية لهذا الكتاب قمنا بتقسيمه إلى ثلاثة فصول، ففي الفصل الأول نضع مدخل للإحصاء الوصفي حيث في البداية نهتم بطريقة عرض وتنضيد البيانات الإحصائية ثم نقدم أهم مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت والشكل، ونتطرق فيما بعد للتوزيعات ذات المتغيرين ضمن الجداول الإحصائية ذات البعدين لنختم هذا الفصل بالأرقام القياسية وخصائصهامدعماً بأمثلة توضيحية. وضمن الفصل الثاني نجد بعض المفاهيم الأساسية المتعلقة بالمجموعات وكيفية تشكيل أجزاء المجموعات وهذا كمدخل لنظرية الاحتمالات، كما أننا نوضح طرق العد أي كيفية تشكيل المجموعات الجزئية وحساب عدد عناصرها ويعتبر هذا ضروري للانتقال لنظرية الاحتمالات والتي نهتم من خلالها بشرح مفهوم الاحتمال وخصائصه وعندئذ نتطرق لاحتمال الشرطي ونظرية الاحتمال الكلي، ولقد خصصنا الجزء الأخير من هذا الفصل للمتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية الأكثر استخداما.

أما بخصوص الفصل الثالث والأخير ضمن هذا الكتاب فإننا نعمل على تلخيص أهم الخطوات الضرورية في عملية نمذجة الظواهر الاقتصادية وتحديد النموذج الملائم والمناسب لبيانات عينة الدراسة، كما أننا نهتم باختبار صلاحية نتائج التقدير ومدى توافقها مع الفرضيات الأساسية للنموذج ثم نتطرق لأهم خطوة وهي شرح النتائج اقتصادياً وتقديم تفسير للنتائج ومدى توافقها مع النظرية الاقتصادية ويكون ذلك عن طريق مثال تطبيقي للتوضيح.

الفصل الأول:

مدخل للإحصاء الوصفي

تمهيد

إن كلمة الإحصاء باللغة الإنجليزية هي(Statistics) وهي مشتقة من كلمة (State) وتعني باللغة العربية الدولة أو كلمايتعلق بشؤون الدولة(الحقائق المرتبطة بأمورالدولة من الناحية التنظيمية) أي ارتباط هذا العلم منذ نشأته بالتوصيف الرقميللأوضاع الاقتصادية والسياسية والسكانية والاجتماعية للدولة، وترجع أصول كلمة(Statistics) على يد العالم الألماني أشن فال(G.Achenwalle) وهذا فيمنتصف القرن الثامن عشر، وظهرت كلمة (Statistics) لأول مرة في الموسوعة البريطانية سنة 1797، وتخطت الدراسات المرتبطة بهذا العلم حدود الدولة لتشمل مختلف المجالات الأخرى، فتطور هذا المفهوم وأصبح متعلق بجميع مجالات المعرفة(الطبيعية، الاجتماعية، الإنسانية، كما توسعت أهداف، هذا العلم لتسعى في فهم وإدراك حقائق ما يعرف بما وراء الأرقام أو ما يعرف كذلك بالتحليل الإحصائي وباللغة الفرنسية كلمة الإحصاء هي(LaStatistique) أي علم الإحصاء أما كلمة(Les Statistiques) فتعني مجموعة المعلومات أو المعطيات أو البيانات. يعرف علم الإحصاء(The statistics) على أنه مجموعة الأدوات العلمية والطرق الرياضية التي تهتم بجمع وترتيب وتنظيم المعطيات المعلومات حول ظاهرة معينة سواء كانت هذه الظاهرة اجتماعية أو اقتصادية أوطبيعية وذلك في جداول إحصائية ثم تمثيلها في أشكال بيانية مناسبة، كما يحسب في هذا المجال بعض المقاييس العددية تساعد على تحليل وتفسير الظاهرة المدروسة وبالتالي أخذ الصورة أو الفكرة العامة حولها، والهدف هنا يكمن أساسا في اتخاذ قرارا سليما ومناسبا في المجال المدروس.

I. عرض البيانات الإحصائية

1. بعض المفاهيم الإحصائية

1.1الوحدة الإحصائية(Statistical unit):هي الوحدة الأساسية لتكوين المجتمع الإحصائي.

2.1المجتمع الإحصائي(The statistical population):هو مجموعة الوحدات الإحصائية التي من خلالها يقوم الباحث بدراستها.

3.1 العينة(Sample):هي جزء من المجتمع الإحصائي والذي يمثل المجتمع أحسن تمثيل، وهي مجموعة جزئية من البيانات أو القيم الخاصة بالظاهرة المدروسة، حيث يختلف حجم العينة حسب أهمية الدراسة وحسب الإمكانيات المادية والبشرية المتاحة، وأسلوب العينة متبع في أغلب الدراسات الميدانية، وهذا لعدم إمكانية جمع المعلومات الإحصائية من كل الوحدات التي تشكل المجتمع المدروس أو ما يسمى بالحصر الشامل(المسح الشامل). هنالك عدة أنواع من العينات وهي:

أ. العينة العشوائية(Random sample)

وهي أكثر العينات استعمالا وهي جزء لا على تعيين من المجتمع المدروس، حيث يتم اختيار عناصرها بطريقة عشوائية، مع إعطاء فرص متكافئة(نفس الاحتمال) الجميع مفردات المجتمع عند السحب، كما أن طريقة الاختيار تتم وفق قواعد وأسس معروفة، ولاختيار هذا النوع من العينات نتبع الخطوات التالية: .

- ترتب عناصر المجتمع ترتيبا عشوائيا، حيث نعطي لكل عنصر من عناصر المجتمع رقما متسلسلا من 0 إلى N،فإذا كان حجم المجتمع 1000، نعطي لكل عنصر الأرقام التسلسلية التالية، 0001، 0002،....، 1000.
- نستعمل جدول الأرقام العشوائية، ثم نقرأ من هذا الجدول عموديا، حيث نختار الأعداد المكونة من 4 أرقام نقبل الأعداد المذكورة في الأرقام التسلسلية، ونرفض العدد غير المذكور في الأرقام التسلسلية، كما نرفض العدد الذي أخذنا في القراءة السابقة، وتنتهي عملية الاختيار عند حجم العينة المطلوب. إن أسلوب اختيار العينة العشوائية قد يكون سحبا بالإرجاع (إمكانية اختيار عنصرا اختير في المرة السابقة)، أو قد يكون سحبا بدون إرجاع(نرفض العدد الذي اختير في القراءة السابقة.العينة العشوائية المجتمعات المتجانسة أي التي لها خصائص متشابهة أو متقاربة.
- نختار ولاية من ولايات الوطن، نختار دائرة من دوائر الولاية المختارة، نختار ثانوية من ثانويات الدائرة، نختار قسم من أقسام الثانوية، ثم تجرى الدراسة على القسم المختار من الثانوية.

ب. العينة العنقودية(Cluster sample)

لقد أشرنا سابقا أنه يتعذر على أغلب الدراسات الميدانية اللجوء إلى طريقة المسح الشامل نظرا للظروف المرتبطة بعوامل الزمن والجهد والتكاليف(مستوى الإمكانات المادية والبشرية المتوفرة)، لهذا يلجأ الباحثون في بعض الدراسات إلى أسلوب العينة العنقودية، ولاختيار هذا النوع من العينات نقوم في البداية بتقسيم المجتمع إلى مجموعات جزئية، يسمي كل جزء منها عنقودا، ثم نختار من كل عنقود عينة عشوائية، والعينة المتحصل عليها ككل هي عينة

عنقودية.فمثلا عند دراسة السلوك الاستهلاكي للعائلات تجاه منتوج معين في منطقة ما(محافظة أو ولاية)، ولاختيار عينة مكونة من مجموعة من العائلات نحدد دوائر الولاية، ثم نحدد بلديات الدوائر، بعدها نسجل أحياء كل بلدية، فتصبح كل(دائرة- بلدية-حي) عنقودا، وفي المرحلة الأخيرة نختار من كل حي مجموعة من الأسر وبالتالي تغطي عينةالعائلات التي ستجرى عليها الدراسة تراب الولاية أو المحافظة.

ت. العينة المعيارية(Standard sample)

يسعى الباحثون عند تحديد عينة الدراسة أن تكون هذه العينة ممثلة للمجتمع أحسن تمثيل(تمثيلا صادقا)، والتمثيل الصادق إحصائيا هو أن تتقارب المقاييس الإحصائية(الوسط والانحراف المعياري) للعينة مع المقاييس ذاتها للمجتمع، ويسمى هذا النوع من العينات بالعينة المعيارية.

2. أنواع الصفات أو المتغيرات(الخصائص)

1.2الصفة الكيفية النوعية(Qualitative variable): هي تلك المتغيرات التي لا يمكن قياسها أو غير قابلة للقياس،مثلا:الجنسية، اللون، المستوى التعليمي، .. إلخ.

2.2الصفة الكمية(Quantitative variable):هي تلك الخصائص التي يمكن قياسها وهي أكثر استعمالاوانتشار، مثلا:الطول، الوزن، المساحة، .. إلخ.

3. الجداول الإحصائية(Statistical tables)

1.3تكوين الجدول الإحصائي

إذا كان لدينا مجتمع إحصائي مكون من N وحدة إحصائية، حيث يدرس هذا المجتمع من عدة صفات أو متغيرات (كمية أو كيفية) فيمكن تمثيل هذه المعطيات أو المعلومات في جدول مكون من أعمدة وأسطر وهذا حسب عدد المتغيرات وعدد الوحدات الإحصائية التي تحمل الصفة.

ملاحظة:

في الجدول الإحصائي دائما يمثل العمود الأول المتغير المدروس.

مثال: توزيع سكنات حي 100 سكن حسب عدد الغرف.

المتغير : X_i (عدد الغرف)	التكرار المطلق (عددالسكنات) n_i	التكرار النسبي f_i	التكرار المتجمع الصاعد $F\uparrow$	التكرار المجمع النازل $F\downarrow$
02	25	0.25	25	100
03	30	0.30	55	75
04	30	0.30	85	45
05	15	0.15	100	15
المجموع	100	01	-	-

من خلال الجدول الإحصائي السابق نلاحظ أن:

- أن نسبة السكنات التي لها 3 غرف هي 25 بالمائة.
- أن نسبة السكنات التي لها 4 غرف هي 30 بالمائة.
- أن نسبة السكنات التي لها3 غرف على الأكثر هي 55 بالمائة(أنظر التكرار المتجمع الصاعد).
- أن نسبة السكنات التي لها4 غرف على الأكثر هي 85 بالمائة(أنظر التكرار المتجمع الصاعد).
- أن نسبة السكنات التي لها 3 غرف على الأقل هي 75 بالمائة(أنظر التكرار المتجمع النازل).
- أن نسبة السكنات التي لها 4 غرف على الأقل هي 45 بالمائة(أنظر التكرار المتجمع النازل).

2.3شروط تكوين الجدول الإحصائي

إن شروط تكوين الجدول الإحصائي هي كالتالي:

- عنوان واضح في أعلى الجدول يعطي فكرة واضحة عن البيانات التي يحتويها هذا الجدول؛
- ذكر وتحديد عنوان لكل عمود، مع ترتيب المعطيات ترتيبا تصاعديا أو تنازليا(من الأفضل تصاعديا)؛
- ذكر وحدة القياس المستعملة؛
- ذكر مصدر البيانات في أسفل الجدول حتى يتمكن القارئ من الرجوع إلى المصدر الأصلي للمعلومة؛
- وضع رقم الجدول(حالة وجود عدة جداول في دراسة ما).

3.3طريقة(Sturge) لتحديد طول الفئات

في حالة الصفة الكمية المستمرة فإن أغلب الدراسات في هذه الحالة تتطلب وضع مجالات أو فئات(Classes) وهذا بسبب وجود عدد كبير من القيم للمتغير الإحصائي X، حيث يحدد عدد الفئات وطولها حسب حجم العينة المأخوذة من المجتمع الإحصائي، فهناك طريقة تجريبية لتحديد طول الفئة وضعها العالم الإحصائي (Sturge)، حيث:

$$a = \frac{E}{1 + 3.33 \times Log(N)} \quad \text{أو} \quad a = \frac{E}{1 + 3.33 \times Ln(N)}$$

a : هو طول الفئة

E : هو المدى العام وهو الفرق بين الحد الأقصى والحد الأدنى لقيم المتغير الإحصائي $(X_{\max} - X_{\min})$

مثال

ليكن لدينا توزيع الأجر الساعي(الوحدة 10دج) لعمال شركة النسيج كالتالي:

14 18 18 12 23 12 10 11 12 13 14 15 16 18 15 13 19 25 22 12 15 18 20 17 12 20 16 23 10 18 1827 20 21 13 17 14 15 11 14 13 12 15 20 28 13 16 17 20 15.

المطلوب: ترتيب هذه المعطيات في جدول إحصائي و ذلك باستعمال طريقة(Sturge)في تحديد أطوال الفئات.

الحل

$$a = \frac{E}{1 + 3.33 \times Ln(50)}$$ يكون: $$a = \frac{28 - 10}{1 + 3.33 \times Ln(50)}$$

ومنه: $a = 2.7 \approx 3$ وهو طول الفئة، وفي الجدول التالي وفي الفئة الأولى نبدأ بأقل قيمة وهي 10.

الأجور X_i	التكرار المطلق عدد العمال n_i
13-10	10
16-13	15
19-16	12
22-19	07
25-22	03
28--25	03
المجموع	50

4.التمثيل البياني(Graphic representation)

يساعد ويسمح التمثيل البياني بعرض المشاهدات أو المعطيات بطرق مختصرة وسهلة(أشكال ورسوم) تعكس تطور الظاهرة المدروسة في الزمان والمكان، حيث تساعد القارئ في أخذ صورة أو فكرة عامة عن الظاهرة المدروسة، كما تساعده على التحليل والفهم.

1.4التمثيل البياني في حالة الصفة الكيفية

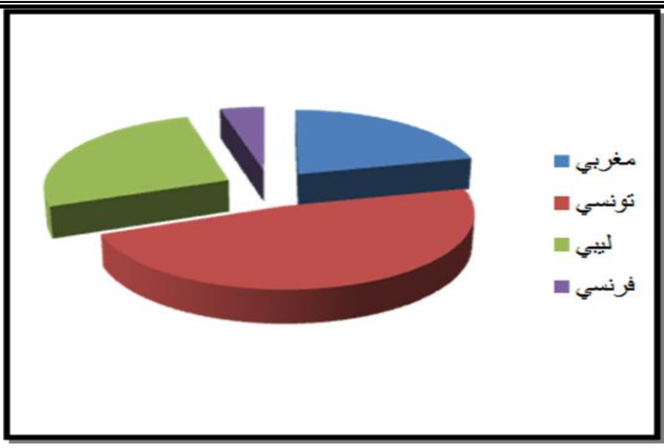
أ. طريقة الدائرة(Circular diagram)

هي عبارة عن دائرة مقسمة إلى عدة أجزاء يمثل كل جزء منها خاصية من الخصائص المدروسة، ونستعمل هنا قياس الزاوية ، حيث: $\alpha_i = 360^0 \times f_i$

مثال

يمثل الجدول التالي توزيع الأجانب في الجزائر العاصمة حسب الجنسية(المجتمع الإحصائي هو الأجانب، الوحدة الإحصائية: أجنبي، المتغير:الجنسية، طبيعته: كيفي).

الجنسية	التكرار المطلق:عددالأجانب n_i	التكرار النسبي f_i	قيس الزاوية α_i
مغربي	200	0.2	72
تونسي	450	0.45	162
ليبي	250	0.25	90
فرنسي	40	0.04	14.4
ايطالي	60	0.06	21.6
المجموع	1000	01	360

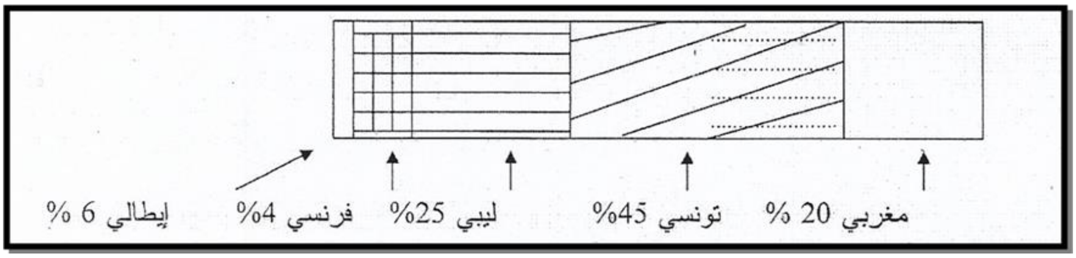


ملاحظة:

نستعمل نفس الطريقة إذا أرانا رسم نصف الدائرة(diagram Semicircular)وإنما قيس الزاويةيكون: $\alpha_i = 180^0 \times f_i$

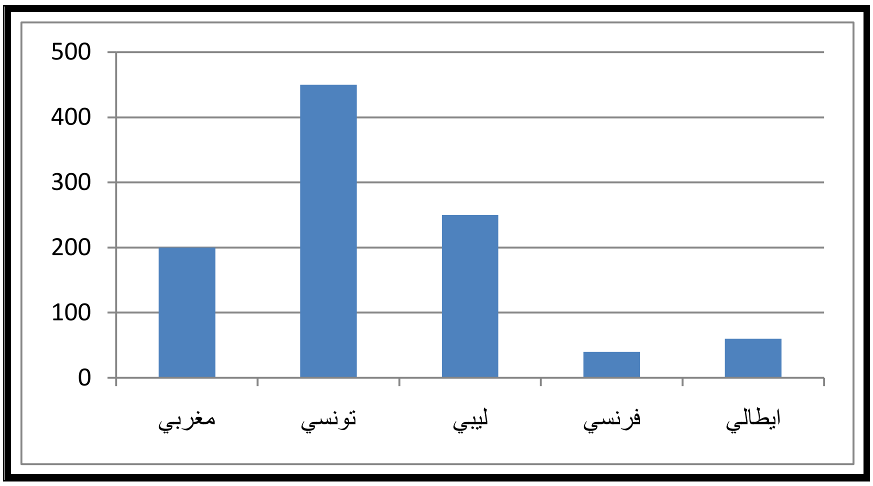
ب.طريقة العمود المجزأ(Rectilinear diagram)

وهو عبارة عن عمود مقسم إلى عدة أجزاء، يمثل كل جزء منه خاصية من خصائص المتغير المدروس، وإذا أردنا تمثيل المعطيات المتعلقة بتوزيع الأجانب في الجزائر العاصمة مستعملين هذا النوع من التمثيل البياني يكون لدينا: توزيع الأجانب في الجزائر العاصمة حسب الجنسية



ج. طريقة الأعمدة المستطيلة(Rectangular columns chart)

وهو عبارة عن مستطيلات لها قواعد متساوية ومتباعدة عن بعضها البعض بمسافات متساوية، ويتناسب طولها حسب تكرار كل خاصية من الخصائص المدروسة، وانطلاقا من المثال السابق (توزيع الأجانب في الجزائر العاصمة حسب الجنسية) يكون لدينا الشكل التالي:



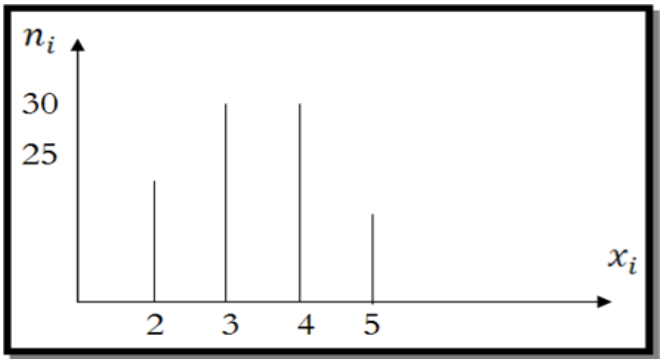
2.4التمثيل البياني في حالة الصفة الكمية

أ. طريقة الأعمدة البسيطة(Simple columns chart)

في حالة الصفة الكمية المنفصلة(المتقطعة)، يكون التمثيل البياني المناسب طريقة الأعمدة البسيط، وهي عبارة عن خطوط عمودية يتناسب أطوالها حسب كل خاصية أو قيمة من قيم المتغير الإحصائي X_i، وإذا رجعنا إلى المثال السابق الخاص بتوزيع سكنات حي 100 سكن حسب عدد الغرف.

المتغير: عدد الغرف X_i	التكرار المطلق: عدد السكنات n_i	التكرار النسبي f_i	التكرار المتجمع الصاعد $f_i \uparrow$	التكرار المتجمع النازل $f_i \downarrow$
2	25	0.25	25	100
3	30	0.30	55	75
4	30	0.30	85	45
5	15	0.15	100	15
المجموع	100	1	-	-

ويمكن تمثيل التكرار المتجمع الصاعد والنازل في الشكل التالي:



ب. المدرج التكراري(Histogram)

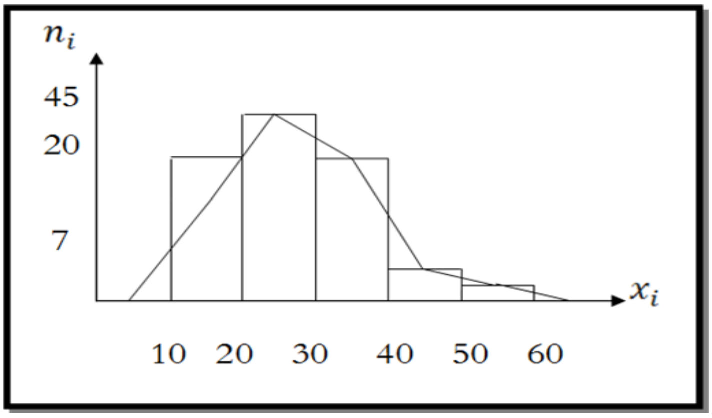
في حالة الصفة الكمية المتصلة(المستمرة)، نعلم أن المتغير الإحصائي يأخذ قيما عديدة وتكون المشاهدات في شكل فئات(مجالات) وعلى هذا الأساس يكون التمثيل البياني المناسب المدرج التكراري، وهو عبارة عن تمثيل كل فئة من فئات التوزيع التكراري بمستطيل حدود قاعدته هي الحدود الفعلية لتلك الفئة وارتفاعه يتناسب مع تكرارها .

مثال

يمثل الجدول التالي توزيع عمال شركة النسيج حسب الأجر(الوحدة 10^3 دج):

الأجور X_i	التكرار: عدد العمال n_i
20-10	20
30-20	45
40-30	25
50-40	07
60-50	03
المجموع	100

توزيع عمال شركة النسيج حسب الأجر ومن خلال هذا التمثيل البياني أيضا يمكن رسم المضلع التكرار، ونحصل عليه بإيصال منتصفات الأضلع العلوية للمدرج التكراري مع افتراض فئتين الأولى من 0 إلى 10 والثانية من 60 إلى 70 وتكرارهما يساوي الصفر.



من خلال الشكل أعلاه نلاحظ أن مساحة المضلع التكراري هي نفسها مساحة المدرج التكراري.

II. مقاييس النزعة المركزية(Measures of central tendency and position)

تمهيد

لقد رأينا في النقطة الأولى كيف يمكن ترتيب المعطيات في جداول إحصائية مع تمثيلها في أشكال بيانية مناسبة، وهي خطوة مهمة في أخذ فكرة أو صورة عامة حول تطور قيم الظاهرة المدروسة، لكن من أجل التحليل الدقيق والسريع للظاهرة المدروسة هناك خطوة أخرى مهمة تتمثل في حساب بعض المقاييس العددية تسمى بمقاييس النزعة المركزية (أو التوسط أو المعدلات)، حيث تصف هذه المقاييس البيانات الخاصة بالمتغير المدروس من خلال الدلالة على ميل البيانات للتجمع حول قيمة مركزية معينة.

حيث سميت بالنزعة المركزية لأن جميع قيم المتغير الإحصائي x_i أو المشاهدات تميل وتنزع نحو قيمة معينة تسمى بالقيمة المركزية، هذه القيمة المركزية تمثل المجتمع أو العينة المدروسة، وقد تكون هذه القيمة المركزية الوسط الحسابي، أو المنوال أو الوسيط، ولحساب مقاييس النزعة المركزية لابد من توفر الشروط التالية أوماتسمى كذلك بشروط يول(YUL):

- يجب أن يكون المتوسط معرفا تعريف دقيقا؛
- يجب أن يحسب أو يبني من جميع المشاهدات؛
- يجب أن يكون من السهل فهمه وتفسيره؛
- يمكن حسابه بطريقة سهلة وسريعة؛
- يخضع للعمليات الجبرية بسهولة؛
- لا يتأثر كثيرا بالقيم المتطرفة أوالشاذة؛
- لا يتأثر كثيرا باختلاف العينات من المجتمع الواحد. والمتوسطات هي: المتوسط الحسابي، المتوسط الهندسي، المتوسط ألتربيعي، المتوسط التوافقي، الوسيط، المنوال.

1. الوسط أو المتوسط الحسابي(The arithmetic mean or Average)

إذا كان لدينا مجموعة من المشاهدات : $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots x_k$ فإن متوسطها الحسابي يعرف بالعلاقة التالية:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k}$$

وإذا كانت المشاهدات مرتبة في جدول إحصائي وبوجود التكرارات تصبح علاقة المتوسط الحسابي كالتالي:

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{k} f_i \times x_i \quad \text{أو} \quad \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \times x_i}{N} \quad \wedge N = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

أما إذا كانت المشاهدات في شكل فئات يعبر C_i عن مركز الفئة.

مثال

يمثل الجدول التالي أجور عمال مؤسسة للهاتف النقال والموضح كالآتي:

الوحدة: 10^3دج

الأجور X_i	عدد العمال (التكرار) n_i	التكرار النسبي	مركز الفئة C_i		$f_i \times C_i$
20-10	200	0.2	15	300	3
30-20	350	0.35	25	875	8.75
40-30	400	0.4	35	1400	14
50-40	30	0.3	45	1350	13.5
60-50	20	0.2	55	1100	11
المجموع	1000	1	--	5025	50.25

وباستعمال علاقة المتوسط الحسابي يصبح لدينا :

أو مباشرة وباستعمال العلاقة الثانية نحصل على $\overline{X} = \sum_{i=1}^{k} f_i \times C_i = 50.25$:

ملاحظة:

إذا كان لدينا المتغير الإحصائي المركز y_i وهو عبارة عن: $y_i = x_i - \overline{X}$ فان متوسطه معدوم: $\overline{Y} = 0$

البرهان

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i y_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{X})}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{N} - \frac{\overline{X} \times \sum_{i=1}^{k} n_i}{N} = \overline{X} - \overline{X} = 0$$

- **خصائص المتوسط الحسابي**

أ. إذا كان لدينا عدد ثابت و $\overline{X}$ هو المتوسط الحسابي للمشاهدات:، وكان لدينا المتغير y_i حيث:

$y_i = a \times x_i$ فإن: $\overline{Y} = a \times \overline{X}$.

البرهان

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \times y_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \times (a \times x_i)}{N} = \frac{a \times \sum_{i=1}^{k} n_i \times x_i}{N} = a \times \overline{X}$$

ب. إذا كان لدينا عدد ثابت و هو المتوسط الحسابي للمشاهدات:، وكان لدينا المتغير y_i حيث: $y_i = b + x_i$

فإن: $\overline{Y} = b + \overline{X}$.

البرهان

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \times y_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \times (b + x_i)}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \times b + \sum_{i=1}^{k} n_i \times x_i}{N} = b + \overline{X}$$

يمكن جمع الخاصيتين في خاصية واحدة:إذا كان لدينا a وعددين ثابتين و هو المتوسط الحسابي للمشاهدات:، وكان لدينا المتغيرحيث: $y_i = b + a \times x_i$ فإن:

$$\overline{Y} = b + a \times \overline{X}$$

ت. إذا كان لدينا عينيتين حيث: متوسط العينة الأولى هو وحجمها هو والعينة الثانية متوسطها وحجمها هو ، فيمكن دمج العينتين وتصبح عينة ذات حجم: ويصبح متوسطها الحسابي:

$$\overline{X} = (n_1 \times \overline{X}_1 + n_2 \times \overline{X}_2)/(n_1 + n_2)$$

2. المتوسط الهندسي (Geometric mean)

إذا كان لدينا مجموعة من المشاهدات التالية : فإن متوسطها الهندسي يعرف بالعلاقة التالية: $G = \overline{X}_G = \sqrt[k]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times ....\times x_k} = (x_1 \times x_2 \times x_3 \times ....\times x_k)^{1/k}$

وإذا كانت المشاهدات مرتبة في جدول إحصائي وبوجود التكرارات تصبح علاقة المتوسط الهندسي كالتالي:

$$G = \overline{X}_G = \sqrt[N]{x_1^{n_1} \times x_2^{n_2} \times x_3^{n_3} \times ....\times x_k^{n_k}} \quad \wedge \quad N = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

من خلال علاقة المتوسط الهندسي نجد مايلي:

$$G = \overline{X}_G = \sqrt[N]{x_1^{n_1} \times x_2^{n_2} .....\times x_k^{n_k}} \Rightarrow Ln(G) = \frac{Ln(x_1^{n_1} \times x_2^{n_2} .....\times x_k^{n_k})}{N}$$

$$Ln(G) = \frac{n_1 \times Ln(x_1) + n_2 \times Ln(x_2) .....+ n_k \times Ln(x_k)}{N}$$

$$Ln(G)=\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \times Ln(x_i)}{N}=\sum_{i=1}^{k} f_i \times Ln(x_i)$$

يكون كذلك: $G=EXP\left\{\sum_{i=1}^{k} f_i \times Ln(x_i)\right\}$

مثال

عرف بلد ما معدلات نمو اقتصادي خلال الفترة 1998–2018 وهي كالتالي: 2.2 1.1 1.5 1.3 3 2.3 2 2.1 3.1 1.3 2.2 1.1 2.2 1.2 2.3 1.1 1.3 3 1.1 1.3 2.3 1.3.

المطلوب: ماهو متوسط هذه المعدلات خلال الفترة 1998–2018؟

بعد ترتيب هذه المعطيات يكون لدينا الجدول التالي:

معدل النمو X_i	1.1	1.2	1.3	1.5	2	2.1	2.2	2.3	3	3.1	المجموع
التكرار n_i	4	1	5	1	1	1	3	3	2	1	**22**

بإستعمال علاقة المتوسط الهندسي يكون لدينا:

$$G=\overline{X}_G=\sqrt[N]{x_1^{n_1}\times x_2^{n_2}.....\times x_k^{n_k}}=\sqrt[22]{1.1^4\times 1.2^1\times ....\times 3.1^1}=1.17$$

ومنه فمتوسط هذه المعدلات خلال هذه الفترة هو 1.17

ملاحظة:

إن مجالات تطبيق المتوسط الهندسي تعتبر قليلة مقارنة مع المتوسط الحسابي، حيث يستعمل في حساب متوسط (معدلات الفائدة، معدلات النمو...)، كما يستعمل في حساب بعض الأرقام القياسية حيث يعتبر من أحسنالمتوسطات في هذا المجال لأنه يحقق كل الخصائص الرياضية للأرقام القياسية.

3. المتوسط التوافقي(The Harmonic mean)

إذا كان لدينا مجموعة من المشاهدات التالية :فإنمتوسطها التوافقي يعرف بالعلاقةالتالية:

$$H=\overline{X}_H=\frac{k}{\sum_{i=1}^{k} x_i}$$

وإذا كانت المشاهدات مرتبة في جدول إحصائي وبوجود التكرارات تصبح علاقة المتوسطالتوافقي كالتالي:

$$H=\overline{X}_H=\frac{N}{\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{x_i}} \wedge N=\sum_{i=1}^{k} n_i$$

ملاحظة:

من خلال العلاقات السابقةفان المتوسط التوافقي هو مقلوب المتوسط الحسابي لمقلوب قيم المتغير الإحصائيx_i.

إن مجالات تطبيق المتوسط التوافقي تعتبر أيضا قليلة مقارنة مع المتوسط الحسابي، حيث يستعمل في حساب متوسط السرعات. فمثلا إذا كان:

السرعة X_i	التكرار	$\frac{n_i}{X_i}$
50	1	0.02
60	2	0.033
70	2	0.028
المجموع	5	0.81

وباستعمال علاقة المتوسط التوافقي:

$$H = \bar{X}_H = \frac{5}{\frac{1}{50}+\frac{2}{60}+\frac{2}{70}} = 61.72$$

ومنه فمتوسط هذه السرعات خلال فترة الرحلة هو 61.72 كلم/سا

4. المتوسط التربيعي(The Quadric mean)

إذا كان لدينا المشاهدات التالية:فإن متوسطهاألتربيعي يعرف بالعلاقة التالية:

$$Q = \bar{X}_Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}{k}}$$

وإذا كانت المشاهدات مرتبة في جدول إحصائي وبوجود التكرارات تصبح علاقة المتوسطالهندسي كالتالي:

$$Q = \bar{X}_Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \times x_i^2}{N}} \quad \wedge \quad N = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

ومن خلال العلاقات السابقة فالمتوسط ألتربيعي هو جذر المتوسط الحسابي لمربعات قيم المتغير الإحصائي X_i.

ملاحظة:

عند حساب جميع المتوسطات السابقة لأي سلسلة إحصائية فإنه يكون لدينا العلاقة التالية وهي مبرهنة تجريبيا:

$$H \prec G \prec \bar{X} \prec Q$$

5. الوسيط(The median)

يعرف الوسيط بأنه قيمة المتغير الإحصائي التي تقسم المجتمع الإحصائي إلى قسمين متساويين، بشرط أن تكون قيم المشاهدات مرتبة ترتيبا تصاعديا أو تنازليا، أي أن 50 بالمائة من المشاهدات أقل منه و50 بالمائة الأخرى أقل منه.

1.5الوسيط حالة البيانات غير المبوبة

أ. حالة عدد المشاهدات فردي

إذا كانت لدينا المشاهدات التالية والتي تمثل نقاط طلبة الفوج 5 وهي مرتبة ترتيبا تصاعديا:5 5 6 7 7 8 8 9 11 12 12 13 13 14 5 16 16 17 18، وباعتبار أن الوسيط يقسم المجتمع الإحصائي إلى

قسمين متساويين، فإن الوسيط هو 12، أي، فرتبة الوسيط عندما يكون عدد المشاهدات فردية هيوفي مثالنا نجد: أي رتبته العاشرة فنجد 9مشاهدات أقل منه و9 مشاهدات أكبر منه.

ب. حالة عدد المشاهدات زوجي

إذا كانت لدينا هذه المرة 20 مشاهدة:17 17 16 16 15 14 13 13 12 12 11 9 8 8 7 7 6 5 3 5 ، باعتبار أن الوسيط يقسم المجتمع الإحصائي إلى قسمين متساويين فإن الوسيط هذه الحالة هو المتوسط الحسابي للعددين الأوسطين ، هما 11 و12 أي فالوسيط عندما يكون عدد المشاهدات زوجيا هو المتوسط الحسابي لصاحب الرتبة $n/2$ وصاحب الرتبة$(n/2)+1$ ، أي المتوسط الحسابي لصاحب الرتبة 10 وصاحب الرتبة 11(لأن عدد المشاهدات $n=20$).

2.5الوسيط حالة البيانات المبوبة

في حالة البيانات المبوبة أي وجود المعطيات في شكل فئات، نستعمل لحساب الوسيط العلاقة الرياضيةالتالية:

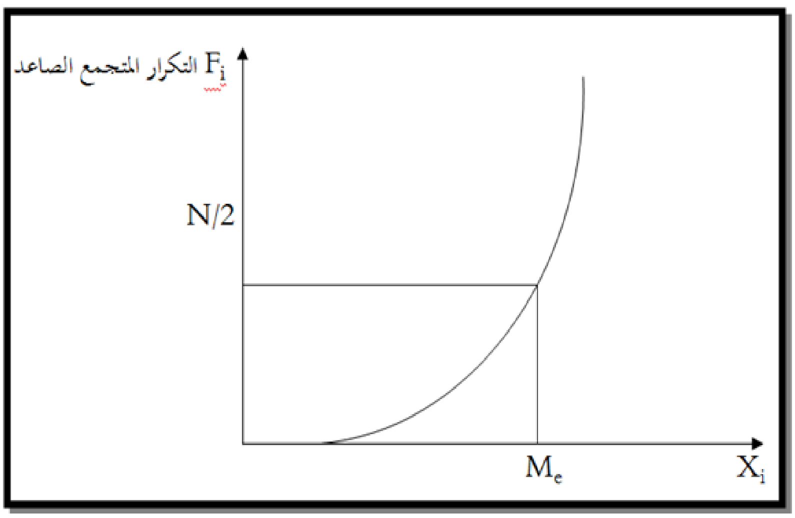
$$M_e = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{N/2 - F_{i-1}}{n_i} \right)$$

حيث أن: e_{i-1} يمثل الحد الأدنى للفئة الوسيطية،: طول الفئة الوسيطية،: حجم العينة أومجموع التكرارات،: التكرار المتجمع الصاعد الذي يسبق التكرار المتجمع الصاعد المقابل للفئة الوسيطية و: تكرار الفئة الوسيطية. وقبل تطبيق هذه العلاقة يجب أن نحدد مايلي:

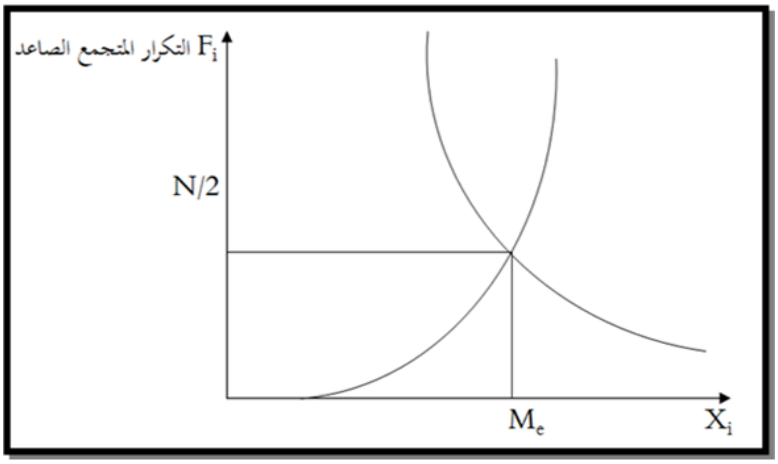
- تحديد التكرار المتجمع الصاعد؛
- تحديد الفئة الوسيطية، وهي الفئة التي تقابل $N/2$ في التكرار المتجمع الصاعد أو أكبر منه مباشرة؛
- حساب الوسيط بالعلاقة السابقة.

ملاحظة:

يحدد الوسيط بيانيا انطلاقا من الرسم البياني الخاص بالتكرار المتجمع الصاعد.



كما أن الوسيط بيانيا هو عندما يتقاطع منحنى التكرار المتجمع الصاعد مع منحنى التكرار المتجمع النازل.يحدد الوسيط بيانيا انطلاقا من الرسم البياني الخاص بالتكرار المتجمع الصاعد.



مثال

وبالرجوع للمثال السابق يمثل الجدول التالي أجور عمال مؤسسة للهاتف النقال والموضح كالآتي:

الوحدة: 10^3دج

المتغير:الأجور X_i	التكرار : عدد العمال	التكرار النسبي	التكرار المتجمع الصاعد $F\uparrow$
20-10	200	0.2	200
30-20	350	0.35	550
40-30	400	0.4	950
50-40	30	0.3	980
60-50	20	0.2	1000
المجموع	1000	1	/

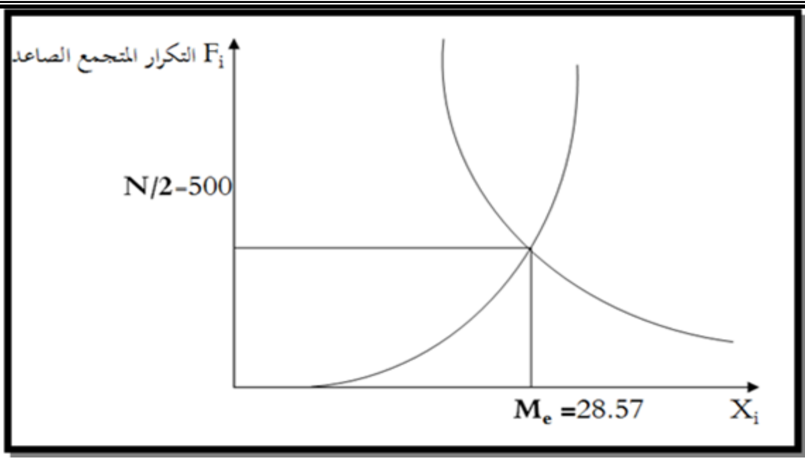
أولا نلاحظ بعد تحديد التكرار المتجمع الصاعد أن الفئة الوسيطية هي الفئة التي تقابل

$$\frac{N}{2}=\frac{1000}{2}=500$$

لا يوجد العدد 500 في العمود الذي يمثل التكرار المتجمع الصاعد وإنما العدد الذي أكبر منه هو 550، أي أن الفئة الوسيطية هي : 20–30، والآن سنطبق العلاقة الرياضية للوسيط:

$$M_e=e_{i-1}+a_i\times\left(\frac{N/2-F_{i-1}}{n_i}\right)=20+10\times\left(\frac{1000/2-200}{350}\right)=28.57$$

ومنه فالوسيط هو:28570 دج، ومنه نقول أن 50 بالمائة من العمال يتقاضون أجرا أعلى من 28570 دج، و50 بالمائة الأخرى يتقاضون أجرا أقل منه.وبيانيا نلاحظ:



ملاحظة:

إذا استعملنا التكرار المتجمع الصاعد النسبي تصبح علاقة الوسيط كما يلي:

$$M_e = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{0.5 - F_{i-1}}{f_i} \right)$$

حيث: f_i هي التكرار النسبي للفئة الوسيطية.

6. الربيعيات(Quartiles)

1.6الربيع الأولQ_1

يعرف الربيع الأول بقيمة المتغير الإحصائي التي تقسم المجتمع الإحصائي إلى قسمين، يتضمن القسم الأول 25 بالمائة من المشاهدات، أما القسم الثاني فيتضمن طبعا 75 بالمائة من المشاهدات.

أ. الربيع الأول في حالة البيانات غير المبوبة

قبل تحديد الربيع الأول يجب أن تكون البيانات مرتبة ترتيبا تصاعديا، ولتحديد رتبته نستعمل الطريقة التالية: نحسب ، حيث N هو عدد المشاهدات، فإذا كانت النتيجة عددا صحيحا N فالربيع الأول رتبته تلك القيمة، أما إذا كانت النتيجة عددا صحيحا مضافا له عددا عشريا مثلا: N'

$$(N+1)/4 = N' + \alpha$$

فالربيع الأول هو صاحب المرتبة مضافا إليه جداء العدد α بالفرق بين صاحب المرتبة وصاحب المرتبة.

مثال(1)

إذا كانت لدينا المشاهدات التالية والتي تمثل نقاط طلبة الفوج 4 في مادة الإحصاء الوصفي وهي مرتبة ترتيباتصاعديا كمايلي: 17 16 16 15 14 1313 12 12 11 98 7 76 55 3 3

لدينا $(N+1)/4 = (19+1)/4 = 5$ إن هذه النتيجة عبارة عن عددا صحيحا 5، ومنه الربيع الأول هو صاحب المرتبة الخامسة $Q_1 = 6$.

مثال(2)

إذا كانت لدينا المشاهدات التالية وهي مرتبة ترتيبا تصاعديا:

3 3 55 6 7 7 988 11 12 12 1313 14 15 16 16 17

لدينا $(N+1)/4=(20+1)/4=5.25$ إن هذه النتيجة عبارة عن عددا صحيحا مضافا إليه عددا عشريا $\alpha=0.25$ ، ومنه فالربيع الأول هو صاحب المرتبة الخامسة مضافا إليه العدد 0.25 جداء الفرق بين صاحب المرتبة السادسة وصاحب المرتبة الخامسة، أي :

$$Q_1=6+0.25\times(7-9)=6.25$$

ب. الربيع الأول حالة البيانات المبوبة

في حالة البيانات المبوبة أي وجود المعطيات في شكل فئات، نستعمل لحساب الربيع الأول العلاقة الرياضية التالية:

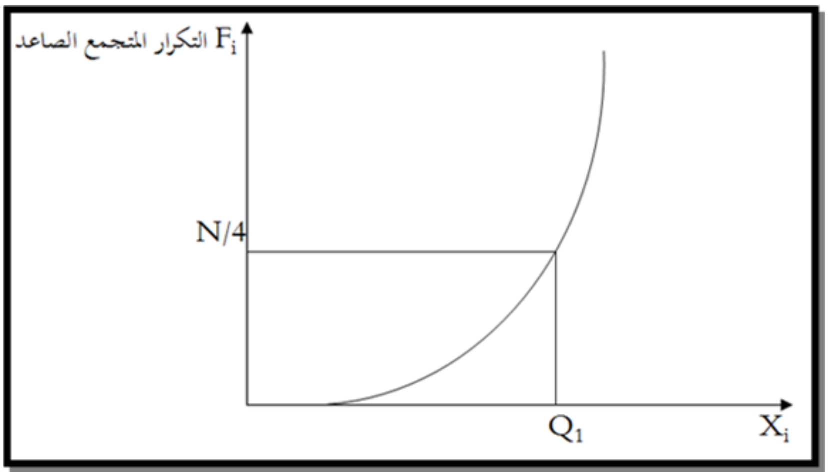
$$Q_1=e_{i-1}+a_i\times\left(\frac{N/4-F_{i-1}}{n_i}\right)$$

حيث أن: e_{i-1} يمثل الحد الأدنى لفئة الربيع الأول،: طول فئة الربيع الأول،: حجم العينة أومجموع التكرارات،: التكرار المتجمع الصاعد الذي يسبق التكرار المتجمع الصاعد المقابل لفئة الربيع الأول و: تكرار فئة الربيع الأول. وقبل تطبيق هذه العلاقة يجب أن نحدد مايلي:

- تحديد التكرار المتجمع الصاعد؛
- تحديد فئة الربيع الأول، وهي الفئة التي تقابل $N/4$ في التكرار المتجمع الصاعد أو أكبر منه مباشرة؛
- حساب الربيع الأول بالعلاقة السابقة.

ملاحظة:

يحدد الربيع الأول بيانيا انطلاقا من الرسم البياني الخاص بالتكرار المتجمع الصاعد.



مثال: من خلال المثال السابق

يمثل الجدول التالي أجور عمال مؤسسة للهاتف النقال والموضح كالآتي:

الوحدة: 10^3دج

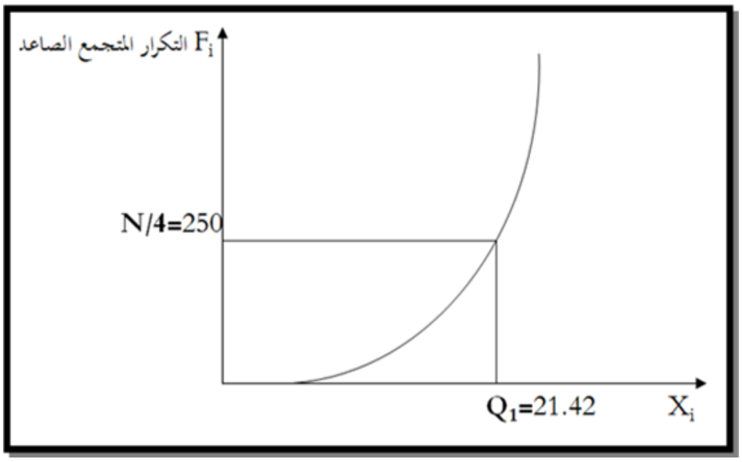
المتغير:الأجور	التكرار: عدد العمال n_i	التكرار النسبي	التكرار المتجمع الصاعد $F \uparrow$
20-10	200	0.2	200
30-20	350	0.35	550
40-30	400	0.4	950
50-40	30	0.3	980
60-50	20	0.2	1000
المجموع	1000	1	--

أولا نلاحظ بعد تحديد التكرار المتجمع الصاعد أن فئة الربيع الأول هي الفئة التي تقابل: $N/4=1000/4=250$

لا يوجد العدد 250 في العمود الذي يمثل التكرار المتجمع الصاعد وإنما العدد الذي أكبر منه مباشرة هو 550، أي أن فئة الربيع الأول هي : 20-30، والآن سنطبق العلاقة الرياضية للربيع الأول:

$$Q_1 = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{N/4 - F_{i-1}}{n_i} \right) = 20 + 10 \times \left(\frac{1000/4 - 200}{350} \right) = 21.42$$

ومنه فالربيع الأول هو : 21420 دج، ومنه نقول أن 25 بالمائة من العمال يتقاضون أجرا أقل من 21420 دج، و75 بالمائة الأخرى يتقاضون أجرا أكبر منه. وبيانيا نلاحظ:



ملاحظة:

إذا استعملنا التكرار المتجمع الصاعد النسبي تصبح علاقة الربيع الأول كمايلي:

$$Q_1 = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{0.25 - F_{i-1}}{f_i} \right)$$

حيث: f_i هي التكرار النسبي لفئة الربيع الأول.

2.6الربيع الثالثQ_3

يعرف الربيع الثالث بقيمة المتغير الإحصائي التي تقسم المجتمع الإحصائي إلى قسمين، يتضمن القسم الأول 75 بالمائة من المشاهدات، أما القسم الثاني فيتضمن طبعا 25 بالمائة من المشاهدات.

أ. الربيع الثالث حالة البيانات غير المبوبة

قبل تحديد الربيع الثالث كما قلنا سابقا يجب أن تكون البيانات مرتبة ترتيبا تصاعديا، ولتحديد رتبته نستعمل الطريقة التالية: نحسب، حيث هو عدد المشاهدات، فإذا كانت النتيجة عددا صحيحافالربيع الثالث رتبته تلك القيمة، أما إذا كانت النتيجة عددا صحيحا مضافا له عددا عشريا مثلا:

$$3(N+1)/4 = N' + \alpha$$

فالربيع الثالث هو صاحب المرتبة مضافا إليه جداء العدد α بالفرق بين صاحب المرتبة وصاحب المرتبة .

مثال: المثال السابق يتضمن الحالتين الاثنتين

الحالة الأولى

إذا كانت لدينا المشاهدات التالية والتي تمثل نقاط طلبة الفوج 4 في مادة الإحصاء الوصفي وهي مرتبة ترتيبا تصاعديا:3 5 5 6 7 7 8 8 9 11 12 12 13 13 13 15 16 16 17

لدينا $3(N+1)/4 = 3(19+1)/4 = 15$ إذا عددا صحيحا أي رتبته الخامسة عشر و منه $Q_3 = 13$ ونلاحظ أن 25 % من المشاهدات أقل منه و 75 % من المشاهدات أكبر منه.

الحالة الثانية

إذا كانت لدينا المشاهدات التالية وهي مرتبة ترتيبا تصاعديا:

5 6 7 7 8 8 9 11 12 12 13 1413 15 16 16 17 5 3 5

لدينا $3(N+1)/4 = 3(20+1)/4 = 15.75$ إن هذه النتيجة عبارة عن عددا صحيحا مضافا إليه عددا عشريا $\alpha = 0.75$ ،ومنه فالربيع الثالث هو صاحب المرتبة الخامسة عشر مضافا إليه 0.75 جداء الفرق بين صاحب المرتبة السادسة عشر و صاحب المرتبة الخامسة عشر، أي: $Q_3 = 13 + 0.75 \times (14-13) = 13.75$

ب. الربيع الثالث حالة البيانات المبوبة

في حالة البيانات المبوبة أي وجود المعطيات في شكل فئات، نستعمل لحساب الربيع الثالث العلاقة التالية:

$$Q_3 = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{3N/4 - F_{i-1}}{n_i} \right)$$

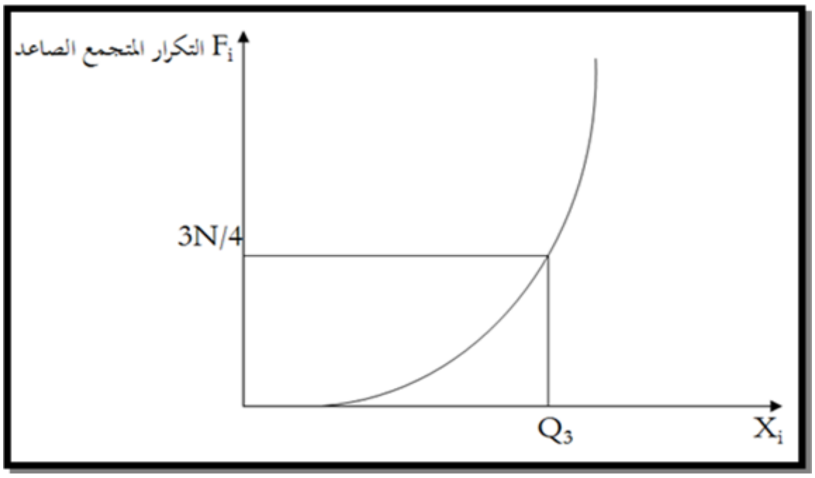
حيث أن: e_{i-1} يمثل الحد الأدنى لفئة الربيع الثالث، : طول فئة الربيع الثالث،: حجم العينة أومجموع التكرارات،: التكرار المتجمع الصاعد الذي يسبق التكرار المتجمع الصاعد المقابل لفئة الربيع الثالث و: تكرار فئة الربيع الثالث.

وقبل تطبيق هذه العلاقة يجب أن نحدد مايلي:

- تحديد التكرار المجمع الصاعد؛
- تحديد فئة الربيع الثالث و هي الفئة التي تقابل $3N/4$ في التكرار المتجمع الصاعد أو أكبر منه مباشرة.

ملاحظة:

يحدد الربيع الثالث بيانيا انطلاقا من الرسم البياني الخاص بالتكرار المتجمع الصاعد.



مثال: (مثال سابق)

يمثل الجدول التالي أجور عمال مؤسسة للهاتف النقال والموضح كالآتي:

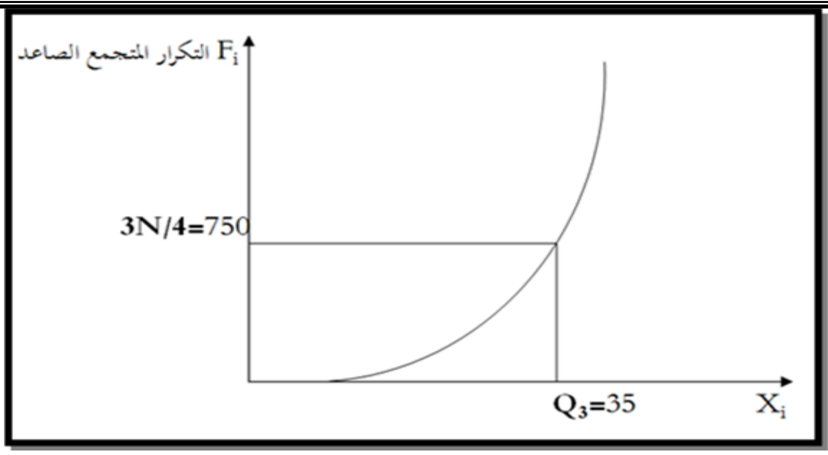
الوحدة: 10^3دج

المتغير:الأجور	التكرار: عدد العمال n_i	التكرار النسبي	التكرار المتجمع الصاعد $F\uparrow$
20-10	200	0.2	200
30-20	350	0.35	550
40-30	400	0.4	950
50-40	30	0.3	980
60-50	20	0.2	1000
المجموع	1000	1	--

أولا نلاحظ بعد تحديد التكرار المتجمع الصاعد أن فئة الربيع الثالث هي الفئة التي تقابل $3N/4 = 3(1000)/4 = 750$ لا يوجد العدد 750 في العمود الذي يمثل التكرار المتجمع الصاعد وإنما العدد الذي أكبر منه مباشرة هو 950 أي أن فئة الربيع الثالث هي 30–40 والآن سنطبق العلاقة الرياضية للربيع الثالث:

$$Q_3 = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{3N/4 - F_{i-1}}{n_i}\right) = 30 + 10 \times \left(\frac{3 \times 1000/4 - 550}{400}\right) = 35$$

ومنه فالربيع الثالث هو350000دج و منه نقول أن 25% من العمال يتقاضون أجر أكبر من 350000دج و 75%الآخرون يتقاضون أجر أقل منه.وبيانيا نلاحظ:



ملاحظة:

إذا استعملنا التكرار المتجمع الصاعد النسبي تصبح علاقة الربيع الثالث كمايلي:

$$Q_3 = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{0.75 - F_{i-1}}{f_i} \right)$$

حيث: هي التكرار النسبي لفئة الربيع الثالث.

7. العشيريات(Deciles)

1.7. العشير D_1

يعرف العشير الأول بقيمة المتغير الاحصائي التي تقسم المجتمع الاحصائي إلى قسمين يتضمن القسم الأول 10بالمائة من المشاهدات أما القسم الثاني فيتضمن طبعا 90بالمائة من المشاهدات ويوجد في السلسلة الاحصائية تسع عشيريات $D_1, D_2, ...D_9$.

في حالة البيانات المبوبة أي وجود المعطيات في شكل فئات، نستعمل لحساب العشير الأولالعلاقة الرياضية التالية:

$$D_1 = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{N/10 - F_{i-1}}{n_i} \right)$$

حيث أن: e_{i-1} يمثل الحد الأدنى لفئة العشير الأول، : طول فئة العشير الأول،: حجم العينة أومجموع التكرارات،: التكرار المتجمع الصاعد الذي يسبق التكرار المتجمع الصاعد المقابل لفئة العشير الأول و: تكرار فئة العشير الأول.

وقبل تطبيق هذه العلاقة يجب أن نحدد مايلي:

- تحديد التكرار المتجمع الصاعد؛
- تحديد فئة العشير الأول، و هي الفئة التي تقابل $N/10$ في التكرار المتجمع الصاعد أو أكبر منه مباشرة؛
- حساب العشير الأول بالعلاقة السابقة.

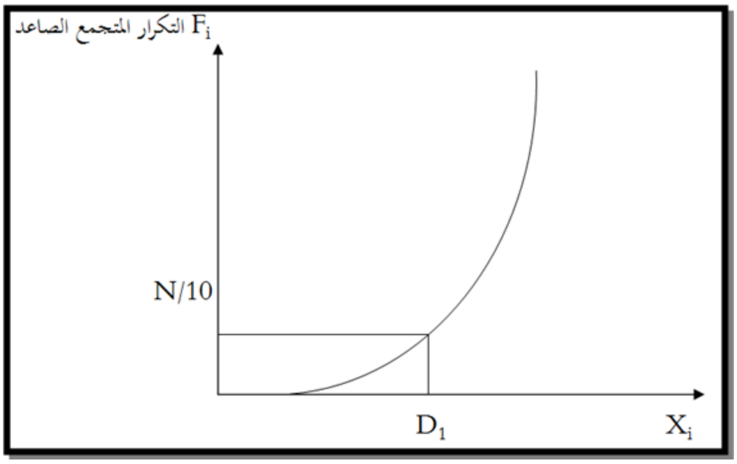
2.7. تعميم: العشير D_i

يمكن تعميم العلاقة السابقة وهذا لحساب أي عشير من العشيريات التسع كمايلي:

$$D_i = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{i \times N/10 - F_{i-1}}{n_i} \right) \wedge \; i = 1,...,9$$

ملاحظة(1):

يحدد العشير الأول بيانيا انطلاقا من الرسم البياني الخاص بالتكرار المتجمع الصاعد وبيانيا نلاحظ:



ملاحظة(2):

إذا استعملنا التكرار المتجمع الصاعد النسبي تصبح علاقة العشير الأول:

$$D_1 = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{0.10 - F_{i-1}}{f_i} \right)$$

حيث: هي التكرار النسبي لفئة العشيرالأول.

مثال: (مثال سابق)

يمثل الجدول التالي أجور عمال مؤسسة للهاتف النقال والموضح كالآتي:

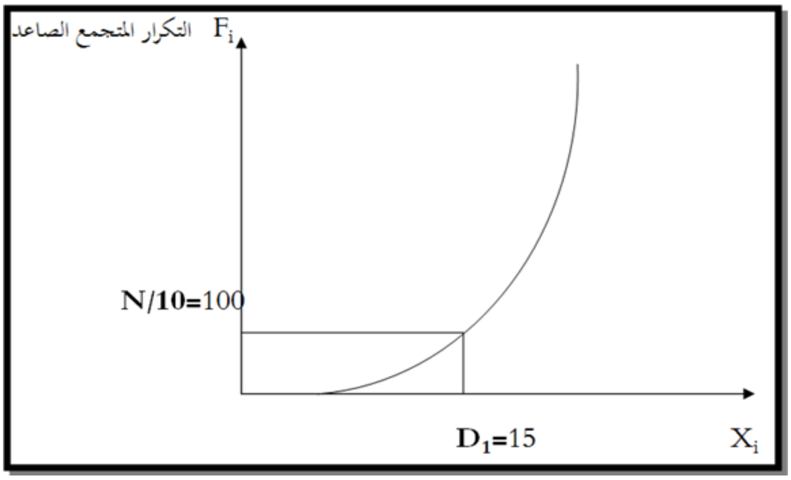
الوحدة: 10^3 دج

التكرار المتجمع الصاعد $F \uparrow$	التكرار النسبي	التكرار: عدد العمال n_i	المتغير:الأجور
200	0.2	200	20-10
550	0.35	350	30-20
950	0.4	400	40-30
980	0.3	30	50-40
1000	0.2	20	60-50
--	1	1000	المجموع

أولا نلاحظ بعد تحديد التكرار المتجمع الصاعد أن فئة العشير الأول هي الفئة التي تقابل: $N/10=1000/10=100$ لايوجد العدد 100 في العمود الذي يمثل التكرار المتجمع الصاعد وإنما العدد الذي أكبر منه مباشرة هو 200، أي أن فئة العشير الأول هي 10–20 والآن سنطبق العلاقة الرياضية للعشير الأول:

$$D_1 = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{N/10 - F_{i-1}}{n_i} \right) = 10 + 10 \times \left(\frac{1000/10 - 0}{n_i} \right) = 15$$

ومنه فالعشير الأول هو 15000دجو منه نقول أن 10% من العمال يتقاضون أجرا أقل من 15000دجو 75% الأخرى يتقاضون أجر أكبر منه .وبيانيا نلاحظ:



8. المئينيات(Percentiles)

1.8المئيني الأولP_1

يعرف المئيني الأول بقيمة المتغير الإحصائي التي تقسم المجتمع الإحصائي إلى قسمين يتضمن القسم الأول 1% من المشاهدات أما القسم الثاني فيتضمن طبعا 99% من المشاهدات ويوجد في السلسلة الإحصائية تسع وتسعون مئيني، في حالة البيانات مبوبة أي وجود المعطيات في شكل فئات ، نستعمل لحساب المئيني الأول العلاقة الرياضية التالية:

$$P_1 = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{N/100 - F_{i-1}}{n_i} \right)$$

حيث أن: e_{i-1} يمثل الحد الأدنى لفئة المئيني الأول، : طول فئة المئيني الأول،: حجم العينة أومجموع التكرارات،: التكرار المتجمع الصاعد الذي يسبق التكرار المتجمع الصاعد المقابل لفئة المئيني الأول و: تكرار فئة المئيني الأول. وقبل تطبيق هذه العلاقة يجب أن نحدد مايلي:

- تحديد التكرار المتجمع الصاعد؛
- تحديد فئة المئيني الأول وهي الفئة التي تقابل $N/100$ في التكرار المتجمع الصاعد أو أكبر منه مباشرة؛
- حساب المئيني الأول بالعلاقة السابقة.

2.8تعميم: المئيني الأول P_i

يمكن تعميم العلاقة وهذا لحساب أي مئيني من المئينيات التسعة والتسعون كمايلي:

$$P_i = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{i \times N/100 - F_{i-1}}{n_i} \right) \wedge \quad i = 1,....,99$$

مثال: يمثل الجدول التالي أجور عمال مؤسسة للهاتف النقال والموضح كالآتي: الوحدة: 10^3 دج

المتغير:الأجور	التكرار: عدد العمال n_i	التكرار النسبي	التكرار المتجمع الصاعد $F \uparrow$
20-10	200	0.2	200
30-20	350	0.35	550
40-30	400	0.4	950
50-40	30	0.3	980
60-50	20	0.2	1000
المجموع	1000	1	--

أولا نلاحظ بعد تحديد التكرار المتجمع الصاعد أن فئة المئيني الأول هي الفئة التي تقابل$N/100=1000/100=10$:

لا يوجد العدد 10 في العمود الذي يمثل التكرار المتجمع الصاعد وإنما العدد الذي أكبر منه مباشرة هو 200، أي أن فئة المئيني الأول هي: 20-10، والآن سنطبق العلاقة الرياضية للمئيني الأول:

$$P_1 = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{N/100 - F_{i-1}}{n_i} \right) = 10 + 10 \times \left(\frac{1000/100 - 0}{200} \right) = 1.5$$

ومنه فالمئيني الأول هو :1500 دج ، ومنه نقول أن 1 بالمائة من العمال يتقاضون أجرا أقل من 1500 دج، و99 بالمائة الأخرى يتقاضون أجرا أكبر منه.

ملاحظة:

إذا استعملنا التكرار المتجمع الصاعد النسبي تصبح علاقة المئيني الأول:

$$P_1 = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{0.01 - F_{i-1}}{f_i} \right)$$

حيث: هي التكرار النسبي لفئة المئيني الأول.

نلاحظعندما تكون المشاهدات مرتبة ترتيبا تصاعديا، يمكن تحديد مراتب الوسيط والربيعيات والعشيرياتوالمئينيات حسب الشكل التالي:

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n$$

$$x_1, x_2, x_3, ...M_e.............., x_n$$

$$x_1, x_2, x_3, ...D_5.....Q_3......, x_n$$

$$x_1, x_2, x_3, ...P_{50}.....Q_3......, x_n$$

أي أن:

9. المنوال(The mode)

يعرف المنوال بأنه قيمة المتغير الإحصائي الأكثر انتشارا وشيوعا في مجموعة البيانات، وهو قيمة المتغير الإحصائي التي تقابل أعلى تكرار في جدول التوزيع التكراري، ونرمز له بالرمز M_O .

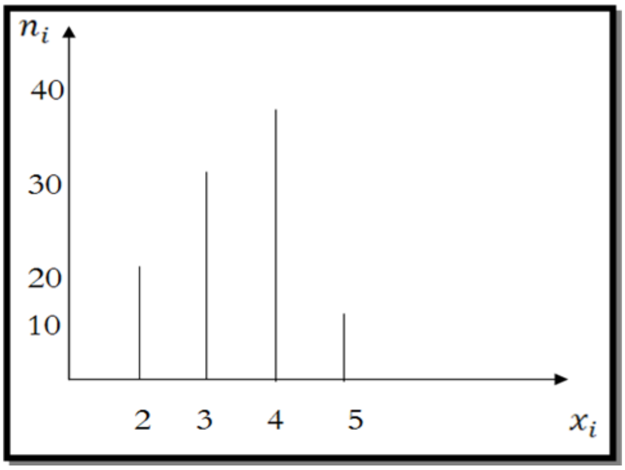
1.9المنوالحالة البيانات غير المبوبة

مثال: (مثال سابق)

توزيع سكنات حي 100 سكن حسب عدد الغرف.

المتغير: عدد الغرف X_i	التكرار:عدد السكنات n_i
2	20
3	30
4	40
5	10
المجموع	100

من خلال الرسم البياني يمكن معرفة المنوال، قيمة المنوال هي: أي السكنات الأكثر وجودا في الحي هي السكنات ذو 4 غرف.

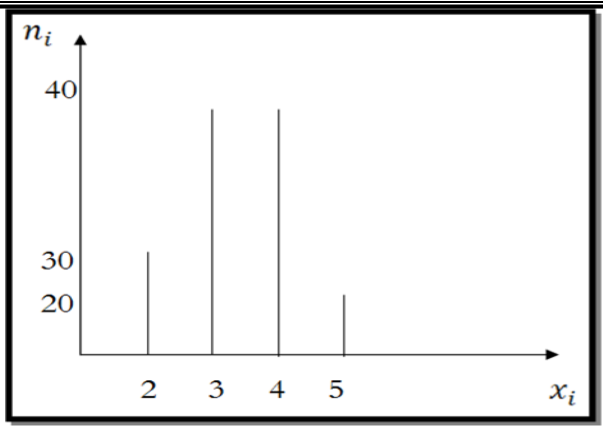


ملاحظة(1):

قد يكون للتوزيع التكراري أكثر من منوال، فمثلا يكون لدينا الجدول التالي:

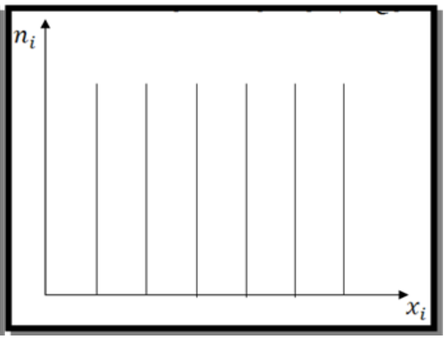
المتغير: عدد الغرف X_i	التكرار:عدد السكنات n_i
2	20
3	40
4	40
5	10
المجموع	110

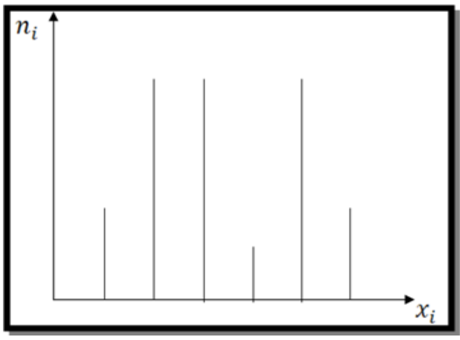
ففي هذا المثال لدينا منوالين: و



ملاحظة(2):

قد يكون لدينا توزيع متعدد المنوال وقد يكون لدينا توزيع عديم المنوال مثل كما هو موضع في هذين الشكلين:





2.9المنوالحالة البيانات المبوبة

عندما تكون البيانات مبوبة يعني في حالة وجود فئات فإن المنوال يحدد وفق المرحلتين التاليتين:

المرحلة الأولى: تتضمن هذه المرحلة تحديد الفئة المنوالية: وهي الفئة التي تقابل أعلى تكرار.

المرحلة الثانية: يحسب بالعلاقة التالية:

$$M_0 = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)$$

حيث أن: e_{i-1} يمثل الحد الأدنى للفئة المنوالية، a_i طول الفئة المنوالية، α_1 الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرارالفئة السابقة لها و α_2 الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة اللاحقة لها.

مثال: (مثال سابق)

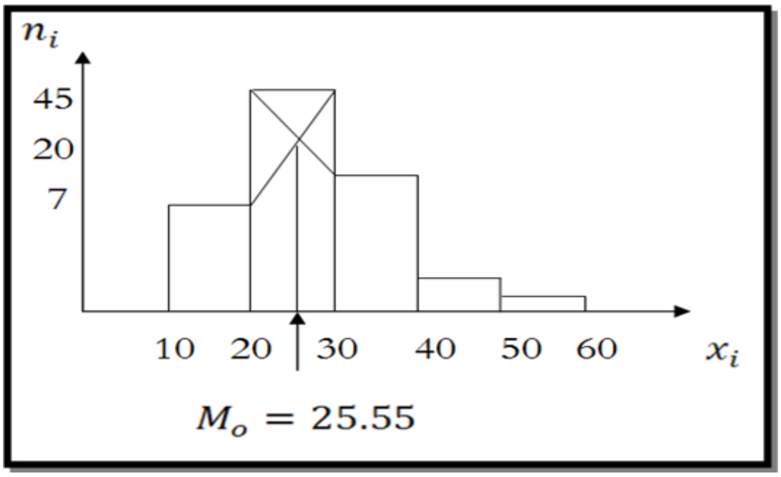
يمثل الجدول التالي توزيع عمال شركة النسيج حسب الأجر (الوحدة 10^3 دج).

المتغير: عدد الغرف X_i	التكرار:عدد السكنات n_i
20-10	20
30-20	45
40-30	25
50-40	07
60-50	03
المجموع	100

ولمعرفة الأجر السائد في هذه الشركةطبعا سنحسب المنوال، ولدينا الفئة المنوالية هي الفئة التي تقابل أعلى تكرار: 20–30، وانطلاقا من علاقة المنوال يكون لدينا:

$$M_0 = 20 + 10 \times \left(\frac{25}{25+20} \right) = 25.55$$

ومنه فالأجر السائد في هذه الشركة هو: 25550دج، وبيانيا يحدد المنوال بالطريقة التالية والموضحة في الشكل التالي:



ملاحظة:

إذا كان أطوال الفئات غير متساوي فإننا نصحح التكرار، ولا يصحح التكرار إلا عند رسم المدرج التكراري وحساب المنوال.

مثال

يصحح التكرار على أساس انه لدينا طول فئة قاسم مشترك أكبر وهو 10 وعلى هذا الأساس عندما نجد فئة طولها ضعف العدد 10 نقسم تكرارها على العدد 2 وهكذا ونوضح هذا في هذا الجدول.

الأجور X_i	التكرار: عدد العمال n_i	التكرار المصحح n_i'
20-10	20	20
40-20	50	25=2/50
70-40	60	20=3/60
80-70	07	07
90-80	03	03
المجموع	100	-

لدينا الفئة المنوالية بعد تصحيح التكرار هي الفئة: 20–40.وانطلاقا من علاقة المنوال يكون لدينا:

$$M_0 = 20 + 10 \times \left(\frac{5}{5+5} \right) = 25$$

ومنه فالأجر السائد في هذه الشركة هو: 25000 دج.

III. مقاييس التشتت والشكل

1. مقاييس التشتت(Measures of dispersion)

يعتبر تحليل المعطيات الإحصائية باستعمال مقاييس النزعة المركزية محدود وغير كاف لتحديد خواص الظاهرة المدروسة، فلا يمكن أحيانا مثلا تقديم دراسة تسمح لنا بمقارنة بين سلسلتين إحصائيتين أو أكثر فمثلا إذا كانت لديناالسلسلتين الإحصائيتين التاليتين:

32 24 24 22 22 22 22 20 16 16

39 35 27 23 23 22 22 22 19 16 11 5

نلاحظ أن لهما نفس الخصائص الثلاثة للنزعة المركزية: $\overline{X} = M_e = M_0 = 22$

في هذه الحالة لا نستطيع أن نقارن بين هذين السلسلتين، لكن هناك مقاييس أخرى تسمح لنا بالمقارنة بينهم وتعتمد بالأساس على حساب الفروقات بين قيم المشاهدات والقيمة المركزية(قد تكون القيمة المركزية المنوال أو الوسيط أو المتوسط الحسابي، غالبا ما يكون المتوسط الحسابي)، إن هذه المقاييس تبين لنا كيفية توزيع انتشار قيم المتغيرالإحصائي حول القيمة المركزية.

1.1المدى العام(General range)

وهو الفرق بين أكبر قيمة وأقل قيمة في التوزيع الإحصائي، وهو كذلك الفرق بين الحد الأعلى للفئة الأخيرة والحد الأدنى للفئة الأولى: $E = X_{\max} - X_{\min}$

ونلاحظ أن المدى العام يضم كل الوحدات الإحصائية التي تشكل المجتمع الإحصائي، وهو يتأثر بالقيم المتطرفة، ويستعمل المدى العام في المقارنة بين سلسلتين إحصائيتين أو أكثر، وبالرجوع لحالة السلسلتين السابقتين نلاحظ أن المدى العام للسلسلة الأولى هو: أما بالنسبة للسلسلة الثانية فهو: $E = 39 - 5 = 34$.

ومنه يمكن القول أن السلسلة الثانية أكثر تشتتا مقارنة بالسلسلة الأولى.

2.1المدى الربيعي(Interquartile range)

وهو الفرق بين الربيع الثالث والربيع الأول، ومنه المدى الربيعي يضم 50 بالمائة من المشاهدات، ويستعمل كذلك في المقارنة بين سلسلتين أو أكثر من حيث التشتت، أي: $IQ = Q_3 - Q_1$

3.1 نصف المدى الربيعي(Semi–interquartile range)

نصف المدى الربيعي هو حاصل قسمة المدى الربيعي إلى العدد 2: $IQ/2 = (Q_3 - Q_1)/2$

مثال

لتكن لدينا السلسلة الإحصائية التالية والتي تمثل توزيع 11 عاملا في مؤسسة ما حسب الأجر اليومي:

17001800 1600 1400 1300 1200 1100 1000 900 800 700

لحساب المدى الربيعي لابد من حساب الربيع الأول Q_1 والربيع الثالث Q_3 نلاحظ أن رتبة الربيع الأول هي: $(N+1)/4 = (11+1)/4 = 3$ ،رتبته 3 أي $Q_1 = 900$ ، أما رتبة الربيع الثالث فهي:

$$3(N+1)/4 = 3(11+1)/4 = 9$$

رتبته 9 أي $Q_3 = 1600$ ومنه فنصف المدى الربيعي: $IQ/2 = (Q_3 - Q_1)/2 = (1600-900)/2 = 350$

ويمكن القول أن 50% من العمال أجورهم تبتعد في المتوسط عن الوسيط بأقل من 350 دج.

4.1الانحراف المتوسط(**Mean deviation**)

وهو المتوسط الحسابي لانحرافات المتغير الإحصائيx_iعن احد القيم المركزية للسلسلة (المنوالأو الوسيطأوالمتوسط الحسابي)، وحسابيا نستعمل القيمة المطلقة حتى لا ينعدم هذا المتوسط عندما تكون القيمة المركزية هي المتوسط الحسابي.ونكتب الانحرافات التالية:

- الانحراف المتوسط بالنسبة للوسيط: $$E_{M_e} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \times |x_i - M_e|}{N}$$
- الانحراف المتوسط بالنسبة للمنوال: $$E_{M_o} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \times |x_i - M_o|}{N}$$
- الانحراف المتوسطبالنسبة للمتوسط الحسابي: $$E_{\overline{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \times |x_i - \overline{X}|}{N}$$

مثال

ليكن لدينا الجدول التالي والذي يبين توزيع عمال شركة النسيج الوطنية حسب الأجر:

الوحدة: 10^3دج

المتغير: الأجور X_i	مركز الفئة C_i	التكرار: عدد العمال n_i	$n_i \times C_i$	التكرار المتجمع الصاعد $F\uparrow$
40-20	30	20	600	02
60-40	50	30	1500	50
80-60	70	40	2800	90
100-80	90	7	630	97
120-100	110	3	330	100
المجموع	-	100	0658	-

وبحساب المتوسط الحسابي $\overline{X} = 5860/100 = 58.6$ والوسيط هو: $M_e = 40+10\times(50-20)/30 = 50$ يكون:

$\|x_i - \overline{X}\|$	$n_i \times \|x_i - \overline{X}\|$	$\|x_i - M_e\|$	$n_i \times \|x_i - M_e\|$
28.6	572	20	400
8.6	258	0	0
11.4	456	20	800
31.4	219.8	40	280
51.4	154.2	60	180
-	1660	-	1660

ومنه نحسب الانحراف المتوسط للوسط الحسابي:

$$E_{\overline{X}}=\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i\times\left|x_i-\overline{X}\right|}{N}=\frac{1660}{100}=16.6$$

ويمكن القول أن الأجور تبعد في المتوسط عن الوسط الحسابي بـ : 1660دج

أما الانحراف المتوسط بالنسبة للوسيط:

$$E_{M_e}=\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i\times\left|x_i-M_e\right|}{N}=\frac{1660}{100}=16.6$$

ويمكن القول أن الأجور تبعد في المتوسط عن الوسيط بـ: 1660دج

5.1التباين(The variance)

يعتبر التباين هو أكثر مقاييس التشتت استعمالاوهو المتوسط الحسابي لمربعات الفروق بين قيم المتغير الإحصائي X_i والمتوسط الحسابي أي:

$$V(X)=\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i\times(x_i-\overline{X})^2}{N}$$

ومن خلال العلاقة نلاحظ أن:

$$V(X)=\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i\times(x_i-\overline{X})^2}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i\times(x_i^2-2x_i\overline{X}+\overline{X}^2)}{N}$$

$$V(X)=\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i\times x_i^2}{N}-\overline{X}^2=\sum_{i=1}^{n} f_i\times x_i^2-\overline{X}^2$$

أ. خصائص التباين

- تباين عددثابت معدوم:

$$V(X)=\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i\times(a-\overline{a})^2}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i\times 0}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i\times(a-a)^2}{N}=0$$

وهذا باعتبار أن متوسط عدد ثابتa هو نفسه ذلك العددa.

- حساب تباين $V(aX)$:

$$V(aX)=\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i\times(ax_i-a\overline{X})^2}{N}=a^2\times\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i\times(x_i-\overline{X})^2}{N}=a^2\times V(X)$$

مثال: (المثال السابق)

المتغير: الأجور X_i	مركز الفئة C_i	التكرار: عدد العمال n_i	التكرار النسبي f_i	$f_i \times C_i$	$x_i - \overline{X}$	$f_i \times (x_i - \overline{X})^2$
40-20	30	20	0.2	6	-28.6	163.59
60-40	50	30	0.3	15	-8.6	22.18
80-60	70	04	0.4	28	11.4	51.98
100-80	90	7	0.07	6.3	31.4	69.01
120-100	110	3	0.03	3.3	51.4	79.25
المجموع	-	100	1	58.6	-	386.04

إذن فالتباين هو: $V(X) = 386.04$

ب. الانحراف المعياري(Standard deviation)

الانحراف المعيار هو جذر التباين فهو يعبر عن البعد المتوسط لمشاهدات المتغير الإحصائيx_i عن المتوسط الحسابي

وفي مثالنا نجد: $SD = \sqrt{V(X)} = \sqrt{386.04} = 19.64$

ومنه يمكن القول أن أجور العمال تبتعد في المتوسط عن متوسط الأجر في المؤسسة بـ: 1964دج.

6.1معامل التغير أوالاختلاف(Coefficient of variation)

هو معامل نسبي يستخدم في المقارنة بين تشتت بيانات ظاهرتين مختلفتين أو أكثر، ويستعمل عندما تكون السلاسل الإحصائية غير متجانسة أي وحدات القياس مختلفة ويحسب معامل الاختلاف بالعلاقة التالية:

$$CV = SD \times 100\% / \overline{X}$$

مثال

إذا كان متوسط الأجور في مؤسسة جزائرية E_1 هو والانحراف المعياري وكان متوسط الأجور في مؤسسة مغربيةE_2 هو و الانحراف المعياري نلاحظ أن معامل الاختلاف عمال الشركة الجزائرية هو:

$$CV = SD \times 100\% / \overline{X} = 150 \times 100\% / 2000 = 7.5$$

أما بالنسبة للشركة المغربية فهو:

$$CV = SD \times 100\% / \overline{X} = 120 \times 100\% / 16000 = 7.5$$

ومنه نقول أن درجة تشتت الأجور بالنسبة لمتوسط الأجر متساوي بالنسبة للشركتين، وإذا كان وهذا كمثال معامل الاختلاف بالنسبة للأجور عمال الشركة الجزائرية اقل منه بالنسبة للشركة المغربية فنقول أن الأجور في الشركة الجزائرية أكثر تجانسا مقارنة بالشركة المغربية.

7.1العزوم(The moments)

أ. العزوم البسيطة(Simple moments)

إذا كان لدينا مجموعة من المشاهدات التالية: ، فيعرف العزم البسيط من الدرجة kبالمتوسط الحسابي لقيم ويحسب بالعلاقة التالية:

$$M_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \times x_i^k}{N} \ \wedge \ N = \sum_{i=1}^{n} n_i$$

ب. العزوم المركزية(Central moments)

إذا كان لدينا مجموعة من المشاهدات: $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ ، فيعرف العزم المركزي من الدرجة k بالمتوسط الحسابي لقيم $(x_i - \overline{X})^k$ ويحسب بالعلاقة التالية:

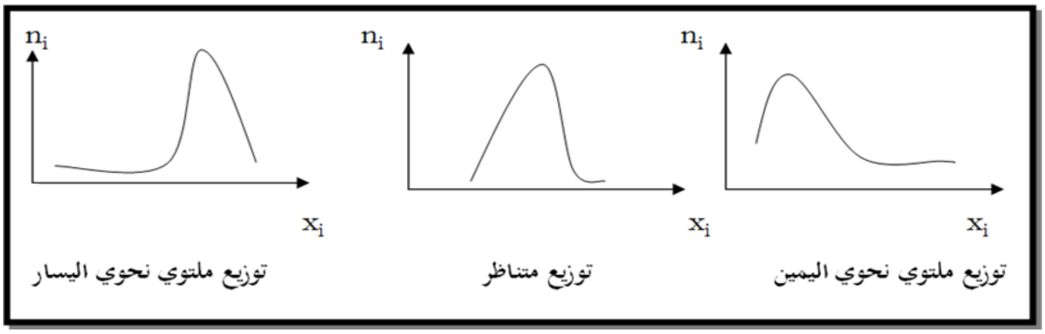
$$\mu_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \times (x_i - \overline{X})^k}{N} = \sum_{i=1}^{n} f_i \times (x_i - \overline{X})^k$$

ونلاحظ أن التبيان هو عزممركزي من الدرجة 2، ونكتب:

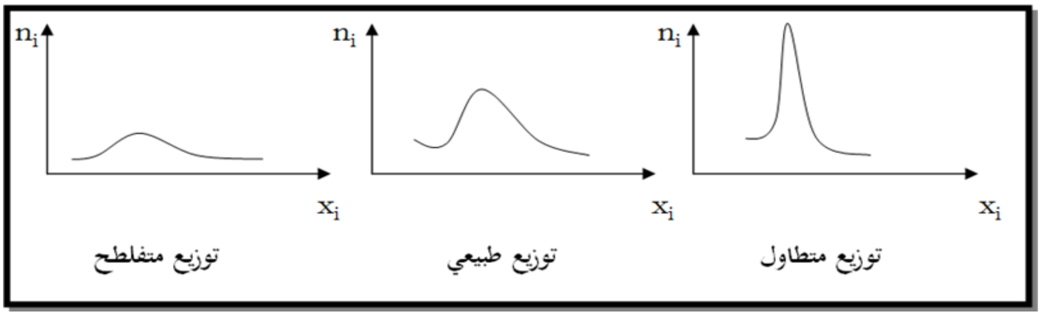
2. مقاييس الشكل(Measures of form)

إضافة إلى مقاييس الوضع(النزع المركزية) ومقاييس التشتت، هناك مقاييس أخرى تبين نوع شكل التوزيع الإحصائي، فمقاييس الالتواء تبين التواء الشكل هل هو ملتوي نحوي اليمين أو اليسار أو متناظر، ومقاييس التفلطح تبين شكل التوزيع التكراري مقارنة مع التوزيع الطبيعي فيكون مثله(شكل جرس) أومتطاول أو متفلطح.

بالنسبة للالتواء يأخذ التوزيع التكراري أحد الأشكال التالية:



وبالنسبة للتفلطح يأخذ التوزيع التكراري أحد الأشكال التالية:



1.2مقاييس الالتواء(Skewness parameters)

أ. معامل بيرسن الأول(Coefficient de Karl Pearson)

يعرف مقياس بيرسنالأول للالتواء بالعلاقة التالية: $P_1=(\overline{X}-M_o)/SD$

فإذا كان: $P_1=0$ نقول عندئذ عن التوزيع انه متناظر، $P_1\succ 0$ فالتوزيع ملتوي نحو اليمين أما إذا كان $P_1\prec 0$ فان التوزيع ملتوي نحوي اليسار.

ب. معامل بيرسن الثاني

يعرف مقياس بيرسنالثاني للالتواء بالعلاقة التالية: $P_2=\mu_3^2/\mu_2^3$

فإذا كان: $P_2=0$ نقول عندئذ عن التوزيع انه متناظر، أما إذا كان $P_2\neq 0$ فالتوزيع غير متناظر ونميز الحالتين التاليتين حسب إشارة العزم المركزي من الدرجة الثالثة، إذا كان $\mu_3\succ 0$ فالتوزيع ملتوي نحو اليمين أما إذا كان $\mu_3\prec 0$ فان التوزيع ملتوي نحوي اليسار،وعموما تستعمل قيمة معامل بيرسن الثاني ككل مقارنته مع معامل آخر مرتبط بتوزيع آخر والذي له معامل كبير نقول أنه أكثر التواء من الآخر.

ج. معامل فيشر(Fisher coefficient)

يعرف مقياس فيشر للإلتواء بالعلاقة التالية: $F=\mu_3/SD^3$

فإذا كان: $F=0$ نقول عندئذ عن التوزيع انه متناظر، $F\succ 0$ فالتوزيع ملتوي نحو اليمين أما إذا كان $F\prec 0$ فان التوزيع ملتوي نحوي اليسار.

د. معامل يول(Yul coefficient)

يعرف مقياس يول للالتواء بالعلاقة التالية:

$$\gamma=\frac{(Q_3-M_e)-(M_e-Q_1)}{(Q_3-M_e)+(M_e-Q_1)}$$

فإذا كان: $\gamma=0$ نقول عندئذ عن التوزيع انه متناظر، $\gamma\succ 0$ فالتوزيع ملتوي نحو اليمين أما إذا كان $\gamma\prec 0$ فان التوزيع ملتوي نحوي اليسار.

مثال: ليكن لدينا التوزيع التكراري التالي:

$f_i\times(x_i-\overline{X})^3$	$f_i\times(x_i-\overline{X})^2$	$x_i-\overline{X}$	$f_i\times C_i$	f_i	C_i		X_i
-11.88	2.66	-4.46	0.66	0.13	5	4	6-4
-2.5	1.01	-2.46	1.16	0.16	7	5	8-6
-0.02	0.04	-0.46	1.8	0.2	9	6	10-8
1.2	0.78	1.53	3.66	0.33	11	10	12-10
7.35	2.08	3.53	2.16	0.16	13	5	14-12
$M_3=-5.85$	$M_2=6.58$	-		1	-	30	المجموع

من خلال معطيات الجدول لدينا : $\overline{X}=9.46$ ، $M_o=10.72$ ، $SD=2.56$

- معامل بيرسن الأول للإلتواء: $P_1 = (\overline{X} - M_o)/SD = (9.46 - 10.72)/2.56 = -0.49 \succ 0$

فالتوزيع ملتوي نحوى اليسار .

- معامل بيرسن الثاني للإلتواء: فالتوزيع ملتوي نحوى اليسار.
- معامل فيشر: $F = \mu_3 / SD^3 = -5.85/2.56^3 = -5.85/16.77 = -0.34$

فالتوزيع ملتوي نحوى اليسار.

- معامل يول: $\gamma = \dfrac{(Q_3 - M_e) - (M_e - Q_1)}{(Q_3 - M_e) + (M_e - Q_1)} = \dfrac{(11.5 - 10) - (10 - 7.4)}{(11.5 - 10) + (10 - 7.4)} = -0.26 \prec 0$

فالتوزيع ملتوي نحوى اليسار.

2.2مقاييس التفلطح(Kurtosisparameters)

أ. معامل بيرسن للتفلطح

يعرف مقاييس بيرسن للتفلطح بالعلاقة التالية: $K = \mu_4 / \mu_2^2$

فإذا كان التوزيع طبيعي يكون $K = 3$ ، أما إذا كان $K \prec 3$ نقول عندئذ عن التوزيع انه متفلطح كثيراً (Platykurtic) وكلما اقتربت قيمت المعامل K من الواحد زاد التفلطح، غير انه إذا كان $K \succ 3$ فالتوزيع ملتوي فالتوزيع يصبح غير مفلطح (Leptokurtic) وكلما ارتفعت قيمت المعامل K يضعف تفلطح التوزيع.

ب. معامل فيشر للتفلطح

يعرف مقاييس فيشر للتفلطح بالعلاقة التالية: $\mathrm{B} = \mu_4 / \mu_2^2 - 3$

فإذا كان التوزيع طبيعي يكون $\mathrm{B} = 0$ ، أما إذا كان $\mathrm{B} \prec 0$ نقول عندئذ عن التوزيع انه متفلطح كثيراً (Platykurtic)، غير انه إذا كان $\mathrm{B} \succ 0$ فالتوزيع ملتوي فالتوزيع يصبح غير مفلطح (Leptokurtic).

مثال

X_i		C_i	f_i	$x_i - \overline{X}$	$f_i \times (x_i - \overline{X})^4$
6-4	4	5	0.13	-4.46	53.07
8-6	5	7	0.16	-2.46	6.17
10-8	6	9	0.2	-0.46	0.0094
12-10	10	11	0.33	1.53	1.84
14-12	5	13	0.16	3.53	25.97
المجموع	30	-	1	-	$M_4 = 87.07$

- معامل بيرسن للتفلطح: $K = \mu_4 / \mu_2^2 = 87.07/6.58^2 = 2.01 \prec 3$

فالتوزيع متفلطح.

- معامل فيشر: $\mathrm{B} = \mu_4 / \mu_2^2 - 3 = 2.01 - 3 = -0.99 \prec 0$

فالتوزيع متفلطح.

IV. التوزيعات ذات المتغيرتين(Joint distribution)

تمهيد

رأينا في ما سبق المسائل المتعلقة بقياسات ومشاهدات مرتبطة بمتغير واحد، وفي هذهالنقطة، سنتطرق إلى دراسة بعض المسائل المرتبطة بمتغيرين اثنين و، فإذا كانت كل قيمة من قيم المتغير الإحصائي توجد قيمة مقابلة للمتغير الآخرفإن الأزواج المرتبة من هذه القيم تسمى مجتمعا ذو بعدين، والزوج المرتب يسمى متغيرا إحصائيا ذو بعدين، والأمثلة على المجتمعات ذات البعدين كثيرة وهي ذات أهمية كبيرة في مجالات التربية وعلم النفس وعلم الاجتماع والإدارة والاقتصاد.فمثلا دراسة مجتمع من عمال من حيث السن والأجر، والهدف من هذه دراسة هذه البيانات هو الإجابة عن السؤالين الرئيسيين:

- هل هناك علاقة بين المتغيرين السن والأجر(ارتباط واستقلالية)؟
- إذا كانت هناك علاقة بين المتغيرين فكيف نعبر عنها بمعادلة؟

1. الجداول الثنائية أو الجدول الإحصائي ذو بعدين(Contingency tables)

عندما ندرس مجتمع إحصائي ما من خلال متغيرين اثنين يأخذ الجدول الإحصائي الثنائي الشكل التالي:

X \ Y	Y_1	Y_2	....	Y_j	....	Y_m	المجموع
X_1	n_{11}	n_{12}	....	n_{1j}	....	n_{1m}	$n_{1\bullet}$
X_2	n_{21}	n_{22}	....	n_{2j}	....	n_{2m}	$n_{2\bullet}$
. . .	. . .	. . .	....	. . .	....	. . .	. . .
X_i	n_{i1}	n_{i2}	....	n_{ij}	....	n_{im}	$n_{i\bullet}$
. . .	. . .	. . .	....	. . .	....	. . .	......
X_k	n_{k1}	n_{k2}	....	n_{kj}	....	n_{km}	$n_{k\bullet}$
المجموع	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	....	$n_{\bullet j}$	....	$n_{\bullet m}$	$n_{\bullet\bullet}$

حيث: : هي الخاصية رقممن متغير الإحصائي، : هي الخاصية رقم من متغير الإحصائي، : هي عدد الوحدات الإحصائية التي لها الخاصية و الخاصية ، $n_{i\bullet}$: هي عدد الوحدات الإحصائية التي لها الخاصية، $n_{\bullet j}$: هي عدد الوحدات الإحصائية التي لها الخاصية، $n_{\bullet\bullet}$: هي عدد الوحدات كل الوحدات الإحصائية محل الدراسة. ونكتب:

$$n_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{m} n_{ij} \quad ; \quad n_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{k} n_{ij} \quad ; \quad n_{\bullet\bullet}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}$$

ملاحظات

- تسمى التكرارات بالتكرارات الحدية للمتغير الإحصائي، ويكون لدينا جدول التكرارات الحديةالخاصة بهذا المتغير كمايلي:

المتغير X	X_1	X_2	………………	X_i	………………	X_k	المجموع
التكرار الحدي	$n_{1\bullet}$	$n_{2\bullet}$	………………	$n_{i\bullet}$	………………	$n_{k\bullet}$	$n_{\bullet\bullet}$

- تسمى التكراراتبالتكرارات الحدية للمتغير الإحصائي، ويكون لدينا جدول التكرارات الحدية الخاصة بهذا للمتغير كمايلي:

المتغير Y	Y_1	Y_2	………………	Y_j	………………	Y_m	المجموع
التكرار الحدي	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	………………	$n_{\bullet j}$	………………	$n_{\bullet m}$	$n_{\bullet\bullet}$

- بإمكان أن تكون تكرارات الجدول الثنائي تكرارات نسبية موضحة كمايلي:

X \ Y	Y_1	Y_2	………….	Y_j	………….	Y_m	المجموع
X_1	f_{11}	f_{12}	………….	f_{1j}	………….	f_{1m}	$f_{1\bullet}$
X_2	f_{21}	f_{22}	………….	f_{2j}	………….	f_{2m}	$f_{2\bullet}$
. . .	. . .	. . .	………….	. . .	………….	. . .	. . .
X_i	f_{i1}	f_{i2}	………….	f_{ij}	………….	f_{im}	$f_{i\bullet}$
. . .	. . .	. . .	………….	. . .	………….	. . .	……
X_k	f_{k1}	f_{k2}	………….	f_{kj}	………….	f_{km}	$f_{k\bullet}$
المجموع	$f_{\bullet 1}$	$f_{\bullet 2}$	………….	$f_{\bullet j}$	………….	$f_{\bullet m}$	**1**

حيث أن: $f_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_{\bullet\bullet}}$ $f_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{k} f_{ij}$; $f_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{m} f_{ij}$;

$$\sum_{i=1}^{k} f_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{m} f_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} f_{ij} = 1$$

1.1جداول التكرارات النسبية الشرطية للمتغير الإحصائي: (مثلا نختار العمودj)

المتغير X	X_1	X_2	………….	X_i	………….	X_k	المجموع
التكرار الحدي بشرط j	n_{1j}	n_{2j}	………….	n_{ij}	………….	n_{kj}	$n_{\bullet\bullet}$
التكرار النسبي بشرط j	f_1^j	f_2^j	………….	f_i^j	………….	f_k^j	1

وتقرأ f_i^j التكرار النسبي للوحدة الإحصائيةإذا كان j أو بشرط j، حيث أن: $f_i^j = \frac{n_{ij}}{n_{\bullet j}}$

2.1 جداول التكرارات النسبية الشرطية للمتغير الإحصائي:(مثلا نختار السطر i)

المتغير Y	Y_1	Y_2	....	Y_j	....	Y_m	المجموع
التكرار الحدي بشرط i	n_{i1}	n_{i2}	....	n_{ij}	....	n_{im}	$n_{\bullet\bullet}$
التكرار النسبي بشرط i	f_1^i	f_2^i	....	f_j^i	....	f_m^i	1

وتقرأ f_j^i التكرار النسبي للوحدة الإحصائيةإذا كان i أو بشرط i، حيث أن: $f_j^i = \frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}}$

3.1 المتوسط الحسابي

أ.المتوسط الحسابي لـ X : ويحسب بالعلاقة التالية: $\overline{X} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_{i\bullet} \times X_i}{n_{\bullet\bullet}}$

ب. المتوسط الحسابي لـ:ويحسب بالعلاقة التالية: $\overline{Y} = \sum_{j=1}^{m} \frac{n_{\bullet j} \times Y_j}{n_{\bullet\bullet}}$

4.1 التغايرأو التباين المشترك(The covariance)

التغاير أو التباين المشترك هو الوسط الحسابي لجداءات الفروق و ونكتب:

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} n_{ij} \times (X_i - \overline{X})(Y_j - \overline{Y})$$

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} (n_{ij} \times X_i Y_j) - \overline{X}\overline{Y}$$

إذا كان التغاير معدوم نقول أن المتغيرين ومستقلين فيما بينهما. ونكتب: $Cov(X,Y) = 0 \Rightarrow X \perp Y$

مثال: ضمن عينة مكون من 100 فرد حاصلون على رخصة السياقة، ندرس علاقة العمربعدد الحوادث.

عدد الحوادث Y / العمر X	1	2	3	4	المجموع
30-18	18	16	8	3	**45**
42-30	16	10	8	4	**38**
54-42	8	4	2	3	**17**
المجموع	**42**	**30**	**18**	**10**	**100**

من خلال الجدول:

- عدد الأفراد الذين لهم حادث واحد هو42 ونسبتهم هي 42/100 =0.42 أي 42%؛
- عدد الأفراد الذين لهم أربعة حوادث هو10ونسبتهم هي 10/100=0.10 أي 10%؛
- عدد الأفراد الذين سنهم من 18 إلى30 سنة هو45 ونسبتهم هي 45/100 =0.45 أي 45%؛
- عدد الأفراد الذين لهم حادث واحد وسنهم من 18 إلى 30 هو 18 ونسبتهم هي 18/100=0.18 أي 18%؛
- عدد الأفراد الذين لهم أربعة حوادث وسنهم من 42 إلى 54 هو3 ونسبتهم هي 3/100 =0.03 أي 3.

1) المتوسط الحسابي لـ:(متوسط العمر للعينة، حيث نستعمل مراكز الفئات)

$$\overline{X}=\sum_{i=1}^{k}\frac{n_{i\bullet}\times X_i}{n_{\bullet\bullet}}=\frac{(45\times24)+(38\times36)+(17\times48)}{100}=36.64$$

إذا متوسط العمر للعينة هو 36.64

2) المتوسط الحسابي لـ: (متوسط عدد الحوادث)

$$\overline{Y}=\sum_{j=1}^{m}\frac{n_{\bullet j}\times Y_j}{n_{\bullet\bullet}}=\frac{(42\times1)+(30\times2)+(18\times3)+(10\times4)}{100}=1.96$$

إذا متوسط عدد الحوادث في هذه العينة هو1.96.

3) التغاير (التباين المشترك)

انطلاقا من معطيات الجدول السابق نحسب التغاير وفق القانون:

$$Cov(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}(n_{ij}\times X_iY_j)-\overline{X}\overline{Y}$$

$$Cov(X,Y)=\frac{(18\times24\times1)+(16\times24\times2)+......+(2\times48\times3)+(3\times48\times4)}{100}-36.64\times1.96$$

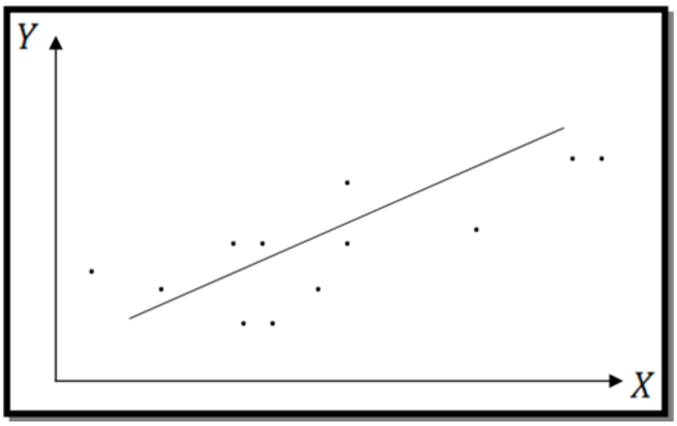
$$Cov(X,Y)=6432-63.97=636802$$

2. الانحدار الخطي البسيط والارتباط(Simple regression and correlation)

إن من أهم أهداف طرق الإحصاء هو معرفة مدى العلاقة بين الظواهر المختلفة سواء كانت هذه الظواهر اقتصادية أواجتماعية أو غيرها، حيث كما رأينا في هذا الفصل يتم أحيانا دراسة مجتمع إحصائي من خلال خاصيتين أومتغيرين والهدف الإجابة على السؤالين المذكورين سابقا هل هناك علاقة بين المتغيرين؟ وإذا كانت هناك علاقة بين المتغيرين فكيف نعبر عنها بمعادلة ؟.

1.2سحابة النقاط(Diffuse form of points)

بعد عملية جمع البيانات حول المتغيرات المعنية نقوم برسم المنحني البياني الذي يبين انتشار قيم المتغيرين Y , أو ما يسمى بسحابة النقاط، وهو تمثيل بياني للأزواج المرتبة :



2.2تقدير المعادلة الانحدار

بناءا على قيم المتغيرينحيث يكون لدينا من المشاهدات بالنسبة لهذين المتغيرين، نقوم تقدير معادلة الانحدار:

حيث أن ε_i يعبر عن الخطأ العشوائي، وتسمى كل من a وبالمعلمات (a تمثل الثابت و b معامل X)،حيث أن معادلة الانحدار تمثل معادلة المستقيم المرسوم في الشكل السابق لسحابة النقاط، حيث تعرف المعلمة بالميل الحدي(أي إذا تغير المتغير الإحصائيبوحدةواحدة أو 1% فسيتغير المتغير بقيمة تساوي أو%)، و تمثل تقاطع المستقيم مع محور العمودي.

وإن من أهم الطرق الإحصائية المعروفة بتقدير النماذج الإحصائية طريقة المربعات الصغرى Ordinary least squares) ((OLS)، وتتلخص هذه الطريقة بإيجاد مقدرات a والتي تجعل مجموع مربعات الانحرافات أصغر ما يمكن ويصبح النموذج المقدر:

تمثلبواقي النموذج وهو مقدرالخطأ أو الانحراف أي الفرق بين قيم الظاهرة الملاحظة وقيم المقدرة في النموذج ويحسب بالعلاقة: $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ ونكتب:

$$Min\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = Min\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = Min\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i)^2 ....(*)$$

ثم نشتق المعادلة (*) بالنسبة لـ $\hat{a}$ و، ويكون لدينا المعادلات الطبيعية التالية:

$$\frac{Min\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\partial \hat{a}} = -2 \times \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i) = 0...............(**)$$

$$\frac{Min\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\partial b} = -2 \times \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i) X_i = 0..............(***)$$

من المعادلة رقم (**) نحصل على قيمة المعلمة وهذا بدلالة المعلمة $\hat{b}$:

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b} \times \overline{X}$$

وبتعويض قيمة المعلمة في المعادلة (***) نحصل على المقدرة ونكتب:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\overline{X}\overline{Y}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2}$$

ملاحظات

- يجب حساب المعلمة أولا ثم نستنتج؛
- من قانون حساب القيمة المقدرة لـ وعند قسمة البسط والمقام على العدد n نحصل على:

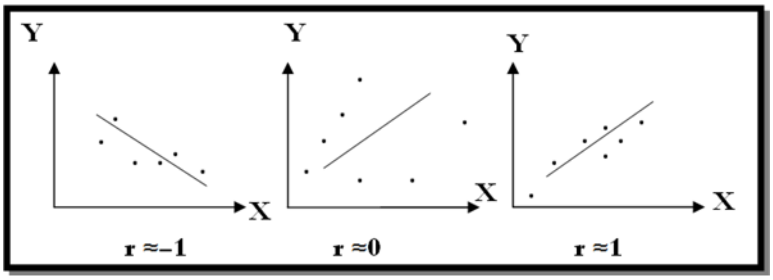
$$\hat{b}=\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-n\overline{X}\overline{Y}\right]/n}{\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right]/n}=\frac{Cov(X,Y)}{V(X)}$$

3.2معامل الارتباط(Correlation coefficient)

يقيس معامل الارتباط الخطي البسيط r مدى قوة أو ضعف العلاقة الخطية(الارتباط الخطي) بين المتغيرين الإحصائيين X ووهو محصور بين 1- و 1، فإذا كان $r=0.75$ فالعلاقة بين المتغيرين أو قوة الارتباط بينهما 75% وهي علاقة خطية قوية وموجبة أما إذا كان $r=-0.85$ فالعلاقة بين المتغيرين أو قوة الارتباط بينهما 85% وهي علاقة قوية وسالبة وإذا كان $r=0$ فلا توجد علاقة بين المتغيرين أو نقول إن المتغيرين مستقلين.

$$r=\frac{Cpv(X,Y)}{\sigma_X\times\sigma_Y}=\frac{\sum_{i=}^{n}X_iY_i-n\overline{X}\overline{Y}}{\sqrt{\sum_{i=}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2}\times\sqrt{\sum_{i=}^{n}Y_i^2-n\overline{Y}^2}}$$

ويمكننا توضيح ذلك من خلال الرسم البياني التالي:



مثال:

يمثل الجدول التالي النفقات والأجر(الدخل) للأسر الجزائرية خلال الفترة 2010-2019 كمايلي:الوحدة: 10^6 دج

السنوات	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
النفقات	12	14	14	16	17	17	20	22	24	25
الدخل	15	17	17	17	20	22	24	24	27	28

المطلوب:

1) قدر العلاقة بين المتغيرين وهذا باستعمال طريقة المربعات الصغرى (OLS).

2) أرسم المستقيم الذي يمثل المعادلة أو النموذج.

3) احسب معامل الارتباط ثم ماذا تلاحظ؟

الحل

1) نستعمل الجدول التالي لحساب قيمة مقدرة المعلمتين و:

السنوات	الدخل	النفقات	X_i^2	Y_i^2	$X_i \times Y_i$
2010	15	12	225	144	180
2011	17	14	289	196	238
2012	17	14	289	196	238
2013	17	16	289	256	272
2014	20	17	400	289	340
2015	22	17	484	289	374
2016	24	20	576	400	480
2017	24	22	576	484	528
2018	27	24	729	576	648
2019	28	25	784	625	700
المجموع	211	181	4 641	3 455	3 998

يكون لدينا:

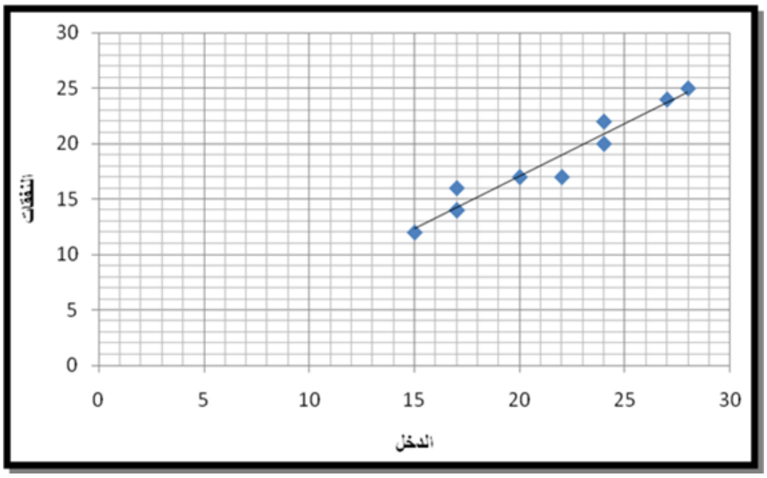
$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{211}{10} = 21.1 \quad \text{و} \quad \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = \frac{181}{10} = 18.1$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2} = \frac{3998 - 10 \times 21.1 \times 18.1}{4641 - 10 \times 21.1^2} = 0.94$$

وباستعمال قيمة في علاقة التالية: $\hat{a} = 18.1 - 0.94 \times 21.1 = -1.73$

ومنه تصبح العلاقة المقدرة بين النفقات والدخل كالتالي: $Y_i = -1.73 + 0.94 X_i + e_i$

2) رسم المستقيم الذي يمثل المعادلة أو النموذج:



3) حساب معامل الارتباط:

$$r=\frac{\sum_{i=}^{n}X_iY_i-n\overline{X}\overline{Y}}{\sqrt{\sum_{i=}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2}\times\sqrt{\sum_{i=}^{n}Y_i^2-n\overline{Y}^2}}=\frac{3998-10\times21.1\times18.1}{\sqrt{4641-10\times21.1^2}\times\sqrt{3455-10\times18.1^2}}=0.97$$

نلاحظ قوة الارتباط بين المتغيرين تقدر بـ97% وهي علاقة قوية وموجبة.

V. الأرقام القياسية(Index numbers)

1. مفهوم الرقم القياسي

هناك الكثير من الظواهر المتغيرة التي تحدث في أزمنة مختلفة أو أماكن مختلفة مثل أسعار سلعة معينة أو أسعار خدمات أو عدد العمال، وقد نحتاج إلى مقارنة ظاهرة أو أكثر في زمان أو مكان معينين بمثلهما في زمان أو مكان آخر وذلك لإظهار التغيرات التي تحدث أو تطرأ على الظواهر نتيجة اختلاف الزمان أو المكان، فتجري هذه المقارنة لإيجاد نسبة نسميها الرقم القياسي فإذا نسبنا قيمة ظاهرة ما في زمان معين إلى قيمتها في زمان آخر نتخذه أساسا فيسمى هذا الزمان فترة الأساس ونسمي الزمن الأول فترة المقارنة، وإذا نسبنا قيمة ظاهرة ما في مكان معين إلى قيمتها في مكان آخر نتخذه أساسا أو نعتبره مكان الأساس ونسمي المكان الأول بمكان المقارنة، ويطبق على الأرقام في كل من الحالتين باسم الأرقام القياسية فالرقم القياسي هو عدد يقارن به التغير النسبي الذي يطرأ على أي قيمة ظاهرة نظرا لاختلاف الزمان والمكان، وتستعمل الأرقام القياسية مثلا في مجال أسعار السلع أو في الكمية المطلوبة، المنتوج السنوي، صادرات البترول، الاستهلاك السنوي لسلعة معينة،..... إلخ، ويعرف الرقم القياسي بالعلاقة التالية:

$$I_{t/b}=\frac{G_t}{G_b}\times100\%$$

حيث: هي القيمة في الزمن t (فترة الدراسة أو المقارنة)، و هي القيمة في الزمن b (فترة الأساس).

ملاحظة:

تكون قيمة الرقم القياسي دائما في سنة الأساس أو في مكان الأساس 100(وتقارن النتيجة مع العدد100 فإذا كانت أكبر من 100 فيعني زيادة أوارتفاع وإذا كانت أقل من 100 يعني انخفاض).

أمثلة

1) سعر 1 كلغ من اللحم في الجزائر هو 900 دج في سنة 2000، و1200 دج في سنة 2019، وإذا حسبنا نسبة التغير في سعر 1 كلغ من اللحم في سنة 2019 مقارنة بسنة 2000 نجد:

$$I_{2019/2000}=\frac{1200}{900}\times100\%=133\%$$

ومن خلال هذه النتيجة نعتبر أن سعر1 كلغ من مادة اللحم ارتفع بنسبة 33% في سنة 2019 مقارنة بسنة 2000.

2) سعر 1 كلغ من السكر في بلد ما هو 60 دج في سنة 2000، و40 دج في سنة 2019، وإذا حسبنا نسبة التغير في سعر 1 كلغ من السكر في سنة 2019 مقارنة بسنة 2000 نجد:

$$I_{2019/2000} = \frac{40}{60} \times 100\% = 66\%$$

ومن خلال هذه النتيجة نعتبر أن سعر1 كلغ من مادة السكر انخفض بنسبة 34% في سنة 2019 مقارنة بسنة 2000في هذا البلد.

2. خصائص الأرقام القياسية

أ. خاصية المطابقة: $I_{t/t} = \frac{G_t}{G_t} \times 100\% = 100\%$

ب. خاصية الانعكاس: $I_{t/b} = \frac{G_t}{G_b} \times 100\% = \frac{1}{\frac{G_b}{G_t} \times 100\%} = \frac{1}{I_{b/t}}$

وعليه يكون: $I_{t/b} \times I_{t/b} = \frac{G_t}{G_b} \times \frac{G_b}{G_t} \times 100\% = 1$

ت. خاصية قابلية التحول:

إذاكانت لدينا القيم التالية: G_1 ، G_2 و G_3 أي القيم في الأزمنة 1، 2 و3يلاحظ أن:

$$I_{3/1} = \frac{G_3}{G_1} \times 100\% = \frac{G_3}{G_2} \times \frac{G_2}{G_1} \times 100\% = I_{3/2} \times I_{2/1}$$

3.الرقم القياسي التجميعي

1.3 الرقم القياسي التجميعي البسيط

يستعمل الرقم القياسي التجميعي البسيط مثلا في قياس التغير العام لأسعار وهذا بتجميع الأسعار الفعلية في السنة المدروسة(فترة المقارنة) ونسبتها إلى مجموع أسعار المواد نفسها في سنة الأساس، ويعرف بالعلاقة التالية:

$$I_{t/b} = \frac{\sum_{i=1}^{k} P_{it}}{\sum_{i=1}^{k} P_{ib}} \times 100\%$$

حيث أنهو رقم السلعة، و P_t هو سعر السلعة في سنة الدراسة أو المقارنة، وهو سعر السلعة في سنة الأساس.

مثال

يبين الجدول التالي أسعار بعض المواد الأساسية في الجزائر وهذا في السنتين 2010 و2019.

المادة	الوحدة	سعر سنة 2010	سعر سنة 2019

السكر	1كلغ	60 دج	70 دج
الحليب	1كلغ	250 دج	300 دج
اللحم	1كلغ	90 دج0	1200 دج
المجموع	-	1210دج	1570 دج

وبحساب الرقم القياسي التجميعي البسيط الأسعار لهذه السلع(مقارنة المستوى العام للأسعار للمواد الأساسية لسنة 2019 بالمستوى العام لأسعار هذه المواد لسنة الأساس 2010):

$$I_{2019/2010}=\frac{\sum_{i=1}^{3}P_{i2019}}{\sum_{i=1}^{3}P_{i2010}}\times 100\%=\frac{1570}{1210}\times 100\%=129.75$$

باعتبار أن المستوى العام للأسعار في سنة الأساس2010 هو 100، يمكن القول أن المستوى العام للأسعار للمواد الأساسية لسنة 2019 مقارنة بسنة الأساس ارتفع بنسبة حوالي30%.

2.3 الرقم القياسي التجميعي المرجح

يستعمل الرقم القياسي التجميعي المرجح في قياس التغير العام للأسعار أو الكميات، وهذا بترجيح أسعار أو كميات كل سلعة باستخدام معامل معين، ويعرف بالعلاقة التالية:

$$I_{t/b}=\frac{\sum_{i=1}^{k}P_{it}\times Q_{it}}{\sum_{i=1}^{k}P_{ib}\times Q_{ib}}\times 100\%$$

حيث هو حاصل جداء سعر السلعة في الكمية المطلوبة منها في الفترة ، و $(P_{ib}\times Q_{ib})$ هو حاصل جداء سعر السلعة في الكمية المطلوبة منها في الفترة.

4. الأرقام التجميعية المرجحة المستعملة

1.4 الرقم القياسي للاسبير(Laspeyres)

أ. الرقم القياسي للاسبير الأسعار

يعرف الرقم القياسي بالنسبة للاسبير بالعلاقة التالية:

$$I_{t/b}(P)=\frac{\sum_{i=1}^{k}P_{it}\times Q_{ib}}{\sum_{i=1}^{k}P_{ib}\times Q_{ib}}\times 100\%$$

ب. الرقم القياسي للاسبير للكميات

يعرف الرقم القياسي للكميات بالنسبة للاسبير بالعلاقة التالية:

$$I_{t/b}(Q)=\frac{\sum_{i=1}^{k}P_{ib}\times Q_{it}}{\sum_{i=1}^{k}P_{ib}\times Q_{ib}}\times 100\%$$

2.4 الرقم القياسي لباش(Paasche)

أ. الرقم القياسي لباش للأسعار

يعرف الرقم القياسي للأسعار بالنسبة لباش بالعلاقة التالية:

$$I_{t/b}(P)=\frac{\sum_{i=1}^{k}P_{it}\times Q_{it}}{\sum_{i=1}^{k}P_{ib}\times Q_{it}}\times 100\%$$

ب. الرقم القياسي لباش للكميات

يعرف الرقم القياسي بالنسبة لباش للكميات بالعلاقة التالية :

$$I_{t/b}(Q)=\frac{\sum_{i=1}^{k}P_{it}\times Q_{it}}{\sum_{i=1}^{k}P_{it}\times Q_{ib}}\times 100\%$$

3.4 الرقم القياسي لفيشر(Fischer)

إن الرقم القياسي لفيشر هو الوسط الهندسي للرقمين القياسيين لاسبيير و باش.

أ. الرقم القياسي لفيشر للأسعار:

يعرف الرقم القياسي للأسعار بالنسبة لفيشر بالعلاقة التالية:

$$F_{t/b}(P)=\sqrt{I_{t/b}(P)Laspeyres\times I_{t/b}(P)Paasche}$$

ب. الرقم القياسي لفيشر للكميات

يعرف الرقم القياسي للكميات لفيشر بالعلاقة التالية:

$$F_{t/b}(Q)=\sqrt{I_{t/b}(Q)Laspeyres\times I_{t/b}(Q)Paasche}$$

مثال

ليكن لدينا الجدول التالي والذي يمثل المعطيات الخاصة بأسعار وكميات الطلب على المواد الغذائية (الحليب، السكر، اللحم) وفي السنوات 2000، 2010، 2019والمتعلقة بمنطقة الجزائر العاصمة:

الفترات	المواد	السعر (دج)	الكميات (بالمليون)
2000	الحليب(اللتر)	20	05
	السكر(الكيلو غرام)	35	02
	اللحم(الكيلو غرام)	800	1.5
2010	الحليب (اللتر)	30	5
	السكر (الكيلو غرام)	40	2.5
	اللحم(الكيلو غرام)	1000	2
2019	الحليب (اللتر)	35	10
	السكر (الكيلو غرام)	70	3
	اللحم(الكيلو غرام)	1200	3

VI.مسائل وتمارين مع الحل

1. الجداول الإحصائية، التمثيل البياني

التمرين(01)

1) ماهي القواعد الواجب إتباعها الأساسية عند إنشاء الجدول الإحصائي؟

2) لتكن لدينا المتغيرات الإحصائية التالية:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	4	4	5	5	7	8
z	10	11	12	13	13	14	14

المطلوب: حساب مايلي:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \text{ ، } \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ ، } \sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i \text{ ، } \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \text{ ، } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \text{ ، } \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \text{ ، } \sum_{i=}^{n} (x_i + y_i)^2$$

الحل

1) القواعد التي يجب إتباعها عند إنشاء الجدول الإحصائي هي كالتالي:

- عنوان واضح في أعلى الجدول يعكس محتواه من المتغيرات وبياناتها؛
- ذكر عنوان أو المتغير الخاص بكل عمود، مع وحدة القياس؛
- يجب أن تكون معطيات المتغيرات مرتبة ترتيبا تصاعديا؛
- ذكر مصدر المعطيات في أسفل الجدول.

2) سنستعمل الجدول الإحصائي لحساب المجاميع:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \times y_i$	$\ln x_i$

1	3	1	9	3	0
2	4	4	16	8	0.69
3	4	9	16	12	1.09
4	5	16	25	20	1.38
5	5	25	25	25	1.6
6	7	36	49	42	1.79
7	8	49	64	56	1.94
28	**36**	**140**	**204**	**166**	**8.52**

يكون: $\sum_{i=1}^{n} y_i = 36$ ، $\sum_{i=1}^{n} x_i = 28$ ، $\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i = 166$ ، $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 204$ ، $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 140$

$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 140+204+2\times166 = 676$ ، $\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 8.52$

التمرين(02)

1) رتب قيم المتغير x_i الذي يمثل عدد الأولاد في الأسرة والذي حددت قيمه بعد اختيار 24 أسرة في جدول إحصائي: 4 0 1 2 3 4 3 4 0 1 2 3 6 7 8 6 1 0 3 4 5 6 2 4

2) ليكن لدينا توزيع أوزان طلبة السنة أولى جذع مشترك تخصص علوم اقتصادية، الوحدة: كلغ وهي كالتالي:

50 70 70 80 90 80 70 50 60 61 45 50 45 43 44 56 60 62 61 59 58 72 75 85 70 60 50 55 70 80 75 62 90 63 88 55 66 45 44 42 45 6066 80 77 55 44 42 45 55 56 58 63.

المطلوب: ترتيب هذه المعطيات في جدول إحصائي و ذلك باستعمال طريقة(STURGE) في تحديد أطوال الفئات.

الحل

1) ترتيب قيم المتغير x_i

X_i عدد الأولاد	التكرار المطلق: عدد الأسر n_i	التكرار النسبي f_i
0	3	0.125
1	3	0.125
2	3	0.125
3	4	0.166
4	5	0.20
5	1	0.041
6	3	0.125

7	1	0.041
8	1	0.041
المجموع	**24**	**1**

2) ترتيب البيانات حسبطريقة(STURGE):

لدينا العلاقة التالية: $a = \dfrac{E}{1+1.33\times\ln(N)}$

E هو المدى العام وهو الفرق بين الحد الأقصى والحد الأدنى لقيم المتغير الإحصائي:

$$E = X_{\max} - X_{\min} = 90-42 = 48$$

يكون: $a = \dfrac{E}{1+1.33\times\ln(N)} = \dfrac{48}{1+1.33\times\ln(50)} = 7.7 \cong 8$

عنوان جدول توزيع أوزان طلبة السنة أولى جذع مشترك تخصص علوم اقتصادية:الوحدة: كلغ

الأوزان X_i	عدد الطلبة (التكرار) n_i
50-42	11
58-50	9
64-58	12
72-64	6
80-72	4
88-80	5
96-88	3
المجموع	**50**

التمرين(03)

المعطيات التالية تمثل أطوال حياة خمسين بطارية سيارة (الوحدة شهر): 2527 26 26 25 2829 34 35 39 38 38 43 39 41 45 40 49 44 48 34 30 31 32 34 33 30 31 31 34 30 33 31 32 30 32 31 33 37 36 39 35 37 36 35 40 36 44 37 42

المطلوب:

1) حدد المجتمع الإحصائي، الوحدة الإحصائية المتغير الإحصائي وطبيعته؟

2) رتب المعطيات السابقة في جدول إحصائي(عدد الفئات يساوي 5).

3) أحسب التكرار النسبي و التكرار التجميعي الصاعد والنازل (مع العرض البياني لهما).

4) مثل بيانيا معطيات الجدول الإحصائي.

الحل

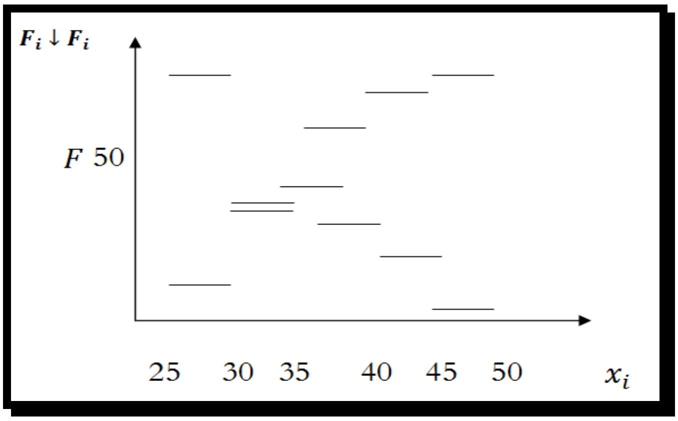
1) المجتمع الإحصائي هو بطاريات السيارات، الوحدة الإحصائية بطارية سيارة، المتغير حياة البطارية بالأشهر x_i ، طبيعتهكمي مستمر.

2) تحديد طول الفئة بالعلاقة التالية: $a = \frac{E}{5} = \frac{49-25}{5} 4.8 \cong 5$

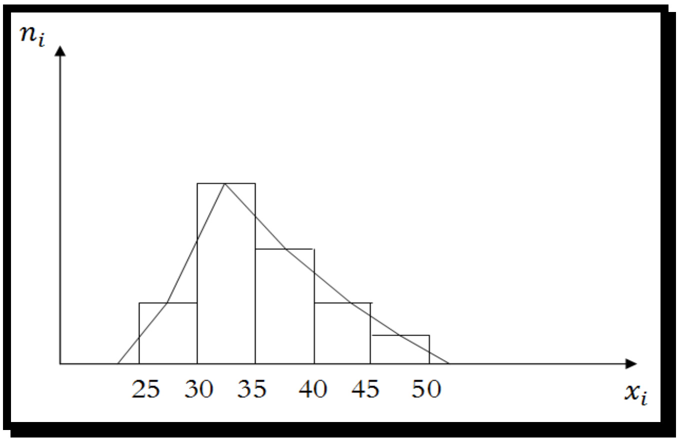
3) العنوان: توزيع حياة 50 بطارية سيارة.الوحدة: شهر

حياة البطارية X_i	التكرار: عدد البطاريات n_i	التكرار النسبي f_i	التكرار التجميعي الصاعد $F_i \uparrow$	التكرار التجميعي النازل $F_i \downarrow$
30--25	7	0.14	7	50
35--30	19	0.38	26	43
40--35	14	0.28	40	24
45--40	7	0.14	47	10
50--45	3	0.06	50	3
المجموع	**50**	**1**	–	–

العرض البياني للتكرار المتجمع الصاعد والنازل:



3) التمثيل البياني المناسب هو المدرج التكراري والمضلع التكراري



ملاحظة: نلاحظ أن مساحة المضلع التكراري هي نفس مساحة المدرج التكراري.

التمرين(04)

يبين الجدول التالي أعداد الطلبة من مختلف الاختصاصات الذين تقدموا لامتحان شهادة الثانوية خلال السنوات: 2020-2019-2018

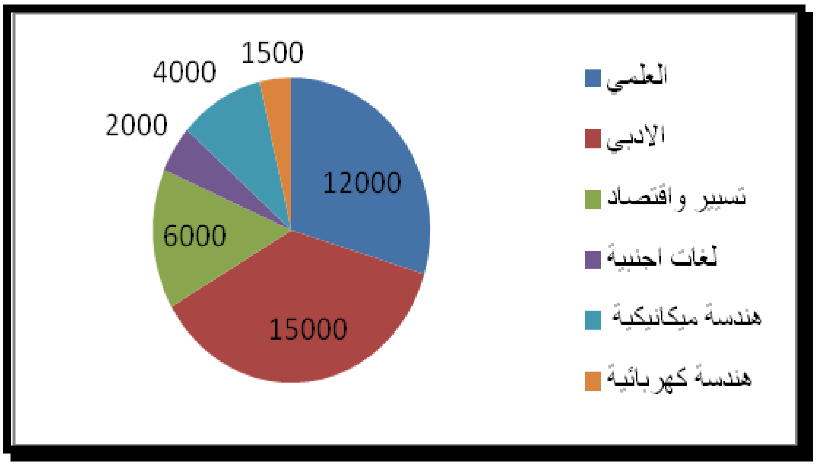
	عدد الطلبة خلال السنوات			
الفرع / السنة	2018	2019	2020	المجموع
علمي	12000	15000	20000	47000
أدبي	15000	18000	22000	55000
تسيير واقتصاد	6000	9000	1000	25000
لغات أجنبية	2000	3000	4200	9200
هندسة ميكانيكية	4000	6000	7000	17000
هندسة كهربائية	1500	1800	2300	5600
المجموع	40500	52800	65500	158800

المطلوب: تمثيل معطيات الجدول بيانيا ؟

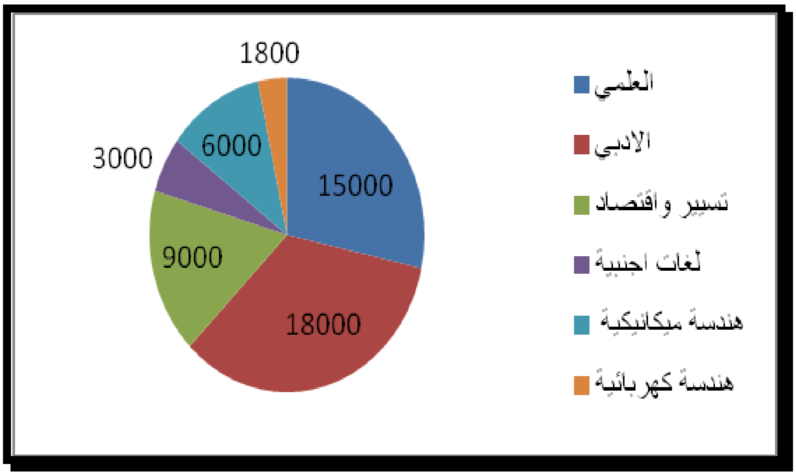
الحل

سنستعمل طريقة الدائرة وهي الأفضل مادام المتغير طبيعته كيفي.

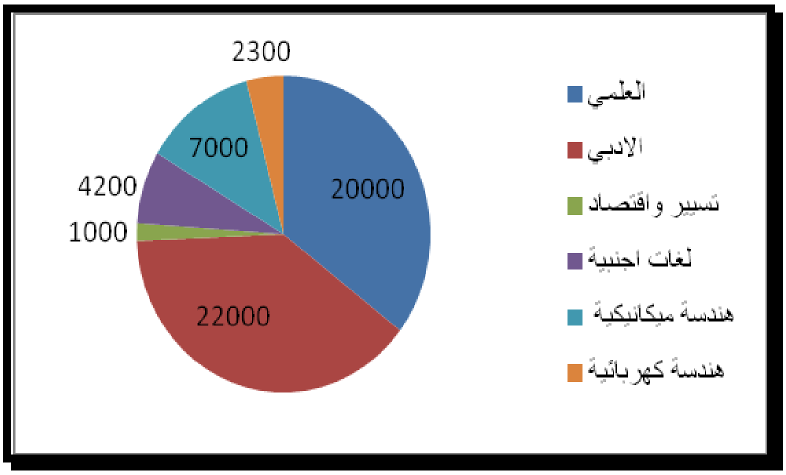
عنوان الشكل عداد الطلبة من مختلف الاختصاصات الذين تقدموا لامتحان الشهادة الثانوية خلال سنة 2018:



عنوان الشكل عداد الطلبة من مختلف الاختصاصات الذين تقدموا لامتحان الشهادة الثانوية خلال سنة 2019



عنوان الشكلعداد الطلبة من مختلف الاختصاصات الذين تقدموا لامتحان الشهادة الثانوية خلال سنة 2020



التمرين(05)

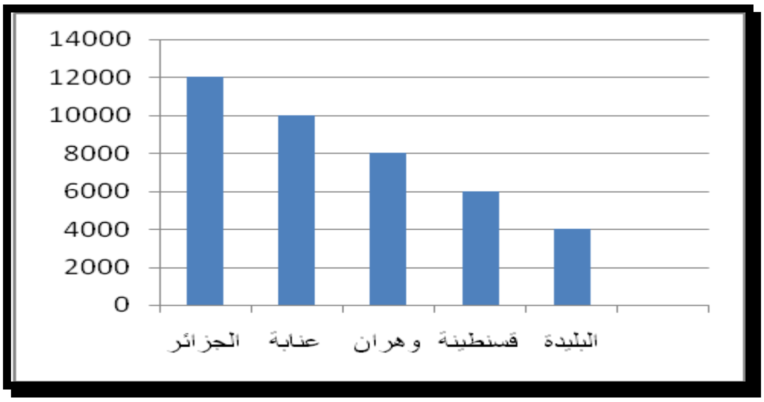
يظهر الجدول التالي عدد المهندسين المتقدمين لامتحان مسابقة توظيف في إحدى المعاهد المتخصصة من خمس ولايات جزائرية:

الولايات	الجزائر	عنابة	وهران	قسنطينة	البليدة	**المجموع**
عدد الطلبة	12000	10000	8000	6000	4000	**40000**

المطلوب: التمثيل البياني لمعطيات الجدول.

الحل

بإمكاننا استعمال طريقة الأعمدة المستطيلة وهي الأفضل مادام المتغير طبيعته كيفي.



التمرين(06)

يمثل الجدول التالي توزيع 100 طالب حسب معاملات الذكاء:

الفئات X_i	التكرار n_i
60-50	4
70-60	7
80-70	10
90-80	14
100-90	17
110-100	21
120-110	23
130-120	4
المجموع	**100**

المطلوب:

1) أحسب التكرار النسبي والتكرار التجميعي الصاعد والنازل (ثم مثل ذلك بيانيا).

2) ماهي نسبة الطلبة الذين لديهم معدل ذكاء: مابين90 و100، مابين120 و130، 100 على الأكثر، 90 على الأكثر، 100 على الأقل، 110 على الأقل، لا يقل معامل الذكاء لديهم عن 90؟

3) مثل معطيات الجدول بيانيا.

الحل

1) حساب التكرار النسبي والتكرار التجميعي الصاعد والنازل:

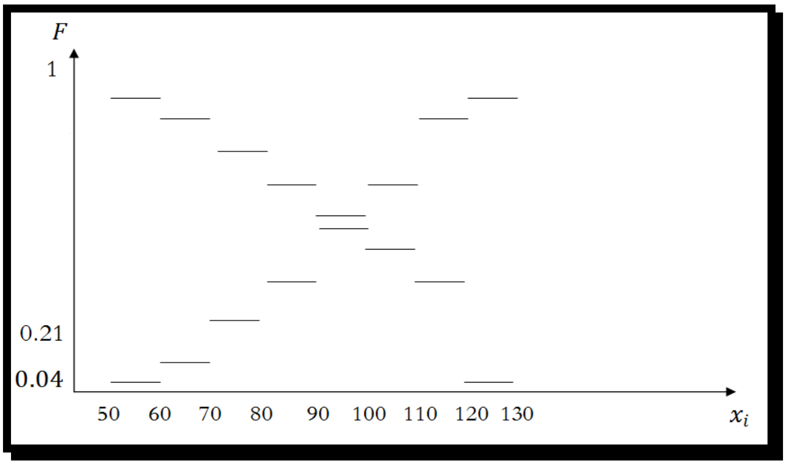
معدل الذكاء X_i	التكرار: عدد الطلبة n_i	التكرار التجميعي الصاعد $F_i\uparrow$	التكرار التجميعي النازل $F_i\downarrow$	التكرار النسبي f_i	التكرار النسبي التجميعي الصاعد $f_i\uparrow$	التكرار النسبي التجميعي النازل $f_i\downarrow$
60-50	4	4	100	0.04	0.04	1
70-60	7	11	96	0.07	0.11	0.96
80-70	10	21	89	0.1	0.21	0.89
90-80	14	35	79	0.14	0.35	0.79

0.65	0.52	0.17	65	52	17	100-90
0.48	0.73	0.21	48	73	21	110-100
0.27	0.96	0.23	27	96	23	120-110
0.04	1	0.04	4	100	4	130-120
-	-	**1**	-	-	**100**	المجموع

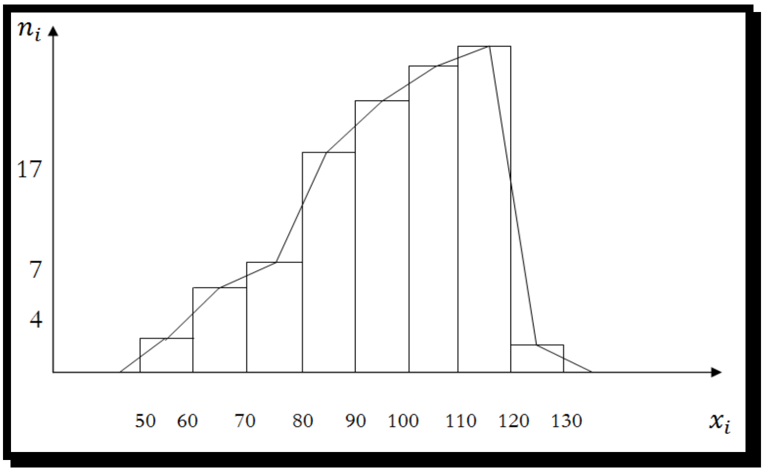
2) حساب نسبة الطلبة الذين لديهم معدل ذكاء:

- نسبة الطلبة الذين لديهم معدل ذكاء مابين90 و100 هي: 17%.
- نسبة الطلبة الذين لديهم معدل ذكاء مابين120 و130 هي: 4%.
- نسبة الطلبة الذين لديهم معدل ذكاء 100 على الأكثر هي: 52%.(مقابل التكرار التجميعي الصاعد).
- نسبة الطلبة الذين لديهم معدل ذكاء 90 على الأكثر هي: 35%.(مقابل التكرار التجميعي الصاعد).
- نسبة الطلبة الذين لديهم معدل ذكاء 100 على الأقل هي: 48%.(مقابل التكرار التجميعي النازل).
- نسبة الطلبة الذين لديهم معدل ذكاء 110 على الأقل هي: 27%.(مقابل التكرار التجميعي النازل).
- نسبة الطلبة الذين لا يقل معامل الذكاء لديهم عن 90 هي 65%.

العرض البياني للتكرار المتجمع الصاعد والنازل:



3) التمثيل البياني المناسب هو المدرج التكراري والمضلع التكراري:



التمرين(07)

ليكن لدينا معطيات المتغير الإحصائي X والموضح في الجدول التالي:

الفئات	4-2	8-4	10-8	12-10	18-12	20-18	22-20	المجموع
التكرار	3	10	7	10	21	6	3	**50**

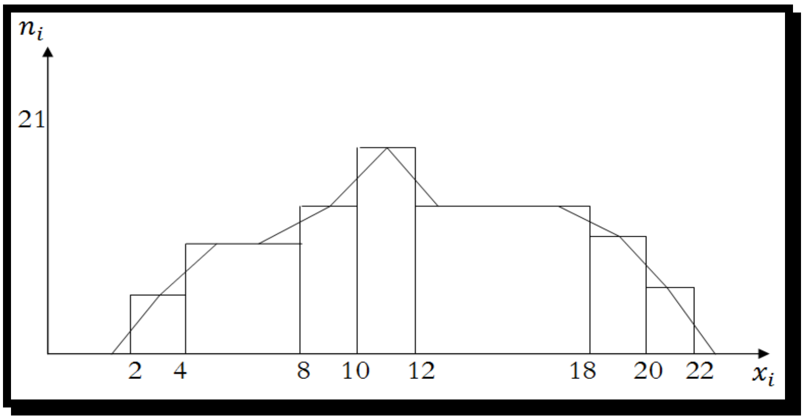
المطلوب: التمثيل البياني لقيم المتغير X .

الحل

نلاحظ أن أطوال الفئات غير متساوي وبالتالي يجب تصحيح التكرار بطريقة قسمة تكرار الفئات التي طولها من مضاعفات العدد 2 على قيمة المضاعف(طول اغلب الفئات هو العدد 2 ونبقي على تكرار الفئات التي طولها 2 كما هو). مثلا الفئة الخامسة 12–18 طولها هو العدد6 أي 2*3 وبالتالي يجب قسمة تكرار هذه الفئة على العدد 3 ويصبح التكرار المصحح هو 21/3=7.

الفئات	4-2	8-4	10-8	12-10	18-12	20-18	22-20	المجموع
التكرار	3	10	7	10	21	6	3	**50**
التكرار المصحح	3	$\frac{10}{2}=5$	7	10	$\frac{21}{3}=7$	6	3	**41**

وسنرسم المدرج التكراري انطلاقا من معطيات التكرار المصحح.



2. مقاييس النزعة المركزية

التمرين(01)

ليكن لدينا الجدول الإحصائي التالي والذي يمثل توزيع عمال شركة ماحسب الأجور:الوحدة:10^3دج

الأجر X	30-25	35-30	40-35	45-40	المجموع
عدد العمال التكرار n_i	7	10	16	7	**50**

المطلوب:

1) حدد المجتمع الإحصائي، الوحدة الإحصائية، المتغير الإحصائي وطبيعته؟

2) ماهو متوسط الأجور في هذه المؤسسة؟

3) ماهو الأجر الذي يتقاضونه أكثر من 50 بالمائة من العمال وحدده بيانيا؟

4) ماهو الأجر السائد في هذه المؤسسة (حدده بيانيا)؟

5) مثل معطيات الجدول في شكل بياني مناسب.

الحل

1) المجتمع الإحصائي هو عمال الشركة، الوحدة الإحصائية عامل، المتغير الأجر، طبيعتها كمي مستمر.

2) حساب متوسط أجور في هذه المؤسسة، نحسب المتوسط الحسابي.

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \times x_i}{N} \qquad \text{أو} \qquad \overline{X} = \sum_{i=1}^{n} f_i \times x_i$$

حيث نستعمل مراكز الفئات C_i .

الأجور X_i	التكرار: عدد العمال n_i	التكرار النسبي f_i	مركز الفئة C_i	$n_i \times C_i$	$f_i \times C_i$	$F\uparrow$
30-25	7	0.175	27.5	192.5	4.81	7
35-30	10	0.250	32.5	325	8.125	17
40-35	16	0.400	37.5	600	15	33
45-40	7	0.175	42.5	297.5	7.43	40
المجموع	**40**	**1**	–	**1415**	**35.36**	–

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \times x_i}{N} = \frac{1415}{40} = 35.36 \qquad \text{أو} \qquad \overline{X} = \sum_{i=1}^{n} f_i \times x_i = 35.36$$

3) الأجر الذي يتقاضونه أكثر من 50 بالمائة من العمال وتحديده بيانيا(يعني حساب الوسيط):

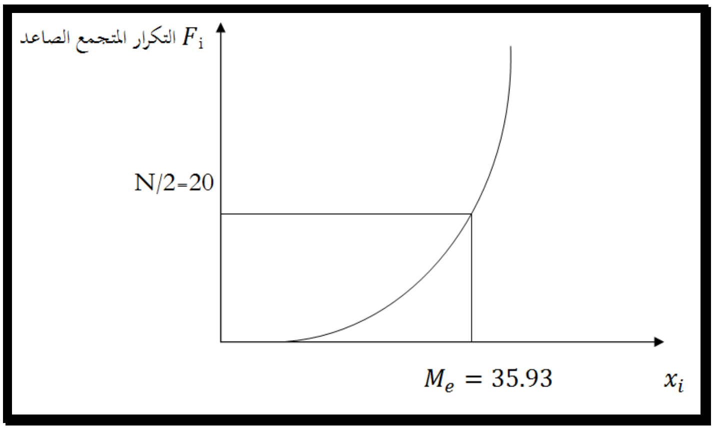
نستعمل لحساب الوسيط العلاقة الرياضية التالية:

$$M_e = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{N/2 - F_{i-1}}{n_i} \right)$$

كما يجب حساب التكرار المتجمع الصاعد، وهذا لتحديد الفئة الوسيطية، حيث هذه الفئة تقابل $N/2=20$ أو الأكبر منه مباشرة في عمود التكرار المتجمع الصاعد.(لا يوجد العدد 20 لكن الأكبر منه مباشرة هو 33)، أي أن الفئة 35–40 هي الفئة الوسيطية.

$$M_e = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{N/2 - F_{i-1}}{n_i}\right) = 35 + 5 \times \left(\frac{20-17}{16}\right) = 35.93$$

ومنه نعتبر أن 50 بالمائة من العمال يتقاضون أجرا أقل من 930 35 دج والباقي أي 50 بالمائة الأخرى أجرهم يفوق 93035 دج.



4) الأجر السائد في هذه الشركةمع تحديده بيانيا(يعني حساب المنوال):

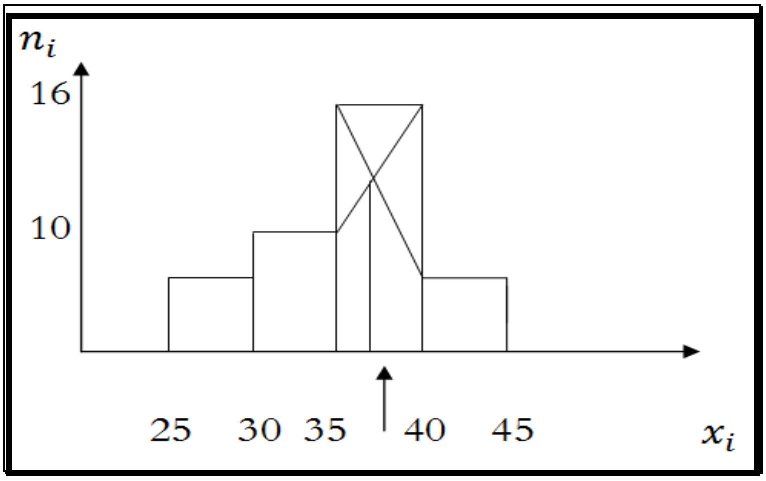
نستعمل لحساب المنوال العلاقة الرياضية التالية:

$$M_o = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)$$

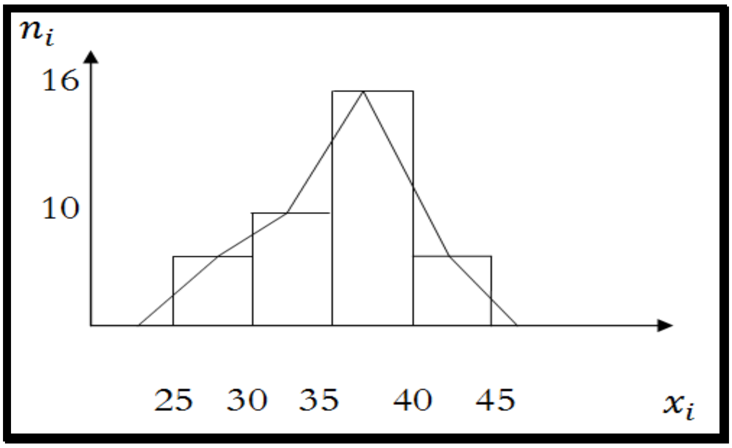
يجب تحديد الفئة المنوالية، حيث هذه الفئة تقابل أعلى تكرار وهو 16،(أي الفئة المنوالية35–40)

$$M_o = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right) = 35 + 5 \times \left[\frac{16-10}{(16-10)+(16-7)}\right] = 37$$

ومنه اغلب العمال يتقاضون أجرا يقارب 000 37 دج.



5) تمثيل معطيات الجدول في شكل بياني مناسب(المدرج والمضلع التكراري):



التمرين(02)

ليكن لدينا معطيات المتغير X كما هو موضح في الجدول التالي:

الفئات	20-10	30-20	50-30	80-50	90-80	المجموع
التكرار n_i	10	13	47	33	17	**120**

المطلوب: حساب الوسيط،المنوال، الربيع الأول والثالث، العشيرالأول والمئيني55.

الحل

الفئات X_i	التكرار n_i	التكرار المتجمع الصاعد $F\uparrow$	التكرار المصحح n'_i
20-10	10	10	10
30-20	13	23	13
50-30	47	70	47/2=23.5
80-50	33	103	33/3=11
90-80	17	120	17
المجموع	**120**	--	--

- **حساب الوسيط**:لدينا الفئة الوسيطية هي: 50-30

$$M_e = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{N/2 - F_{i-1}}{n_i} \right) = 30 + 20 \times \left(\frac{60-23}{47} \right) = 45.74$$

- **حساب المنوال**:بعد تصحيح التكرار تبقى الفئةالمنوالية: هي30-50

$$M_o = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) = 30 + 10 \times \left[\frac{23.5-13}{(23.5-13)+(23.5-11)} \right] = 34.56$$

- **حساب الربيع الأول**:فئة الربيع الأول هي: 50-30

$$Q_1 = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{N/4 - F_{i-1}}{n_i} \right) = 30 + 20 \times \left(\frac{30-23}{47} \right) = 32.97$$

- **حساب الربيع الثالث**:فئة الربيع الثالث هي: 50-80

$$Q_3 = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{3N/4 - F_{i-1}}{n_i}\right) = 50 + 30 \times \left(\frac{90-70}{33}\right) = 68.18$$

- **حساب العشير الأول**:فئة العشير الأولهي: 20-30

$$D_1 = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{N/10 - F_{i-1}}{n_i}\right) = 20 + 10 \times \left(\frac{12-10}{13}\right) = 21.53$$

- **حساب المئيني55**:فئة المئيني55هي: 30-50

$$P_{55} = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{55N/100 - F_{i-1}}{n_i}\right) = 30 + 20 \times \left(\frac{66-23}{47}\right) = 48.29$$

التمرين(03)

إذا علمت أن سرعة سيارة متجهة من المدينة أ إلى المدينة ب 56كلم/سا وسرعتها من المدينة ب إلى المدينة ج 60كلم/سا ومن المدينة ج إلى المدينة د 60كلم/سا ومن المدينة د إلى المدينة هـ 75كلم/سا.

المطلوب: أحسب متوسط سرعة السيارة من المدينةأ إلى المدينة هـ؟

الحل

نحسب هذا المتوسط باستعمال الوسط التوافقي (لأننا نحسب متوسط السرعات):

$$\overline{X}_H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{x_i}} = \frac{4}{\frac{1}{56} + \frac{2}{60} + \frac{1}{75}} = 61.99 km/h$$

التمرين(04)

ليكن لدينا أسعار مادة مختارة من السوق في الفترة 2018-2020 حيث سعرها في سنة 2018 هو45دج وسعرها في سنة 2019هو 60 دج، وأخيرا 80 دج في سنة 2020 وفي كل سنة كانت الميزانية المخصصة لشراء هذه المادة 500دج. و**المطلوب**:حساب متوسط سعر هذه المادة خلال الفترة 2018-2020.

الحل

- حساب متوسط السعر باستعمال الوسط التوافقي:

$$\overline{X}_H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{x_i}} = \frac{3}{\frac{1}{45} + \frac{1}{60} + \frac{1}{80}} = 58.37 DA$$

- حساب متوسطالسعرمن الجدول التالي(مع حساب عدد الكميات الممكن شراءها من ميزانية 500دج):

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \times x_i}{N} = \frac{1499.75}{25.69} = 58.37$$

$x_i \times n_i$	التكرار n_i	السعر X_i
499.95	11.11=45/500	45
499.8	8.33=60/500	60
500	6.25=80/500	80
1499.75	25.69	المجموع

التمرين(05)

ليكن المتغير X يمثل أجور عمال الشركةفي الجدول التالي:الوحدة 10^3دج

التكرار النسبي المتجمع الصاعد $f_i^{\uparrow}$	عدد العمال التكرار n_i	الأجر X_i
0.04	6	7-5
0.14	...	11-7
0.44	...	13-11
0.96	...	15-13
1	...	19-15
---		المجموع

المطلوب:

1) أكمل معطيات هذا الجدول ثم أحسب الوسيط والمنوال.

2) هل هذا التوزيع متناظر؟

الحل

1) سنحسب التكرار النسبي أولا في الجدول وتكون لدينا النتائج التالية:

$x_i \times f_i$	التكرار النسبي المتجمع الصاعد $f_i^{\uparrow}$	التكرار النسبي f_i	عدد العمال التكرار n_i	الأجر X_i
0.24	0.04	0.04	6	7-5
0.9	0.14	0.10	15	11-7
3.6	0.44	0.30	45	13-11
7.28	0.96	0.52	78	15-13
0.68	1	0.04	6	19-15
12.7	---	1	150	المجموع

بما أن التكرار النسبي يحسب كما يلي:

$$f_i = n_i / N \Rightarrow N = n_i / f_i = 6/0.04 = 150$$

أي أن حجم العينة هو 150.وانطلاقا من معطيات التكرار النسبي نحصل على التكرار المطلق $n_i = N \times f_i$ ونكمل الجدول.

2) هل التوزيع الإحصائي متناظر؟

- حساب الوسيط:الفئة الوسيطية هي التي تقابل 0.5 في التكرار المتجمع الصاعد وهي 13-15.

$$M_e = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{0.5 - f_{i-1}^{\uparrow}}{f_i} \right) = 13 + 2 \times \left(\frac{0.5 - 0.44}{0.52} \right) = 13.23$$

- حساب المتوسط الحسابي: من خلال الجدول نجد أن: $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} f_i \times x_i = 12.7$

نلاحظ أن: $\overline{X} = 12.7 \neq M_e = 13.23$ وبالتالي التوزيع غير متناظر.

التمرين(06)

1) حدد قيمة كل من α و β حتى تكون العلاقة التالية:

$$\varphi(x) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}}{N} \right)^{\beta}$$

عبارة عن المتوسط الحسابي والوسط التربيعي، المتوسط التوافقي.

2) يبين الجدول التالي نتائج مسابقة الدخول إلى إحدى المعاهد المتخصصة بالجزائر العاصمة، حيث ترشح لهذه المسابقة 200 طالب متحصل على شهادة البكالوريا.

المعدلات X_i	عدد الطلبة n_i
5-0	60
10-5	80
15-10	40
20-15	20
المجموع	**200**

المطلوب:

أ. حدد المجتمع الإحصائي، الوحدة الإحصائي، المتغير الإحصائي وطبيعته.

ب. ما هو متوسط هذه النتائج؟

ت. ما هو المعدل السائد بالنسبة لهذه النتائج؟

ث. إذا كانت نسبة النجاح هي 25%ما هو المعدل الذي يتم على إثره تحديد هدفه؟

ج. نفس السؤال إذا كانت نسبة النجاح 10%؟

الحل

1) تحديد قيمة كل من α و β حتى تكون العلاقة السابقة:

$$\varphi(x) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}}{N} \right)^{\beta}$$

- عبارة عن المتوسط الحسابي: $\alpha = 1$ و $\beta = 1$

$$\varphi(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} = \overline{X}$$

- عبارة عن الوسط التربيعي: $\alpha = 2$ و $\beta = 1/2$

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{N}} = Q$$

- عبارة عن المتوسط التوافقي: $\alpha = -1$ و $\beta = -1$

$$\varphi(x) = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_i} \right)} = H$$

2) تحديد المجتمع الإحصائي، الوحدة، المتغير وطبيعته:

أ. المجتمع الإحصائي(200 طالب متحصل على شهادة البكالوريا)، الوحدة الإحصائية(طالب)، المتغير الإحصائي(المعدلات) وطبيعته (كمي مستمر).

ب. متوسط هذه النتائج، نحسب المتوسط الحسابي:

لدينا الجدول التالي:

X_i المعدلات	n_i عدد الطلبة	C_i مركز الفئة	f_i التكرارالنسبي	$f_i \times C_i$	$F \uparrow$
5-0	60	2.5	0.3	0.75	60
10-5	80	7.5	0.4	3	140
15-10	40	12.5	0.2	2.5	180
20-15	20	17.5	0.1	1.75	200
المجموع	**200**	--	**1**	**8**	--

يكون متوسط المعدلات هو:

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} f_i \times C_i = 8$$

ت. المعدل السائد بالنسبة لهذه النتائج، نحسب القيمة الأكثر انتشارا وهو المنوال:الفئة المنوالية هي 5-10.

$$M_o = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) = 5 + 5 \times \left[\frac{80-60}{(80-60)+(80-40)} \right] = 6.66$$

ث. إذا كانت نسبة النجاح هي 25% فيتم تحديد هذا المعدل بحساب الربيع الثالث(لأن النتائج المسابقة منطقيا مرتبة ترتيبا تصاعديا، فنلاحظ أن الناجحين يكونون أصحاب الأعلى معدلا وبالتالي إذا كانت نسبة النجاح25% فيعني أن 75% من المشاهدات أقل منها أي أن الربيع الثالث يحدد هذه النسبة).

فئة الربيع الثالث هي الفئة التي تقابل ($3\times N/4=3\times 200/4=150$) في التكرار المتجمع الصاعد وهي 10-15.

$$Q_3=e_{i-1}+a_i\times\left(\frac{3N/4-F_{i-1}}{n_i}\right)=10+5\times\left(\frac{150-140}{40}\right)=11.25$$

ج. إذا كانتنسبة النجاح 10%، وبنفس ملاحظة السؤال الرابع(المشاهدات مرتبة ترتيبا تصاعديا)،نحسب المئيني90 أوالعشير التاسع.فئة العشير التاسع هي الفئة التي تقابل ($9\times N/10=9\times 200/10=180$) في التكرار المتجمع الصاعد وهي 10-15.

$$D_9=e_{i-1}+a_i\times\left(\frac{9N/10-F_{i-1}}{n_i}\right)=10+5\times\left(\frac{180-140}{40}\right)=15$$

التمرين(07)

يمثل الجدول التالي أجور عمال الشركة (ب)الوحدة:10^3دج

الأجر X_i	عدد العمال n_i	التكرار النسبي f_i	$f_i^{\uparrow}$	التكرار المتجمع الصاعد $F_i^{\uparrow}$
80-90	...	...	0.2	200
90-110	...	...	0.45	...
110-120	...	...	...	...
120-130	...	...	...	...
130-150	...	0.1	...	...
150-160	50	...	...	...
المجموع	-	-	-	-

المطلوب:

1) أكمل معطيات هذا الجدول إذا علمت أن 50 بالمائة من العمال يتقاضون أكثر من121250دج؟

2) ماهو الأجر السائد في هذه المؤسسة؟

الحل

1) يمكن إكمال بعض المعطيات والتي هي واضحة في الجدول.

أولا: لاحظ أن التكرار النسبي الأول $f_1=0.2$ والتكرار المتجمع الصاعد$n_1=F_1^{\uparrow}=200$ وبالتالي يمكن استنتاج التكرار الكلي:

$$f_1=\frac{n_1}{N}\Rightarrow N=\frac{n_1}{f_1}=\frac{200}{0.2}=1000$$

الأجر X_i	عدد العمال n_i	التكرار النسبي f_i	$f_i^{\uparrow}$	التكرار المتجمع الصاعد $F_i^{\uparrow}$
90-80	200	0.2	0.2	200
110-90	250	0.25	0.45	450
120-110	n_3	-	-	-
130-120	n_4	-	-	850
150-130	100	0.1	-	950
160-150	50	0.05	-	1000
المجموع	**1000**	**1**	–	–

ثانيا: لايمكن معرفة قيمة كل من التكرارين الثالث والرابع n_3 و n_4 إلا بالاستعانة بالمعلومة أن50 بالمائة من العمال يتقاضون أكثر من121.25دج، أي أن الوسيط: $M_e = 121.25$ وهو ينتمي للفئة الوسيطية120-130 يكون:

$$M_e = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{N/2 - F_{i-1}^{\uparrow}}{n_i} \right) = 120 + 10 \times \left(\frac{1000/2 - F_3^{\uparrow}}{n_4} \right) = 121.25$$

$$\Rightarrow F_3^{\uparrow} = 500 - 0.125 \times n_4$$

ومن جهة أخرى لدينا: $F_3^{\uparrow} + n_4 = 850$ يكون: $n_4 = 400$ وبالتالي: $n_5 = 0$

ويمكننا الآن تعبئة بقية قيم الجدول:

الأجر X_i	عدد العمال n_i	التكرار النسبي f_i	$f_i^{\uparrow}$	التكرار المتجمع الصاعد $F_i^{\uparrow}$
90-80	200	0.2	0.2	200
110-90	250	0.25	0.45	450
120-110	0	0	0.45	450
130-120	400	0.4	0.85	850
150-130	100	0.1	0.95	950
160-150	50	0.05	1	1000
المجموع	**1000**	**1**	–	–

التمرين(08)

تشير معطيات الجدول التالي إلى أرقام أعمال (الوحدة مليون دج) لشركات متوسطة و صغيرة في منطقة صناعية ما :

رقم الأعمال X_i 10^6دج	عدد العمال n_i	التكرار المصحح n_i'	$f_i^{\uparrow}$	التكرار المتجمع الصاعد $F_i^{\uparrow}$
20-10	....	...	...	12
30-20	...	...	0.23	...
50-30	...	15	...	...
90-50	...	...	...	...
100-90	...	...	...	...
110-100	10	...	...	...
المجموع	**100**	–	–	–

المطلوب:

1) أكمل معطيات هذا الجدول إذا علمت أن رقم الأعمال السائد 34 مليون دج؟

2) ماهو متوسط رقم الأعمال في هذه المنطقة ؟

3) هل هذا التوزيع متناظر؟

الحل

1) يمكن إكمال بعض المعطيات والتي هي واضحة في الجدول.

أولا: لاحظ أن التكرار المتجمع الصاعد الأول هو $F_1^{\uparrow}=12$ والتكرار الكلي هو100 وبالتالي التكرار المطلق الأول هو $n_1=12$ أي $f_1^{\uparrow}=0.12$

رقم الأعمال X_i	عدد العمال n_i	التكرار المصحح n'_i	$f_i^{\uparrow}$	التكرار المتجمع الصاعد $F_i^{\uparrow}$
20-10	12	12	0.12	12
30-20	11	11	0.23	23
50-30	30	15	0.53	53
90-50	n_4	$\frac{n_4}{4}$	…	…
100-90	n_5	n_5	…	…
110-100	10	10	1	100
المجموع	**100**	–	–	–

ثانيا: لايمكن معرفة قيمة التكرار الرابع n_4 إلا بالاستعانة بالمعلومة أن رقم الأعمال السائد هو 34 مليون دج: $M_o=34$ وهو ينتمي للفئة الوسيطية30-50:

$$M_o=e_{i-1}+a_i\times\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\right)=30+10\times\left[\frac{(15-11)}{(15-11)+(15-n_4/4)}\right]=34\Rightarrow n_4=36$$

يكون: $n_5=3$ ويكون الجدول:

رقم الأعمال X_i	عدد العمال n_i	التكرار المصحح n'_i	$f_i^{\uparrow}$	التكرار المتجمع الصاعد $F_i^{\uparrow}$	$n_i\times x_i$
20-10	12	12	0.12	12	180
30-20	11	11	0.23	23	275
50-30	30	15	0.53	53	1200
90-50	36	9	0.89	89	2520
100-90	1	1	0.90	90	95
110-100	10	10	1	100	1050
المجموع	**100**	–	–	–	**5320**

2) حساب متوسط رقم الأعمال:حساب المتوسط الحسابي: من خلال الجدول نجد أن:

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \times x_i}{N}=\frac{5320}{100}=53.20$$

3) هل التوزيع متناظر؟ نحسب الوسيط: الفئة الوسيطية هي التي تقابل 50في $F_i^{\uparrow}$ وهي 30-50.

$$M_e=e_{i-1}+a_i\times\left(\frac{N/2-F_{i-1}^{\uparrow}}{n_i}\right)=30+20\times\left(\frac{50-23}{30}\right)=48$$

نلاحظ أن: $\overline{X}=53.20\neq M_e=48$ وبالتالي التوزيع غير متناظر.

3.مقاييس: التشتت، الشكل: الالتواء والتفلطح

التمرين(01)

يعبر المتغير X عن علامات مادة الإحصاءلطلبة الفوج رقم 01 ضمن تخصص العلوم اقتصادية

العلامات X	7	8	9	10	11	12	14	المجموع
عدد الطلبة	10	15	20	25	15	10	6	**120**

المطلوب:أحسب الانحراف المتوسط، التباين والانحراف المعياري.

الحل

النقاط X_i	عدد الطلبة n_i	التكرار النسبي f_i	$f_i \times x_i$
7	10	0.2	1.4
8	15	0.3	2.4
9	12	0.24	2.16
10	7	0.14	1.4
11	3	0.06	0.66
12	2	0.04	0.48
14	1	0.02	0.28
المجموع	**50**	**1**	**8.78**

- حساب الانحراف المتوسط: لحساب الانحراف المتوسط نحسب في البداية المتوسط الحسابي

المتوسط الحسابي: $\overline{X}=\sum_{i=1}^{n} f_i \times x_i=8.78$

- الانحراف المتوسط: $\sum_{i=1}^{n} f_i \times \left|x_i-\overline{X}\right|=1.18$

فيمكن القول أن النقاط تبتعد في المتوسط عن المتوسط الحسابي بـ:1.18.

- التباين: $V(X)=\sum_{i=1}^{n} f_i \times (x_i-\overline{X})^2=2.29$
- الانحراف المعياري: $SD=\sqrt{V(X)}=\sqrt{2.29}=1.51$

ويمكن القول أن النقاط تبتعد في المتوسط عن المتوسط الحسابي بـ:1.51.

X_i	f_i	$\lvert x_i - \overline{X} \rvert$	$f_i \times \lvert x_i - \overline{X} \rvert$	$(x_i - \overline{X})^2$	$f_i \times (x_i - \overline{X})^2$
7	0.2	1.78	0.356	3.16	0.63
8	0.3	0.78	0.234	0.6	0.18
9	0.24	0.22	0.052	0.04	0.011
10	0.14	1.22	0.17	1.48	0.20
11	0.06	2.22	0.13	4.92	0.29
12	0.04	3.22	0.12	10.36	0.41
14	0.02	5.22	0.1	27.24	0.54
المجموع	**1**	–	**1.18**	–	**2.29**

التمرين(03)

تشير معطيات الجدول التالي إلى عدد حوادث المرور خلال 100 يوم في منطقة معينة:

عدد الحوادث X	0	1	2	3	4	5	6	7
عدد الأيام	10	25	20	10	2	1	1	1

المطلوب:

1) حساب المقاييس الثلاثة للنزعة المركزية: المنوال، الوسيط، المتوسط الحسابي.

2) حساب الانحراف المعياري ومعامل التغير.

الحل

1) حساب المقاييس الثلاثة للنزعة المركزية:

عدد الحوادث X_i	عدد الأيام n_i	التكرار النسبي f_i	$f_i \times x_i$	$f_i \times x_i^2$	$F^{\uparrow}$
0	10	0.14	0	0	10
1	25	0.35	0.35	0.35	35
2	20	0.28	0.57	1.12	55
3	10	0.14	0.42	1.26	65
4	2	0.028	0.11	0.448	67
5	1	0.014	0.07	0.35	68
6	1	0.014	0.08	0.504	69
7	1	0.014	0.1	0.686	70
المجموع	**70**	**1**	**1.72**	**4.71**	–

- حساب المنوال: $M_o = 1$
- حساب الوسيط: $M_e = 1$ لأنه يقابل: $N/2 = 35$ في التكرار المتجمع الصاعد.
- حساب الوسط الحسابي: $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} f_i \times x_i = 1.72$

2) حساب الانحراف المعياري ومعامل التغير:

- حسابالتباين: $Var(X)=\sum_{i=1}^{n} f_i \times x_i^2-\overline{X}^2=4.71-1.72^2=1.75$
- حساب الانحراف المعياري: $SD=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1.75}=1.32$
- معامل التغير: $CV=\frac{SD}{\overline{X}}=\frac{1.32}{1.72}=0.767$

التمرين(04)

قارن بين السلسلتين الإحصائيتين (نتائج امتحان مقياس الاقتصاد الجزئي) وذلك بحساب : المنوال، الوسيط، المتوسط الحسابي، الانحراف المعياري ومعامل التغير:

القسمA: 1314 11 16 16 8 7 14 13 11 10 10 9 12 11 15 8 16 11 6 10 79 5 4 3 10 15 9
6 1414 15 10 8 5 4 11 10.

القسمB:11 8 9 10 14 13 12 11 8 12 11 128 13 15 17 16 10 3 12 16 15 7 6 8 15 11 10
14 12 15 18 11 17 15 10 14.

ماذا تلاحظ ؟

الحل

القسمA: X_i	التكرار n_i	$F^{\uparrow}$	التكرار النسبي f_i	$f_i \times x_i$	$f_i \times x_i^2$
3	1	1	0.025	0.025	0.025
4	2	3	0.051	0.102	0.205
5	2	5	0.051	0.102	0.205
6	2	7	0.051	0.102	0.205
7	2	9	0.051	0.102	0.205
8	3	12	0.076	0.230	0.692
9	3	15	0.076	0.230	0.692
10	6	21	0.153	0.923	5.53
11	5	26	0.128	0.641	3.2
12	1	27	0.025	0.025	0.025
13	2	29	0.051	0.102	0.205
14	4	33	0.102	0.410	1.64
15	3	36	0.076	0.230	0.692
16	3	39	0.076	0.230	0.692
المجموع	**39**	–	**1**	**3.46**	**14.23**

- حساب المنوال: $M_o=10$
- تحديد الوسيط: $M_e=6$ لأنه يقابل: $N/2$ في التكرار المتجمع الصاعد.

- حساب الوسط الحسابي: $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} f_i \times x_i = 3.46$
- حسابالتباين: $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} f_i \times x_i^2 - \overline{X}^2 = 14.23 - 3.46^2 = 2.24$
- حساب الانحراف المعياري: $SD = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2.24} = 1.49$
- معامل التغير: $CV = \frac{SD}{\overline{X}} = \frac{1.49}{3.46} = 0.43$

القسم B: X_i	التكرار n_i	$F^{\uparrow}$	التكرار النسبي f_i	$f_i \times x_i$	$f_i \times x_i^2$
3	1	1	0.027	0.027	0.027
6	1	2	0.027	0.027	0.027
7	1	3	0.027	0.0.27	0.027
8	4	7	0.108	0.432	1.72
9	1	8	0.027	0.027	0.027
10	4	12	0.108	0.432	1.72
11	5	17	0.135	0.675	3.37
12	5	22	0.135	0.675	3.37
13	2	24	0.054	0.108	0.21
14	3	27	0.081	0.243	0.729
15	5	32	0.135	0.675	3.37
16	2	34	0.054	0.108	0.21
17	2	36	0.054	0.108	0.21
18	1	37	0.027	0.027	0.027
المجموع	**37**	–	**1**	**3.59**	**15.10**

- حساب المنوال: $M_{o1} = 11$ ، $M_{o2} = 12$ ، $M_{o3} = 15$
- تحديد الوسيط: $M_e = 12$ لأنه يقابل: $N/2$ في التكرار المتجمع الصاعد.
- حساب الوسط الحسابي: $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} f_i \times x_i = 3.59$
- حسابالتباين: $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} f_i \times x_i^2 - \overline{X}^2 = 15.10 - 3.59^2 = 2.18$
- حساب الانحراف المعياري: $SD = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2.18} = 1.47$
- معامل التغير: $CV = \frac{SD}{\overline{X}} = \frac{1.47}{3.59} = 0.41$

التمرين(05)

لتكن السلسلتان التاليتان A وB :18 8 9 9 88 3 9 : Aو 5 18 10 15 3 7 6 12 : B

المطلوب:

1) حدد الوسيط والمنوال للسلسلتين.

2) هل يمكن استعمال المدى العام للمقارنة بين مستوى تشتت السلسلتين؟

3) ماهو مقياس التشتت المناسب في المقارنة بين السلسلتين؟

الحل

1) تحديد الوسيط والمنوال للسلسلتين:

- تحديد الوسيط والمنوال للسلسلة A:18 8 9 9 88 3 9 : A

تحديد المنوال: $M_{o1} = 8$ ، $M_{o2} = 9$

تحديد الوسيط: $M_e = 8$ لأنه يقابل المرتبة: $N/2 = 4$ في ترتيب السلسلة تصاعديا.

- تحديد الوسيط والمنوال للسلسلة B:5 18 10 15 3 7 6 12 : B

تحديد المنوال:سلسلة عديمة المنوال لأن جميع القيم لها نفس التكرار.

تحديد الوسيط: $M_e = 7$ لأنه يقابلالمرتبة: $N/2 = 4$ فيترتيب السلسلة تصاعديا.

حساب المدى العام للسلسلتين:

- حساب المدى العام للسلسلةA: $E = X_{\max} - X_{\min} = 18 - 3 = 15$
- حساب المدى العام للسلسلة B: $E = X_{\max} - X_{\min} = 18 - 3 = 15$

2) لهما نفس المدى العام وبالتالي لا يكفي استعمال مقياس المدى العام.

3) للمقارنة بين السلسلتين نحسب معامل التغاير:

- حساب معامل التغاير للسلسلة A

السلسلة A	التكرار n_i	التكرار النسبي f_i	$f_i \times x_i$	$f_i \times x_i^2$
3	1	0.125	0.375	1.125
8	3	0.375	3.375	30.37
9	3	0.375	3.375	30.37
18	1	0.125	2.25	40.5
المجموع	**8**	**1**	**9.37**	**102.37**

في البداية نحسب التباين: $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} f_i \times x_i^2 - \overline{X}^2 = 10237 - 9.37^2 = 14.48$

يكون الانحراف المعياري: $SD = \sqrt{V(X)} = \sqrt{14.48} = 3.8$

ومنه معامل التغير للسلسلة A: $CV = \dfrac{SD}{\overline{X}} = \dfrac{3.8}{14.48} = 0.26$

- حساب معامل التغاير للسلسلة B

$f_i \times x_i^2$	$f_i \times x_i$	f_i التكرار النسبي	n_i التكرار	السلسلة B
1.28	0.428	0.142	1	3
3.57	0.714	0.142	1	5
5.14	0.857	0.142	1	6
7	1	0.142	1	7
14.28	1.42	0.142	1	10
20.57	1.714	0.142	1	12
46.28	2.57	0.142	1	18
98.14	**8.71**	**1**	**8**	المجموع

حسب التباين: $Var(X)=\sum_{i=1}^{n} f_i \times x_i^2 - \overline{X}^2 = 98.14 - 8.71^2 = 89.42$

يكون الانحراف المعياري: $SD=\sqrt{V(X)}=\sqrt{14.48}=9.45$

ومنه معامل التغير للسلسلة B: $CV=\dfrac{SD}{\overline{X}}=\dfrac{9.45}{8.71}=1.08$

وبمقارنة معاملي التغاير بين السلسلتين نلاحظ انه بالنسبة للسلسلة A اقل منه في السلسلة B وبالتالي فالسلسلة B أكثر تشتت من السلسلة A.

التمرين(06)

يبين التوزيع التكراري التالي توزيع أوزان بعض السلع المرسلة إلى أحد المتاجر، الوحدة:طن.

n_i عدد السلع	الفئات
8	$x_i \prec 10$
3	20-10
5	30-20
6	40-30
3	50-40
3	60-50
1	70-60
1	$x_i \succ 10$
30	المجموع

المطلوب:

1) هل يمكن تحديد الانحراف المعياري لهذا التوزيع و لماذا؟

2) ما هو مقياس التشتت المناسب؟ أحسب قيمته؟

3) أدرس شكل هذا التوزيع باستعمال مقياس يول.

الحل

1) لايمكن لأننا نحتاج إلى المتوسط الحسابي ولانستطيع تحديد مركز الفئة الأولى والأخيرة.

2) مقياس التشتت المناسبهو المدى الربيعي: $IQ = Q_3 - Q_1$

الفئات	عدد السلع n_i	$F \uparrow$
$x_i \prec 10$	5	5
20-10	6	11
30-20	5	16
40-30	6	22
50-40	3	25
60-50	3	28
70-60	1	29
$x_i \succ 10$	1	30
المجموع	**30**	---

- حساب قيمة الربيع الأول:

لدينا: $N/4 = 30/4 = 7.5$ تكون فئة الربيع الأول هي: 10-20تكون قيمة الربيع الأول هي:

$$Q_1 = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{N/4 - F_{i-1}}{n_i}\right) = 10 + 10 \times \left(\frac{7.5-5}{6}\right) = 14.16$$

- حساب قيمة الربيع الثالث:

لدينا: $3N/4 = 90/4 = 22.5$ تكون فئة الربيع الثالث هي: 40-50تكون قيمة الربيع الثالث هي:

$$Q_3 = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{3N/4 - F_{i-1}}{n_i}\right) = 40 + 10 \times \left(\frac{22.5-22}{3}\right) = 41.66$$

- حساب المدى الربيعي: $IQ = 41.66 - 14.16 = 27.5$

3) دراسة شكل هذا التوزيع باستعمال مقياس يول.

حساب الوسيط: لدينا $N/2 = 30/2 = 15$ تكون الفئة الوسيطية: 20-30

$$M_e = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{N/2 - F_{i-1}}{n_i}\right) = 20 + 10 \times \left(\frac{15-11}{6}\right) = 26.66$$

تكون قيمة مقياس يول هي:

$$\gamma = \frac{(Q_3 - M_e) - (M_e - Q_1)}{(Q_3 - M_e) + (M_e - Q_1)} = \frac{(41.66 - 26.66) - (26.66 - 14.16)}{(41.66 - 26.66) + (26.66 - 14.16)} = 0.09 \succ 0$$

ومنه التوزيع ملتوي نحو اليمين.

التمرين(07)

تشير المعطيات التالية إلى الأجر الشهري لعمال شركة خاصة في منطقة صناعية ما. الوحدة: 1000 دج

الفئات	التكرار n_i	$F\uparrow$
60-50	8	8
70-60	10	18
80-70	16	34
90-80	14	48
100-90	10	58
110-100	5	63
120-110	2	65
المجموع	**65**	–

المطلوب:

أدرس شكل هذا التوزيع باستعمال المعاملات التالية: معامل بيرسن الأول والثاني،معامل فيشر،معامل يول للتناظر ومعامل بيرسن للتفلطح، معامل فيشر للتفلطح.

الحل

الفئات	التكرار n_i	$F\uparrow$	التكرار النسبي f_i	$f_i \times x_i$	$f_i \times x_i^2$	$f_i \times (x_i - \overline{X})^3$	$f_i \times (x_i - \overline{X})^4$
60-50	8	8	0.12	6.77	372.31	-1870.31	46326.20
70-60	10	18	0.15	10.00	650.00	-495.63	7320.12
80-70	16	34	0.25	18.46	1384.62	-26.70	127.35
90-80	14	48	0.22	18.31	1556.15	30.83	161.24
100-90	10	58	0.15	14.62	1388.46	543.57	8278.93
110-100	5	63	0.08	8.08	848.08	1235.52	31173
120-110	2	65	0.03	3.54	406.92	1345.50	47402.93
المجموع	**65**	–	**1**	**79.77**	**6606.54**	**762.76**	**140789.77**

- حساب معامل بيرسن الأول: $P_1 = (\overline{X} - M_o)/SD$

حساب المتوسط: $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} f_i \times x_i = 79.77$

حساب التباين: $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} f_i \times x_i^2 - \overline{X}^2 = 660654 - 79.76^2 = 243.41$

حساب الانحراف المعياري: $SD = \sqrt{V(X)} = \sqrt{243.41} = 15.60$

حساب المنوال: لدينا الفئة المنوالية هي 70 – 80

$$M_o = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right) = 70 + 10 \times \left[\frac{(16-10)}{(16-10)+(16-14)}\right] = 77.5$$

يكون معامل بيرسن الأول هو: $P_1 = (79.77 - 77.5)/15.60 = 0.145 \succ 0$

ومنه التوزيع ملتوي نحو اليمين.

- معامل بيرسن الثاني: $P_2 = \mu_3^2 / \mu_2^3$

لدينا: $\mu_2 = V(X) = 243.41$

ولدينا كذلك: $\mu_3 = \sum_{i=1}^{n} f_i \times (x_i - \bar{X})^3 = 762.76$

يكون: $P_2 = 762.76^2 / 243.41^3 = 0.04$

وعلى اعتبار أن: $P_2 = 0.04 \succ 0$ أو $(\mu_3 \succ 0)$ فالتوزيع ملتوي نحو اليمين

- معامل فيشر للتناظر: $F = \mu_3 / SD^3 = 762.76/15.60 = 0.20$

$F = 0.20 \succ 0$ فالتوزيع ملتوي نحو اليمين.

- معامل يول: $\gamma = \dfrac{(Q_3 - M_e) - (M_e - Q_1)}{(Q_3 - M_e) + (M_e - Q_1)}$

حساب الوسيط: لدينا $N/2 = 65/2 = 32.5$ تكون الفئة الوسيطية: 70 – 80

$$M_e = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{N/2 - F_{i-1}}{n_i}\right) = 70 + 10 \times \left(\frac{32.5 - 18}{16}\right) = 79.06$$

حساب قيمة الربيع الأول:

لدينا: $N/4 = 65/4 = 16.25$ تكون فئة الربيع الأول هي: 60–70 وتكون قيمة الربيع الأول هي:

$$Q_1 = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{N/4 - F_{i-1}}{n_i}\right) = 60 + 10 \times \left(\frac{16.25 - 8}{10}\right) = 68.25$$

حساب قيمة الربيع الثالث:

لدينا: $3N/4 = 90/4 = 48.75$ تكون فئة الربيع الثالث هي: 90–100تكون قيمة الربيع الثالث هي:

$$Q_3 = e_{i-1} + a_i \times \left(\frac{3N/4 - F_{i-1}}{n_i}\right) = 90 + 10 \times \left(\frac{48.75 - 48}{10}\right) = 90.75$$

تكون قيمة مقياس يول هي:

$$\gamma = \frac{(Q_3 - M_e) - (M_e - Q_1)}{(Q_3 - M_e) + (M_e - Q_1)} = \frac{(90.75 - 79.06) - (79.06 - 68.25)}{(90.75 - 79.06) + (79.06 - 68.25)} = 7.06 \succ 0$$

ومنه التوزيع ملتوي نحو اليمين.

- معامل بيرسن للتفلطح: $K = \mu_4 / \mu_2^2$

لدينا: $\mu_2 = V(X) = 243.41$

ولدينا كذلك: $\mu_4 = \sum_{i=1}^{n} f_i \times (x_i - \overline{X})^4 = 14078977$

يكون معامل بيرسن للتفلطح: $K = \mu_4 / \mu_2^2 = 14078977/243.41^2 = 2.38$

$K \prec 3$ نقول عندئذ عن التوزيع انه متفلطح كثيراً (Platykurtic)

- معامل فيشر للتفلطح: $\mathrm{B} = \mu_4 / \mu_2^2 - 3$

يكون: $\mathrm{B} = \mu_4 / \mu_2^2 - 3 = 2.38 - 3 = -0.62$

$\mathrm{B} \prec 0$ نقول عندئذ عن التوزيع انه متفلطح كثيراً (Platykurtic).

التمرين(09)

أدرس شكل التوزيع للمتغير الإحصائي X والمعرفة قيمه في الجدول التالي:

4	3	2	1	0	X_i
0.006	0.058	0.288	0.432	0.216	f_i

الحل

سنختار مقياس معامل بيرسن الثاني للالتواء و معامل بيرسن للتفلطح.

- معامل بيرسن الثاني: $P_2 = \mu_3^2 / \mu_2^3$

لدينا: $\mu_2 = V(X) = 0.74$

ولدينا كذلك: $\mu_3 = \sum_{i=1}^{n} f_i \times (x_i - \overline{X})^3 = 0.227$

يكون: $P_2 = 0.227^2 / 0.74^3 = 0.22$

وعلى اعتبار أن: $P_2 = 0.22 \succ 0$ أو $(\mu_3 \succ 0)$ فالتوزيع ملتوي نحو اليمين

$f_i \times (x_i - \overline{X})^4$	$f_i \times (x_i - \overline{X})^3$	$f_i \times (x_i - \overline{X})^2$	$f_i \times x_i$	f_i	X_i
0.456	-0.378	0.314	0	0.216	0
0.0007	-0.003	0.018	0.432	0.432	1
0.1144	0.144	0.181	0.576	0.288	2
0.600	0.334	0.186	0.174	0.058	3
0.365	0.130	0.046	0.024	0.006	4
1.53	**0.227**	**0.74**	**1.20**	**1**	**المجموع**

- معامل بيرسن للتفلطح: $K = \mu_4 / \mu_2^2$

لدينا: $\mu_4 = \sum_{i=1}^{n} f_i \times (x_i - \overline{X})^4 = 1.53$

يكون معامل بيرسن للتفلطح: $K = \mu_4 / \mu_2^2 = 1.53/0.74^2 = 2.79$

$K \prec 3$ نقول عندئذ عن التوزيع انه متفلطح (Platykurtic).

4. الانحدار الخطي البسيط والارتباط

تمرين(1)

يبين الجدول التالي قيم الاستهلاك والدخل الحقيقيين للعائلات الجزائرية خلال الفترة 2000-2014:

الوحدة: 10^6 دج

السنوات	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
الاستهلاك	5.5	6	6.5	6	7.5	7.5	7.5
الدخل	6	7	7.5	8	8	8.5	8.5

2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
8	8.5	9	10.5	11	11.5	12	12.5
9	9	10	12	13	13	14.5	15

المطلوب:

1) أرسم الشكل الذي يبين انتشار قيم المتغيرين؟

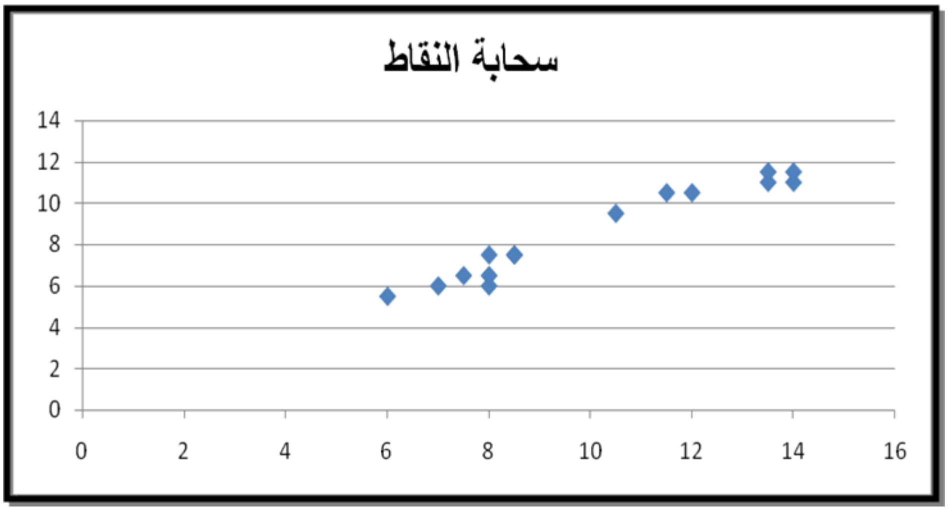
2) أوجد معادلة انحدار الاستهلاك بدلالة الدخل.

3) أحسب معامل الارتباط بين قيم المتغيرين الاستهلاك والدخل.

4) إذا علمت أن قيمة الدخل في سنة2015 هي14 مليون دينار جزائري، فما هي قيمة الاستهلاك المتوقعةلنفس السنة؟

الحل

1) الشكل الذي يبين انتشار القيم يتمثل في تعيين نقاط تمثل الثنائيات (X_i, Y_i) أو ما يسمى بسحابة النقاط.



2) إيجاد معادلة الانحدار الاستهلاك والدخل: $Y_i = a + b \times X_i + \zeta_i$

ونحسب قيم $\hat{a}$ و $\hat{b}$ بالاستعانة بالجدول الإحصائي التالي:

الدخل X_i	الاستهلاك Y_i	$X_i \times Y_i$	X_i^2	Y_i^2

30.25	36	33	5.5	6
36	49	42	6	7
42.25	56.25	48.75	6.5	7.5
36	64	48	6	8
56.25	64	60	7.5	8
56.25	72.25	63.75	7.5	8.5
56.25	72.25	63.75	7.5	8.5
64	81	72	8	9
72.25	81	76.5	8.5	9
81	100	90	9	10
110.25	144	126	10.5	12
121	169	143	11	13
132.25	169	149.5	11.5	13
144	210.25	174	12	14.5
156.25	225	187.5	12.5	15
1149.25	**1593**	**1377.75**	**129.25**	**149**

نعلم أن حجم العينة هو $n=15$ ، ومن نتائج الجدول السابق نجد أن:

$$\bar{Y}=\frac{129.25}{15}=8.63 \quad \text{و} \quad \bar{X}=\frac{149}{15}=9.93$$

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2}=\frac{1377.75-15\times9.93\times8.63}{1593-15\times9.93^2}=0.8$$

وباستعمال قيمة $\hat{b}$ في علاقة التالية: $\hat{a}=\bar{Y}-\hat{b}\times\bar{X}=8.63-0.8\times9.93=0.59$

ومنه تصبح العلاقة المقدرة بين النفقات والدخل كالتالي: $Y_i=0.59+0.8X_i+e_i$

3) حساب معامل الارتباطبين قيم المتغيرين الاستهلاك والدخل:

$$r=\frac{\sum_{i=}^{n}X_iY_i-n\bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{\sum_{i=}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2}\times\sqrt{\sum_{i=}^{n}Y_i^2-n\bar{Y}^2}}=\frac{1377.75-15\times9.93\times8.63}{\sqrt{1593-15\times9.93^2}\times\sqrt{1149.25-15\times8.63^2}}=0.98$$

نلاحظ قوة الارتباط بين المتغيرين تقدر بـ97% وهي علاقة قوية وموجبة.

من خلال قيمة معامل الارتباط فإن العلاقة (قوة الارتباط) بين المتغيرين الدخل والاستهلاك Y, X هي 98%.

4) نقوم بتعويض قيمة الدخل 14 في معادلة النموذج ويصبح لدينا:

$$E(Y_{2015}) = 0.59 + 0.8X_{2015} = 0.59 + 0.8 \times 14 = 11.79$$

وعليه لما بلغ الدخل في سنة2015 القيمة14 مليون دينار جزائري، فإننا نتوقعأن تكون قيمة الاستهلاك لنفس السنة هي 11.79 مليون دينار جزائري.

تمرين(2)

في إطار تقدير نموذج AKل (Rebelo -1991) المتعلق بالنمو الاقتصادي، وبالاعتماد على البنك الدولي نقترح بيانات تخص الاقتصاد الجزائري خلال الفترة من 2000 إلى غاية 2012 و الممثلة في حصة الفرد منالناتجYومن رأس المال الماديKالحقيقيفي الجدول التالي:

السنوات	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Y	20.6766	22.8397	24.5714	24.0877	24.0181	22.3703	23.1656
K	25.0243	26.8410	30.6534	30.3406	33.2635	31.6564	30.1704
السنوات	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	/
Y	26.3247	29.2324	38.2364	36.2832	31.8194	31.4214	/
K	34.469	37.3484	46.8764	41.4303	37.9132	37.48305	/

المطلوب:

1) إذا كان نموذج AK على النحو: $Y = AK^{\alpha}$ ، اكتب هذا النموذج على الشكل الخطي؛

2) احسب: LnY و LnK ؛

3) احسب معامل الارتباط الخطي البسيط بين: LnY و LnK ؛

4) باستعمال طريقة المربعات الصغرى قدر النموذج السابق على الشكل الخطي؛

5) مثل بيانياً LnY بدلالة LnK في النموذجالسابقعلى الشكل الخطي؛

6) اكتب الان النموذج على الشكل الأصلي بعد التقدير.

الحل

1) إذا كان نموذج AK على النحو: $Y = AK^{\alpha}$ ، كتابة هذا النموذج على الشكل الخطي:

$$LnY = LnA + \alpha \ LnK$$

و بوضع: $LnY = y \ ; LnA = \beta \ ; LnK = k$

يكون النموذج على الشكل الخطي: $y = \beta + \alpha \ k$

2) حساب: LnY و LnK :

	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
y	3.3	3.13	3.2	3.18	3.18	3.11	3.14	3.27	3.38	3.64	3.59	3.46	3.45
k	3.22	3.29	3.42	3.41	3.5	3.45	3.41	3.54	3.62	3.85	3.72	3.64	3.62

3) حساب معامل الارتباط الخطي البسيط بين: $LnY = y$ و $LnK = k$ ؛

لدينا: $r_{y,k} = \dfrac{Cov(y,k)}{\sigma_y \sigma_k}$

و الجدول التالي يساعد في حساب التباين المشترك و الانحرافات المعيارية:

$y \times k$	k^2	y^2	k	y	السنوات
9.753	10.37	9.175	3.22	3.029	2000
10.29	10.82	9.788	3.29	3.129	2001
10.96	11.72	10.25	3.423	3.202	2002
10.86	11.65	10.12	3.412	3.182	2003
11.14	12.28	10.1	3.504	3.179	2004
10.74	11.94	9.658	3.455	3.108	2005
10.71	11.61	9.876	3.407	3.143	2006
11.58	12.53	10.7	3.54	3.271	2007
12.22	13.11	11.39	3.62	3.375	2008
14.02	14.8	13.28	3.848	3.644	2009
13.37	13.87	12.9	3.724	3.591	2010
12.58	13.22	11.97	3.635	3.46	2011
12.49	13.13	11.89	3.624	3.447	2012
150.7	**161**	**141.1**	**45.7**	**42.76**	**المجموع**

- المتوسطات الحسابية:

$$\bar{k} = \frac{45.7}{13} = 3.516 \quad \text{و} \quad \bar{y} = \frac{42.76}{13} = 3.289$$

- التباين المشترك: $Cov(y,k) = \frac{1}{n}\sum_{t=2000}^{2012} y_i k_i - \bar{y}\bar{k} = 150.7/13 - 3.289 \times 3.516 = 0.0298$
- الانحرافات المعيارية:

$$V(y) = \frac{1}{n}\sum_i y_i^2 - \bar{y}^2 = \frac{141.1}{13} - (3.289)^2 = 0.0353 \quad \Rightarrow \sigma_y = 0.1878$$

$$V(k) = \frac{1}{n}\sum_i k_i^2 - \bar{k}^2 = \frac{161}{13} - (3.516)^2 = 0.028 \quad \Rightarrow \sigma_k = 0.1674$$

يكون معامل الارتباط الخطي البسيط بين: $LnY = y$ و $LnK = k$ هو:

$$r_{y,k} = \frac{Cov(y,k)}{\sigma_y \sigma_k} = \frac{0.0298}{0.1878 \times 0.1674} = 0.9478$$

4) باستعمال طريقة المربعات الصغرى (ols)نقدر النموذج السابق على الشكل الخطي:

تقدير النموذج على الشكل الخطي: $y_t = \hat{\beta} + \hat{\alpha}\ k_t + \eta_t$

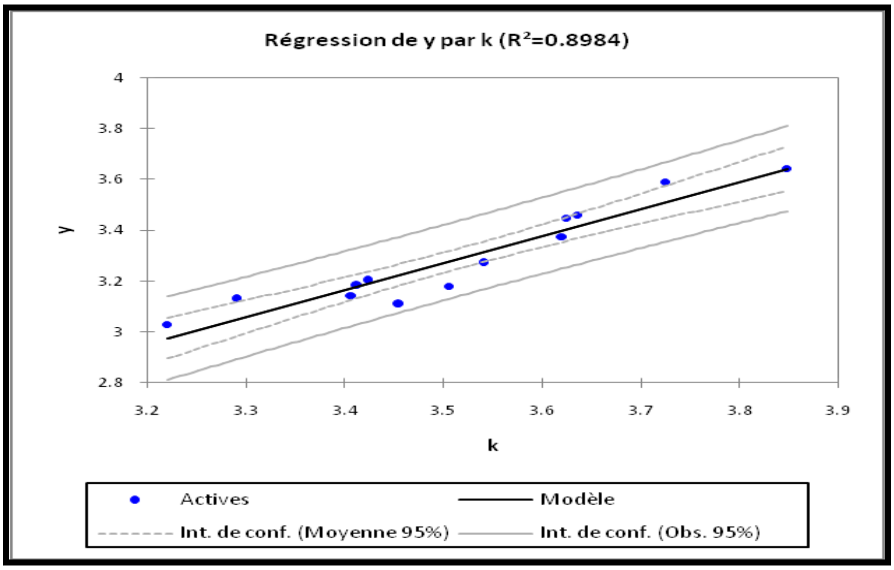
لدينا: $$\hat{\alpha} = \frac{Cov(y,k)}{V(k)} = \frac{0.0298}{0.028} = 1.0629$$

و يكون: $$\hat{\beta} = \bar{y} - \alpha\ \bar{k} = -0.448$$

و عليه فان النموذج على شكل لوغاريتم الخطي هو:

$$LnY_t = -0.448 + 1.0629 LnK_t + e_t$$

5) التمثيل البياني لـ $LnY = y$ بدلالة $LnK = k$ في النموذج السابق على الشكل الخطي؛



6) كتاب النموذج على الشكل الأصلي بعد التقدير:

لدينا: $LnA = \beta \Rightarrow A = e^{\beta} \Rightarrow A = e^{-0.448} = 0.6392$

يكونالنموذج على الشكل الأصلي بعد التقدير هو: $Y_t = 0.6392 \times K_t^{1.0629} + e^{e_t}$

5.الأرقام القياسية

التمرين رقم(01)

تشير معطيات الجدول التالي إلى قيم الاستهلاك الكهرباء (الوحدة كيلو واط ساعي) من منطقة ريفية مختارة من مناطق الوطن.

السنوات	2010	2015	2020
كيلو واط ساعي	1500	1400	1200

المطلوب:

1) حساب الأرقام القياسية للسنوات التالية: $I_{2015/2010}$، $I_{2020/2015}$ و $I_{2020/2010}$

2) ثم ماذا نلاحظ حول خصائص حساب الأرقام القياسية؟

الحل

1) حساب الأرقام القياسية:

- حساب: $I_{2015/2010}$

$$I_{2015/2010}(Q)=\frac{Q_{2015}}{Q_{2010}}\times 100\%=\frac{1400}{1500}\times 100\%=0.93\times 100\%=93\%$$

هناك انخفاض في مستوى استهلاك الكهرباء في سنة 2015 يقدر بـ7% مقارنة بسنة 2010.(في الأرقام القياسية نقارن النتيجة مع العدد100، فإذا كانت هذه النتيجة أكبر من 100معناها هناك زيادة وإذا كان العكس فيكون هناك انخفاض).

- حساب: $I_{2020/2015}$

$$I_{2020/2015}(Q)=\frac{Q_{2020}}{Q_{2015}}\times 100\%=\frac{1200}{1400}\times 100\%=0.85\times 100\%=85\%$$

هناك انخفاض في مستوى استهلاك الكهرباء في سنة 2020 يقدر بـ15% مقارنة بسنة 2015.

- حساب: $I_{2020/2010}$

$$I_{2020/2010}(Q)=\frac{Q_{2020}}{Q_{2010}}\times 100\%=\frac{1200}{1500}\times 100\%=0.80\times 100\%=80\%$$

هناك انخفاض في مستوى استهلاك الكهرباء في سنة 2020 يقدر بـ20% مقارنة بسنة 2010.

2) نلاحظ حول خصائص حساب الأرقام القياسية مايلي:

- خاصية المطابقة: $I_{t/t}(Q)=\frac{Q_t}{Q_t}\times 100\%=100$

مثلا: $I_{2020/2020}(Q)=\frac{1200}{1200}\times 100\%=100$

- خاصية الانعكاس: $I_{t/b}(Q)=\frac{1}{I_{b/t}(Q)}$

مثلا: $I_{2020/2015}(Q)=\frac{Q_{2020}}{Q_{2015}}\times 100\%=\frac{}{\frac{Q_{2015}}{Q_{2020}}}\times 100\%=\frac{1}{I_{2015/2020}(Q)}$

ومنه: $I_{2020/2015}(Q)\times I_{2015/2020}(Q)=1$

- خاصية قابلية التحول:

على حسب قيم استهلاك الكهرباء في الأزمنة 2010، 2015 و 2020 نلاحظ أن:

$$I_{2020/2010}(Q)=\frac{1200}{1400}\times\frac{1400}{1500}\times 100\%=I_{2020/2015}(Q)\times I_{2015/2010}(Q)$$

التمرين(02)

ليكن لدينا الجدول التالي والذي يمثل المعطيات الخاصة بأسعار وكميات المواد الغذائية (الحليب، السكر، اللحم) وفي السنوات 2005، 2015، 2020 الجزائر العاصمة:

الفترات	المواد	السعر (دج)	الكميات (مليون طن)
2005	الحليب (لتر)	25	5
	السكر(الكيلو غرام)	40	2
	اللحم (الكيلو غرام)	800	1.5
2015	الحليب (لتر)	30	5
	السكر(الكيلو غرام)	55	2.5
	اللحم (الكيلو غرام)	1000	2
2020	الحليب (لتر)	35	10
	السكر(الكيلو غرام)	75	3
	اللحم (الكيلو غرام)	1200	3

المطلوب:

حساب الأرقام القياسية: $I_{2015/2005}$ و $I_{2020/2005}$ للسعر والكميات مع التحليل وذلك باستعمال الرقم القياسي لـ: Laspeyres، Fischer وPaasche. ثم ماذا تلاحظ حول خواص حساب الأرقام القياسية بالنسبة لهذه الأرقام؟

الحل

1) حساب الرقم القياسي للأسعار: $I_{2015/2005}$

- حساب الرقم القياسي للأسعارلـ(Laspeyres):

$$I_{t/b}(P)=\frac{\sum_{i=1}^{k}P_{it}\times Q_{ib}}{\sum_{i=1}^{k}P_{ib}\times Q_{ib}}\times 100\% \Rightarrow I_{2015/2005}(P)=\frac{\sum_{i=1}^{k}P_{i2015}\times Q_{i2005}}{\sum_{i=1}^{k}P_{i2005}\times Q_{i2005}}\times 100\%$$

$$I_{2015/2005}(P)=\frac{(30\times 5)+(55\times 2)+(1000\times 1.5)}{(25\times 5)+(40\times 2)+(800\times 1.5)}\times 100\%=\frac{1760}{1405}\times 100\%=125\%$$

بناءا على هذا المقياس فإن الأسعار في سنة 2015عرفت ارتفاعا يقدر بـ 25% مقارنة بسنة الأساس 2005.

- حساب الرقم القياسي للأسعارلـ (Paasche):

$$I_{t/b}(P)=\frac{\sum_{i=1}^{k}P_{it}\times Q_{it}}{\sum_{i=1}^{k}P_{ib}\times Q_{it}}\times 100\% \Rightarrow I_{2015/2005}(P)=\frac{\sum_{i=1}^{k}P_{i2015}\times Q_{i2015}}{\sum_{i=1}^{k}P_{i2005}\times Q_{i2015}}\times 100\%$$

$$I_{2015/2005}(P)=\frac{(30\times 5)+(55\times 2.5)+(1000\times 2)}{(25\times 5)+(40\times 2.5)+(800\times 2)}\times 100\%=\frac{2287.5}{1825}\times 100\%=125\%$$

بناءا على هذا المقياس فإن الأسعار في سنة 2015عرفت ارتفاعا يقدر بـ 25% مقارنة بسنة الأساس 2005.

- حساب الرقم القياسي للأسعارلـ(Fischer):

$$F_{t/b}(P)=\sqrt{I_{t/b}(P)Laspeyres\times I_{t/b}(P)Paasche}$$

$$F_{2015/2005}(P)=\sqrt{I_{2015/2005}(P)Laspeyres\times I_{2015/2005}(P)Paasche}$$

$$F_{2015/2005}(P)=\sqrt{125\times125}=125$$

بناءا على هذا المقياس فإن الأسعار في سنة 2015عرفت ارتفاعا يقدر بـ 25% مقارنة بسنة الأساس 2005.

2) حساب الرقم القياسي للكميات: $I_{2015/2005}$

- حساب الرقم القياسي للكميات لـ(Laspeyres):

$$I_{t/b}(Q)=\frac{\sum_{i=1}^{k}P_{ib}\times Q_{it}}{\sum_{i=1}^{k}P_{ib}\times Q_{ib}}\times100\%\Rightarrow I_{2015/2005}(Q)=\frac{\sum_{i=1}^{k}P_{i2005}\times Q_{i2015}}{\sum_{i=1}^{k}P_{i2005}\times Q_{i2005}}\times100\%$$

$$I_{2015/2005}(Q)=\frac{25\times5+40\times2.5+800\times2}{25\times5+40\times2+800\times1.5}\times100\%=\frac{1825}{1405}\times100\%=130\%$$

بناءا على هذا المقياس فإن الطلب على الكميات في سنة 2015عرفت ارتفاعا يقدر بـ30%مقارنة بسنة 2005.

- حساب الرقم القياسي للكميات لـ(Paasche):

$$I_{t/b}(Q)=\frac{\sum_{i=1}^{k}P_{it}\times Q_{it}}{\sum_{i=1}^{k}P_{it}\times Q_{ib}}\times100\%$$

$$I_{t/b}(Q)=\frac{\sum_{i=1}^{k}P_{it}\times Q_{it}}{\sum_{i=1}^{k}P_{it}\times Q_{ib}}\times100\%\Rightarrow I_{2015/2005}(Q)=\frac{\sum_{i=1}^{k}P_{i2015}\times Q_{i2015}}{\sum_{i=1}^{k}P_{i2015}\times Q_{i2005}}\times100\%$$

$$I_{2015/2005}(Q)=\frac{30\times5+55\times2.5+1000\times2}{30\times5+55\times2+1000\times1.5}\times100\%=\frac{2287.5}{1760}\times100\%=130\%$$

بناءا على هذا المقياس فإن الطلب على الكميات في سنة 2015عرفت ارتفاعا يقدر بـ 30% مقارنة بسنة الأساس 2005.

- حساب الرقم القياسي للكميات لـ (Fischer) :

$$F_{t/b}(Q)=\sqrt{I_{t/b}(Q)Laspeyres\times I_{t/b}(Q)Paasche}$$

$$F_{2015/2005}(Q)=\sqrt{I_{2015/2005}(Q)Laspeyres\times I_{2015/2005}(Q)Paasche}$$

$$F_{2015/2005}(Q)=\sqrt{130\times130}=130$$

بناءا على هذا المقياس فإن الطلب علىالكميات في سنة 2015عرفت ارتفاعا يقدر بـ 30% مقارنة بسنة الأساس 2005.

3) حساب الرقم القياسي للأسعار: $I_{2020/2005}$

- حساب الرقم القياسي للأسعارلـ(Laspeyres):

$$I_{2020/2005}(P)=\frac{\sum_{i=1}^{k}P_{i2020}\times Q_{i2005}}{\sum_{i=1}^{k}P_{i2005}\times Q_{i2005}}\times 100\%$$

$$I_{2020/2005}(P)=\frac{(35\times 5)+(75\times 2)+(1200\times 1.5)}{(25\times 5)+(40\times 2)+(800\times 1.5)}\times 100\%=\frac{2125}{1405}\times 100\%=151\%$$

بناءا على هذا المقياس فإن الأسعار في سنة 2020عرفت ارتفاعا يقدر بـ 51% مقارنة بسنة الأساس 2005.

- حساب الرقم القياسي للأسعارلـ (Paasche):

$$I_{2020/2005}(P)=\frac{\sum_{i=1}^{k}P_{i2020}\times Q_{i2020}}{\sum_{i=1}^{k}P_{i2005}\times Q_{i2020}}\times 100\%$$

$$I_{2015/2005}(P)=\frac{(35\times 10)+(75\times 3)+(1200\times 3)}{(25\times 10)+(40\times 3)+(800\times 3)}\times 100\%=\frac{4175}{2770}\times 100\%=151\%$$

بناءا على هذا المقياس فإن الأسعار في سنة 2020عرفت ارتفاعا يقدر بـ 51% مقارنة بسنة الأساس 2005.

- حساب الرقم القياسي للأسعارلـ(Fischer):

$$F_{t/b}(P)=\sqrt{I_{t/b}(P)Laspeyres\times I_{t/b}(P)Paasche}$$

$$F_{2020/2005}(P)=\sqrt{I_{2020/2005}(P)Laspeyres\times I_{2020/2005}(P)Paasche}$$

$$F_{2020/2005}(P)=\sqrt{151\times 151}=151$$

بناءا على هذا المقياس فإن الأسعار في سنة 2020عرفت ارتفاعا يقدر بـ 51% مقارنة بسنة الأساس 2005.

4) حساب الرقم القياسي للكميات: $I_{2020/2005}$

- حساب الرقم القياسي للكميات لـ(Laspeyres):

$$I_{2020/2005}(Q)=\frac{\sum_{i=1}^{k}P_{i2005}\times Q_{i2020}}{\sum_{i=1}^{k}P_{i2005}\times Q_{i2005}}\times 100\%$$

$$I_{2020/2005}(Q)=\frac{25\times 10+40\times 3+800\times 3}{25\times 5+40\times 2+800\times 1.5}\times 100\%=\frac{2770}{1405}\times 100\%=197\%$$

بناءا على هذا المقياس فإن الطلب على الكميات في سنة 2020عرفت ارتفاعا يقدر بـ97%مقارنة بسنة الأساس 2005.

- حساب الرقم القياسي للكميات لـ(Paasche):

$$I_{2020/2005}(Q)=\frac{\sum_{i=1}^{k}P_{i2020}\times Q_{i2020}}{\sum_{i=1}^{k}P_{i2020}\times Q_{i2005}}\times 100\%$$

$$I_{2015/2005}(Q)=\frac{35\times 10+75\times 3+1200\times 3}{35\times 5+75\times 2+1200\times 1.5}\times 100\%=\frac{4175}{2125}\times 100\%=196\%$$

بناءا على هذا المقياس فإن الطلب على الكميات في سنة 2020عرفت ارتفاعا يقدر بـ 96% مقارنة بسنة الأساس 2005.

- حساب الرقم القياسي للكميات لـ (Fischer) :

$$F_{t/b}(Q)=\sqrt{I_{t/b}(Q)Laspeyres\times I_{t/b}(Q)Paasche}$$

$$F_{2020/2005}(Q)=\sqrt{I_{2020/2005}(Q)Laspeyres\times I_{2020/2005}(Q)Paasche}$$

$$F_{2020/2005}(Q)=\sqrt{197\times 1196}=196$$

بناءا على هذا المقياس فإن الطلب علىالكميات في سنة 2015عرفت ارتفاعا يقدر بـ 96% مقارنة بسنة الأساس 2005.