

Corrigé de TP 3 : Résolution numérique des équations non-linéaires

I. Travail dirigé

1) On utilise le théorème des valeurs intermédiaires :

$$f(1.5) \times f(2) = -0.0018 < 0 ; \text{ donc il existe une racine dans cet intervalle.}$$

$$f(5) \times f(6) = 0.00028312 > 0 ; \text{ donc il n'existe pas une racine dans cet intervalle.}$$

2) La méthode de dichotomie :

$$f(1.5) \times f(2) = -0.0018 < 0$$

Itération 1 : l'intervalle $[1,5, 2]$ contient la racine α

$$m = \frac{a+b}{2} = \frac{1,5+2}{2} = 1,75$$

$$f(1,5) \times f(1,75) = -9,54 \times 10^{-4} < 0$$

$$f(1,75) \times f(2) = 3,65 \times 10^{-3} > 0$$

Itération 2 : l'intervalle $[1,5, 1,75]$ contient la racine c

$$m = \frac{a+b}{2} = \frac{1,5+1,75}{2} = 1,625$$

$$f(1,5) \times f(1,625) = -3,23 \times 10^{-4} < 0$$

$$f(1,625) \times f(1,75) = 6,52 \times 10^{-4} > 0$$

Itération 3 : l'intervalle $[1,5, 1,625]$ contient la racine c

$$m = \frac{a+b}{2} = \frac{1,5+1,625}{2} = 1,5625$$

$$f(1,5) \times f(1,5625) = 5,24 \times 10^{-5} > 0$$

$$f(1,5625) \times f(1,625) = 3,58 \times 10^{-5} < 0$$

Itération 4 : l'intervalle $[1,5625, 1,625]$ contient la racine c

$$m = \frac{a+b}{2} = \frac{1,5625+1,625}{2} = 1,59375$$

A partir de l'itération 3, un chiffre après la virgule devient constant, donc la racine à une précision de 10^{-1} est : $c \simeq m \simeq 1,5$

3) Le nombre des itérations nécessaires pour obtenir une solution à une précision 10^{-6} dans l'intervalle $[1.5, 2]$.

$$\text{Pour } \varepsilon = 10^{-6} ; n > \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} \Rightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{2-1,5}{10^{-6}}\right)}{\ln 2} \Rightarrow n > 18,93 \text{ donc } n = 19$$

4) Méthode de Newton :

$$\text{On a : } x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{(1+x^2)} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-\sin(x))(1+x^2) - (2x)\cos(x)}{(1+x^2)^2}$$

On fait alors le calcul numérique :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.3 - \frac{f(1.3)}{f'(1.3)} = 1.5189$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.5189 - \frac{f(1.5189)}{f'(1.5189)} = 1.5685$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.5708$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1.5708$$

la racine à une précision 10^{-2} est donc $c = 1.57$ qui se stabilise à l'itération 4.

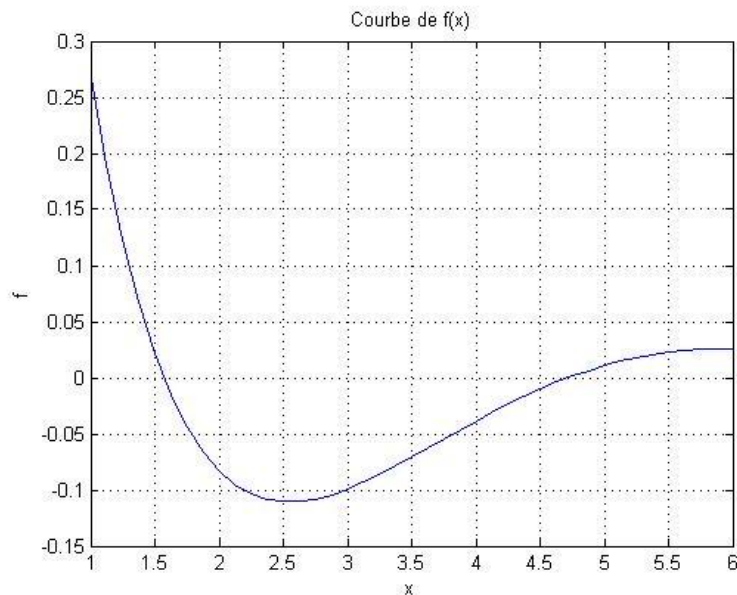
II. Travail pratique

1) Lorsque le nombre des itérations nécessaire pour une solution approchée à une certaine précision est grand ($n > 5$).

2) Programme Matlab qui permet de tracer la courbe de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $[1, 6]$.

```
clear all;close all;clc;
a=1;b=6;n=40;
h=(b-a)/n;
x= a:h:b;
f=@(x) cos(x) ./ (1+x.^2);
plot(x, f(x))
title('Courbe de f(x)')
xlabel('x')
ylabel('f')
grid
```

Après exécution du programme (F5) on obtient :



3) Application de la commande fzero :

```
>> c=fzero(@(x)cos(x)/(1+x^2),[1.5,2])
```

```
c = 1.5708
```

4) Méthode de dichotomie

a. A partir du graphe tracé de $f(x)$, il y a deux racines : $c_1 \in [1.5, 2]$, $c_2 \in [4.5, 5]$

b. Algorithme de calcul par la méthode de dichotomie :

1. Donner $f(x)$, $[a, b]$ où se trouve une racine, une précision ε , la condition de convergence, et un nombre maximal d'itérations N .
2. Calculer : $c = \frac{a+b}{2}$

3. Si $\frac{|b-a|}{2|c|} \leq \varepsilon$; convergence atteinte, écrire la racine c , écrire $f(c)$, écrire le nombre des itérations et arrêter le calcul.
4. Si $\frac{|b-a|}{2|c|} > \varepsilon$; on a trois cas possibles :
 - a) Si $f(a) \times f(c) < 0$, alors $b = c$
 - b) Si $f(c) \times f(b) < 0$, alors $a = c$
 - c) Si le nombre maximale d'itération N est atteint ; convergence non atteinte en N itérations, arrêter le calcul.
5. Retour à l'étape 2.

c. Programme Matlab de la méthode de dichotomie :

```
close all;clear all;clc;
a=1.5;
b=2;
c=(a+b)/2;
f=@(x)cos(x)/(1+x^2);
eps=1e-2;
k=0;
while abs(b-a)>eps
if f(a)*f(c)<0
b=c;
end
if f(b)*f(c)<0
a=c;
end
c=(a+b)/2;
k=k+1;
end
k
c
f(c)
```

Après l'exécution de ce programme on obtient le résultat suivant :

Le nombre des itérations effectués : $k = 6$

La valeur approchée de la racine : $c_1 = 1.5742$

Vérification : $f(c_1) = -9.8397e-004$

d. On change la précision, on obtient :

La précision ε	10^{-2}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-9}
La racine c_1	1.5742	1.5708	1.5708	1.5708
Nombre d'itération k	6	16	23	29

Conclusion : Plus la précision est élevée plus le nombre des itérations effectuées est grand.

5) Méthode de Newton

a. A partir le graphe tracé on choisit par exemple : $x_0 = 1.3$

b. Algorithme de calcul pour la méthode de Newton :

1. Donner $f(x)$, une précision ε , une valeur initiale x_0 de la solution, la condition de convergence, et un nombre maximal d'itérations N .
2. Calculer x_1 à partir de x_0 par la relation :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

3. Si $\frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} \leq \varepsilon$; convergence atteinte, écrire la solution $c = x_1$, écrire $f(c)$, écrire le nombre des itérations et arrêter le calcul.
4. Si $\frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} > \varepsilon$; poser $x_0 = x_1$.
Si le nombre maximale d'itération N est atteint ; convergence non atteinte en N itérations, arrêter le calcul.
5. Retour à l'étape 2.

Remarque : pratiquement on remplace les conditions $\frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} \leq \varepsilon$ et $\frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} > \varepsilon$ par respectivement $|f(x_1)| \leq \varepsilon$ et $|f(x_1)| > \varepsilon$ pour éviter le cas de division par zéro.

c. Programme Matlab de la méthode de Newton :

```
close all;clear all;clc;
f=@(x) cos(x)/(1+x^2);
df=@(x) (-sin(x)*(1+x^2)-2*x*cos(x))/((1+x^2)^2);
eps=1e-3;
x0=1.3;
xn=x0;
k=0;
while abs(f(xn))>eps
xn1=xn-f(xn)/df(xn);
xn=xn1;
k=k+1;
end
k
c=xn
f(c)
```

Après l'exécution de ce programme on obtient le résultat suivant :

Le nombre des itérations effectués : k =2

La valeur approchée de la racine : $c_1 = 1.5685$

Vérification : $f(c_1) = 6.7060e-004$

d. On change la précision par 10^{-8} :

Après l'exécution on obtient :

Le nombre des itérations effectués : k =4

La valeur approchée de la racine : $c_1 = 1.5708$

Vérification : $f(c_1) = 6.1890e-012$

Conclusion : La méthode de Newton est très rapide (un nombre d'itération petit permet d'obtenir une racine avec une grande précision).