Chapitre V. Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires

V.1 Introduction

Les systèmes d'équations algébriques jouent un rôle très important en ingénierie. On peut classer ces systèmes en deux grandes familles : les systèmes *linéaires* et les systèmes *non linéaires*.
Ici encore, les progrès de l'informatique et de l'analyse numérique permettent d'aborder des problèmes de taille prodigieuse. On résout couramment aujourd'hui des systèmes de plusieurs centaines de milliers d'inconnues. On rencontre ces applications en mécanique des fluides et dans l'analyse de structures complexes. On peut par exemple calculer l'écoulement de l'air autour d'un avion ou l'écoulement de l'eau dans une turbine hydraulique complète. On peut également analyser la résistance de la carlingue d'un avion à différentes contraintes extérieures et en vérifier numériquement la solidité.
Dans ce chapitre nous nous sommes intéressées aux quelques méthodes de résolution des systèmes d'équation linéaires.

V.2 Définitions

V.2.1 Systèmes d'équations linéaires

Un système carré d'équations linéaires à coefficients réels s'écrit sous forme des équations :

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \quad \text{(V-1)}$$

ou sous forme matricielle :

$$AX = B \quad \text{(V-2)}$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{(V-3)}$$

Ce système est donc constitué de n équations et n inconnus. Les éléments (a_{ij}) de la matrice A et ceux (b_i) du vecteur B sont des réels donnés, alors que ceux (x_i) du vecteur X sont des réels inconnus. La résolution du système d'équations linéaire se ramène donc à la détermination du vecteur X.
Dans la plupart des cas, nous traitons des *matrices non singulières* ou *inversibles*, c'est-à-dire dont la matrice inverse A^{-1} existe. Nous ne faisons pas non plus de révision systématique de l'algèbre linéaire élémentaire sur les matrices que nous supposons connue.

V.2.2 Matrice diagonale

La matrice diagonale est une matrice qui n'a de coefficients non nuls que sur la diagonale.

V.2.3 Systèmes linéaires diagonaux

Ce sont les systèmes dont la matrice A est diagonale. Ils sont faciles à résoudre.

V.2.4 Matrices triangulaires supérieur et inférieur

Une matrice est dite *triangulaire inférieure* (ou *supérieure*) si tous les a_{ij} (ou tous les a_{ji}) sont nuls pour $i < j$. Elles ont respectivement les formes suivantes :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{(V-4)}$$

Une matrice triangulaire supérieur est tout simplement la transposée d’une matrice triangulaire inférieur.

V.2.5 Systèmes linéaires triangulaires inférieur ou supérieur

Ce sont les systèmes dont la matrice A est triangulaire inférieur ou supérieur. Ils sont également faciles à résoudre. Il suffit en effet de commencer par l’équation qui se trouve à la pointe du triangle (la première pour une matrice triangulaire inférieure et la dernière pour une matrice triangulaire supérieure) et de résoudre une à une les équations. On parle de *descente triangulaire* ou *remontée triangulaire*, selon le cas.

V.3 Méthodes de résolution des systèmes d’équations linéaires

Le système (V-2) ne possède d’une seule solution que si la matrice A est inversible, c'est-à-dire que la matrice inverse A^{-1} existe. Dans le cas où l’un des coefficients diagonaux a_{ii} est nul, la matrice A n’est pas inversible.
La solution du système (V-2) peut donc s’écrire :

$$X = A^{-1}B \qquad \text{(V-5)}$$

Cependant le calcul de la matrice inverse A^{-1} est plus difficile et plus long que la résolution du système linéaire de départ. Pour cela il existe différentes méthodes de résolutions qui sont en générale classées en deux catégories :

V.3.1 Méthodes directes

Ce sont les méthodes où la solution du système peut être obtenue en effectuant un nombre fini et prédéterminé d’opérations. Dans ce chapitre nous allons étudier une méthode directe dite *méthode d’élimination de Gauss*.

V.3.2 Méthodes itératives

Ce sont les méthodes qui peuvent converger en quelques itérations. La convergence des méthodes itératives n’est réalisée que dans certaines conditions que nous préciserons. De plus, les méthodes itératives, lorsqu’elles convergent, ne deviennent vraiment avantageuses que pour les systèmes linéaires de très grandes taille. Dans ce chapitre nous allons étudier une méthode itérative dite *méthode de Gauss-Seidel*.

V.4 Opérations élémentaires sur les lignes

Le système (V-2) peut se transformer à un autre système sans modifier sa solution, en effectuant des opérations sur ses lignes. Ceci est possible puisque on peut toujours multiplier les deux membres du système (V-2) par une matrice W inversible :

$$WAX = WB \qquad \text{(V-6)}$$

La solution n’est pas modifiée puisque l’on peut multiplier par W^{-1} pour revenir au système de départ.
Particulièrement, pour transformer un système quelconque en un système triangulaire, il suffit d’utiliser trois opérations élémentaires sur les lignes de ce système. Ces trois opérations élémentaires correspondent à trois types de matrices W différentes.

On note L_i la ligne i de la matrice A, les trois opérations élémentaires dont on a besoin sont les suivantes :

1. Opération $(L_i \leftarrow \lambda L_i)$: remplacer la ligne i par un multiple d'elle-même.
2. Opération $\left(L_i \leftrightarrow L_j\right)$: intervertir la ligne i et la ligne j.
3. Opération $\left(L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j\right)$: remplacer la ligne i par la ligne i plus un multiple de la ligne j.

Exemple 1

Soit le système :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 10 \end{bmatrix} \tag{V-7}$$

Dont la solution est $X = [1 \quad 1 \quad 1]^T$. Si on souhaite multiplier la ligne 2 par un facteur 3, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 18 & 12 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 33 \\ 10 \end{bmatrix} \tag{V-8}$$

La solution de ce nouveau système reste la même que celle du système de départ.

Exemple 2

On vaut intervenir la ligne 2 et la ligne 3 du système de l'exemple précédent, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix} \tag{V-9}$$

Exemple 3

Dans le système (V-7)**,** on souhaite remplacer la deuxième ligne par la deuxième ligne $(i = 2)$ moins deux fois $(\lambda = -2)$ la première ligne $(j = 1)$, ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 10 \end{bmatrix} \tag{V-10}$$

V.5 Méthode d'élimination de Gauss

La méthode d'élimination de Gauss permet de trouver la solution du système (V-2) en le transformant en un système triangulaire supérieur qui possède la même solution. Cette méthode consiste donc à éliminer tous les termes sous la diagonale de la matrice A.

V.5.1 Notion de la matrice augmentée

La matrice augmentée du système linéaire (V-2) est la matrice de dimension n sur $n + 1$ que l'on obtient en ajoutant le membre de droite B à la matrice A, c'est-à-dire :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \tag{V-11}$$

Puisque les opérations élémentaires doivent être effectuées à la fois sur les lignes de la matrice A et sur celle du vecteur B, cette notation est très utile.

La méthode d'élimination de Gauss est appliquée seulement dans le cas où aucune permutation de ligne n'est effectuée.

Pratiquement, la méthode d'élimination de Gauss est composée de deux parties :

1. Transformation du système un autre système triangulaire possédant la même solution, en appliquant, sur les lignes, les opérations suivantes :

$$L_i \leftarrow L_i - \left(\frac{a_{ik}}{a_{kk}}\right) L_k \ , \qquad k = 1{:}n - 1 \ , \qquad i = k + 1{:}n \tag{V-12}$$

L'indice k est le numéro de l'étape, k varie de 1 à $(n-1)$. L'indice i est le numéro de la ligne L_i. Pour chaque valeur de k, i varie de $k+1$ à n.
On obtient alors un système triangulaire supérieur de la forme :

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a'_{33} & \dots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a'_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_n \end{bmatrix} \qquad \text{(V-13)}$$

où $a'_{ij} = 0$ pour tout $i > j$.
2. Calculer la solution (x_i) du système triangulaire (V-13) qui est :

$$x_i = \begin{cases} \dfrac{b'_n}{a'_{nn}} & si \quad i = n \\ \dfrac{\left(b'_i - \sum_{j=i+1}^{n} a'_{ij}\, x_j\right)}{a'_{ii}} & si \quad i \neq n \end{cases} \quad , \quad (i = n\,, \dots, 2\,, 1) \qquad \text{(V-14)}$$

V.5.2 Algorithme de la méthode d'élimination de Gauss

Les étapes de calcul par la méthode d'élimination de Gauss sont :
1. Donner la matrice A, le vecteur B et la dimension n du sytème.
2. Calculer les éléments du système triangulaire supérieur équivalent par :

$$a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} a_{kj}\,, b_i = b_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} b_k\,, k = 1{:}n-1\,, i = k+1{:}n\,, j = k{:}n \qquad \text{(V-15)}$$

3. Calculer la solution recherchée du système par la formule (V-14).

V.5.3 Exercice V.1

Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss le système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 26 \\ 35 \end{bmatrix} \qquad \text{(V-16)}$$

V.5.4 Corrigé d'exercice V.1

On écrit d'abord la matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 6 & 4 & 0 & 26 \\ 8 & 5 & 1 & 35 \end{array}\right] \qquad \text{(V-17)}$$

On effectue ensuite des opérations sur ses lignes afin d'obtenir un système triangulaire supérieur. On suit les étapes suivantes :
Etape 1 : Elimination sur la colonne 1 du matrice (V-17)
On applique des opérations élémentaires sur les lignes 2 et 3 comme suivant :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 6 & 4 & 0 & 26 \\ 8 & 5 & 1 & 35 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \left(L_2 \leftarrow L_2 - (6/2)L_1\right) \\ \left(L_3 \leftarrow L_3 - (8/2)L_1\right) \end{array}$$

On obtient :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & -7 & -5 \end{array}\right] \qquad \text{(V-18)}$$

Remarque **:** l'élément 2 est appelé *pivot*.
Etape 2 : Elimination sur la colonne 2 du matrice (V-18)
On applique une opération élémentaire sur la ligne 3 comme suivant :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & -7 & -5 \end{array}\right] \quad (L_3 \leftarrow L_3 - (1/1)L_2)$$

On obtient :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \qquad \text{(V-19)}$$

***Remarque* :** l'élément 1 est appelé *pivot*.

Le système triangulaire supérieur obtenu est donc :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{(V-20)}$$

ou encore :

$$\begin{array}{rcr} 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 & = & 10 \\ (0)x_1 + 1x_2 + (-6)x_3 & = & -4 \\ (0)x_1 + (0)x_2 + (-1)x_3 & = & -1 \end{array} \qquad \text{(V-21)}$$

sa solution est : $X = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$, tel que :

$$x_3 = -1/-1 = 1\,, x_2 = \frac{-4 - (-6)(1)}{1} = 2\,, x_1 = \frac{10 - (1)(2) - (2)(1)}{2} = 3 \qquad \text{(V-22)}$$

V.5.5 Travail pratique V.1 : Implémentation MATLAB de la méthode d'élimination de Gauss

1) En utilisant l'algorithme de la méthode d'élimination de Gauss, écrire un programme MATLAB qui permet de résoudre le système d'équation (V-16).
2) Comparer avec la solution donnée par les commandes suivantes : $X = \mathrm{inv}(A) * B$ et $X = A \setminus B$

V.5.6 Corrigé de travail pratique V.1

1) Le programme MATLAB de la méthode d'élimination de Gauss :

```
clear all;close all;clc;
%Programme de la méthode d'élimination de Gauss
A=[2 1 2;6 4 0;8 5 1];B=[10;26;35];n=length(B);
%Calcul du système triangulaire supérieur
for k=1:n-1
if A(k,k)==0
disp('Attention: pivot nul')
break
end
for i=k+1:n
C=A(i,k)/A(k,k);
B(i)=B(i)-B(k)*C;
for j=k:n
A(i,j)=A(i,j)-A(k,j)*C;
end
end
end
disp('La matrice triangulaire supérieur obtenue est :')
disp(A)
disp('Le vecteur B devient :')
disp(B)
%Calcul de la solution du système
for i=n:-1:1
if i==n
x(i)=B(i)/A(i,i);
else
```

```
s1=0;
for j=i+1:n
s1=s1+A(i,j)*x(j);
end
x(i)=(B(i)-s1)/A(i,i);
end
end
disp('solution est :')
disp(x)
```

Après exécution on obtient

La matrice triangulaire supérieur obtenue est :

```
2   1   2
0   1  -6
0   0  -1
```

Le vecteur B devient :

```
10
-4
-1
```

La solution est :

```
3   2   1
```

Attention **:** On ne peut pas appliquer la méthode d'élimination de Gauss si le pivot dans chaque étape est nul.

2) On fait ce calcul directement sur la zone de commandes :

```
>> A=[2 1 2;6 4 0;8 5 1];B=[10;26;35];
>> X=A\B
X =
    3
    2
    1

>> X=inv(A)*B
X =
    3
    2
    1
```

Ces commandes prédéfinies équivalentes donnent le même résultat que notre programme réalisé.

V.6 Méthode de Gauss-Seidel

Les méthodes itératives utilisées pour résoudre un système linéaire de la forme (V-2) s'écrivent souvent sous la forme :

$$X^{k+1} = TX^k + C \tag{V-23}$$

ou X^{k+1} est le vecteur solution calculé à l'itération $k+1$, la matrice T et le vecteur C dépendent de la méthode en cause. En effet par cette relation on calcul le vecteur X^{k+1} à partir du vecteur X^k en commençant par un vecteur de départ donné X^0. On arrête les itérations lors la satisfaction de la condition de convergence suivante :

$$\max\left|X^{k+1} - X^k\right| \leq \varepsilon \tag{V-24}$$

où ε est la précision de la solution recherchée.
C'est-à-dire on arrête les itération lorsque tous les éléments du vecteur X^{k+1} convergent à une précision ε. Le dernier vecteur X^{k+1} calculer sera donc la solution.
La méthode de Gauss-Seidel n'est qu'un cas particulier des méthodes itératives.
Si on suppose pour l'instant que tous les éléments de la diagonale sont non nuls $(a_{ii} \neq 0, \forall i)$. A partir d'une approximation initiale de la solution que nous noterons $X_0 = [x_1^0 \quad x_2^0 \ldots \quad x_n^0]^T$, on construit l'algorithme :

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^k\right) \tag{V-25}$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - \sum_{j=1,j\neq 2}^{n} a_{2j}x_j^k\right) \tag{V-26}$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - \sum_{j=1,j\neq 3}^{n} a_{3j}x_j^k\right) \tag{V-27}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^k\right) \tag{V-28}$$

qui consiste à isoler le coefficient de la diagonale de chaque ligne du système.
Plus généralement, on écrit :

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^k\right) \tag{V-29}$$

qui peut aussi s'exprimer :

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k\right) \tag{V-30}$$

La méthode de Gauss-Seidel est fondée sur la simple constatation selon laquelle le calcul de x_2^{k+1} nécessite l'utilisation de x_1^k, x_3^k, …, x_n^k provenant de l'itération précédente. Or, à l'itération $k+1$, au moment du calcul de x_2^{k+1}, on possède déjà une meilleure approximation de x_1 que x_1^k, à savoir x_1^{k+1}. De même, au moment du calcul de x_3^{k+1}, on peut utiliser x_1^{k+1} et x_2^{k+1}. Plus généralement, pour le calcul de x_i^{k+1}, on peut utiliser $x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_{i-1}^{k+1}$ déjà calculés et les $x_{i+1}^k, x_{i+2}^k, \ldots, x_n^k$ de l'itération précédente. Cela revient à écrire :

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k\right) \quad , \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{V-31}$$

Remarque importante
Si l'un des coefficients diagonaux a_{ii} est nul, il est parfois possible de permuter certaines lignes pour éviter cette situation.

V.6.1 Convergence de la méthode de Gauss-Seidel

Définition
Une matrice A est dite à *diagonale strictement dominante* si :

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad , \quad \forall i \tag{V-32}$$

Cette définition signifie que le terme diagonal a_{ii} de la matrice A est nettement dominant puisque sa valeur absolue est plus grand que la somme des valeurs absolues de tous les autres termes de la ligne.

Théorème de convergence

Si la matrice A est à diagonale strictement dominante, la méthode de Gauss-Seidel converge, et ce quelle que soit la solution initiale X^0.

V.6.2 Algorithme de la méthode de Gauss-Seidel

1. Donner la matrice A, le vecteur B, un vecteur de départ X_0, la précision ε, le nombre maximal des itérations N.
2. Calculer les éléments du vecteur X^{k+1} à partir du vecteur X^k en utilisant la formule (V-31).
3. Si $\max\left|X^{k+1} - X^k\right| \leq \varepsilon$; afficher le résultat : vecteur solution $X = X^{k+1}$ et le nombre d'itération k, et arrêter le calcul.
 Si $\max\left|X^{k+1} - X^k\right| > \varepsilon$; poser $X^{k+1} = X^k$.
Si $k > N$ afficher « le nombre d'itérations maximal est atteint » et arrêter.
4. Retour à l'étape **2**.

V.6.3 Exercice V.2

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 17 \\ -18 \end{bmatrix} \tag{V-33}$$

1) Vérifier que la méthode de Gauss-Seidel converge pour ce système.
2) Résoudre le système (V-33) par la méthode de Gauss-Seidel, à une précision de 10^{-3}, en utilisant le vecteur de départ : $X^0 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$.

V.6.4 Corrigé d'exercice V.2

1) On utilise la définition (V-32) et le théorème de convergence, on a :

$$|3| > |1| + |-1| \ , \qquad |5| > |1| + |2| \ , \qquad |-6| > |2| + |-1|$$

Les trois inégalités sont vérifiées, alors la matrice A est à diagonale strictement dominante, et par conséquent la méthode de Gauss-Seidel converge.
2) Pour le système (V-33), la méthode de Gauss-Seidel s'écrit :

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{3}\left(2 - x_2^k + x_3^k\right)$$
$$x_2^{k+1} = \frac{1}{5}\left(17 - x_1^{k+1} - 2x_3^k\right)$$
$$x_3^{k+1} = \frac{1}{-6}\left(-18 - 2x_1^{k+1} + x_2^{k+1}\right)$$

partant de $[0 \quad 0 \quad 0]^T$, on trouve d'abord :

$$x_1^1 = \frac{1}{3}(2 - 0 + 0) = \frac{2}{3}$$
$$x_2^1 = \frac{1}{5}\left(17 - \frac{2}{3} - 0\right) = \frac{49}{15}$$
$$x_3^1 = \frac{1}{-6}\left(-18 - 2\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{49}{15}\right) = \frac{241}{90}$$

tandis qu'à la deuxième itération on trouve :

$$x_1^1 = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{49}{15} + \frac{241}{90}\right) = 0{,}4703704$$

$$x_2^1 = \frac{1}{3}\left(17 - 0,4703704 + 2\left(\frac{241}{90}\right)\right) = 2,234815$$

$$x_3^1 = \frac{1}{-6}(-18 - 2(0,4703704) + 2,234815) = 2,784321$$

ainsi que les itérations suivantes :

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
1	0.6666667	3.266667	2.677778
2	0.4703704	2.234815	2.784321
3	0.8498354	2.116305	2.930561
4	0.9380855	2.040158	2.972669
5	0.9775034	2.015432	2.989929
6	0.9914991	2.005729	2.996212
7	0.9968277	2.002150	2.998584
8	0.9988115	2.000804	2.999470
9	0.9995553	2.000301	2.999802
10	0.9998335	2.000113	2.999926

Tableau V-1 : Solutions obtenues par la méthode de Gauss-Seidel (Corrigé d'exercice V.2)

V.6.5 Travail pratique V.2 : Implémentation MATLAB de la méthode de Gauss-Seidel

1) Calculer la solution exacte du système (V-33) en utilisant la commande : $X = \text{inv}(A) * B$ ou $X = A \setminus B$

2) En utilisant l'algorithme de la méthode de Gauss-Seidel, écrire un programme MATLAB qui permet de résoudre le système d'équation (V-33), à une précision $\varepsilon = 10^{-2}$, en utilisant le vecteur de départ : $X^0 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$.

3) Exécuter ce programme pour les précisions 10^{-3}, 10^{-4} et 10^{-6}. Conclure.

V.6.6 Corrigé de travail pratique V.2

1) On fait ce calcul directement sur la zone de commandes :

```
>> A=[3 1 -1;1 5 2;2 -1 -6];B=[2;17;-18];
>> X=inv(A)*B
        X =
           1
           2
           3

>> X=A\B
        X =
          1.00000000000000
          2.00000000000000
          3.00000000000000
```

2) Le programme MATLAB de la méthode de Gauss-Seidel :

```
clear all;close all;clc;
format long
%Programme de la méthode de Gauss-Seidel
A=[3 1 -1;1 5 2;2 -1 -6];B=[2;17;-18];n=length(B);
x0=[0;0;0];
x1=x0;
eps=10^-2
```

```
e=1+eps;
k=0;
while e>eps
for i=1:n
s1=A(i,1:i-1)*x1(1:i-1);
s2=A(i,i+1:n)*x0(i+1:n);
x1(i)=(B(i)-s1-s2)/A(i,i);
end
e=max(abs(x1-x0));
x0=x1;
k=k+1;
end
disp('le vecteur solution est')
disp(x1)
disp('le nombre d''itérations est')
disp(k)
```

On obtient après exécution le résultat suivant :

le vecteur solution est :
   0.99682770502025
   2.00214981016155
   2.99858426664649
le nombre d'itérations est : 7

3) Les résultats obtenus pour différentes précisions sont donnés dans le tableau suivant :

ε	Nombre d'itérations	x_1	x_2	x_3
10^{-2}	7	0.99682770502025	2.00214981016155	2.99858426664649
10^{-3}	9	0.99955527762739	2.00030101282468	2.99980159040502
10^{-4}	12	0.99997667778165	2.00001578354740	2.99998959533598
10^{-6}	14	0.99999673260932	2.00000221124840	2.99999854232837

Tableau V-2 : Solutions obtenues par le programme MATLAB de la méthode de Gauss-Seidel (Corrigé de TP V.2)

On conclut que lorsque la précision augmente, le nombre d'itérations effectué augmente plus en plus, et la solution converge vers la solution exacte.