<u>Corrigé de TP 5</u> : Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires

I. <u>Travail dirigé</u>

1) On écrit d'abord la matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 6 & 4 & 0 & 26 \\ 8 & 5 & 1 & 35 \end{array}\right]$$

On effectue ensuite des opérations sur ses lignes afin d'obtenir un système triangulaire supérieur. On suit les étapes suivantes :
Etape 1 : Elimination sur la colonne 1 de la matrice précédente
On applique des opérations élémentaires sur les lignes 2 et 3 comme suivant :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 6 & 4 & 0 & 26 \\ 8 & 5 & 1 & 35 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (L_2 \leftarrow L_2 - (6/2)L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - (8/2)L_1) \end{array}$$

On obtient :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & -7 & -5 \end{array}\right]$$

Remarque **:** l'élément 2 est appelé *pivot*.
Etape 2 : Elimination sur la colonne 2 de la matrice précédente
On applique une opération élémentaire sur la ligne 3 comme suivant :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & -7 & -5 \end{array}\right] \quad (L_3 \leftarrow L_3 - (1/1)L_2)$$

On obtient :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Remarque **:** l'élément 1 est appelé *pivot*.
Le système triangulaire supérieur obtenu est donc :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$\begin{array}{rcr} 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 & = & 10 \\ (0)x_1 + 1x_2 + (-6)x_3 & = & -4 \\ (0)x_1 + (0)x_2 + (-1)x_3 & = & -1 \end{array}$$

sa solution est : $X = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$, tel que :

$$x_3 = -1/-1 = 1 \,, x_2 = \frac{-4 - (-6)(1)}{1} = 2 \,, x_1 = \frac{10 - (1)(2) - (2)(1)}{2} = 3$$

2) Soit le système linéaire suivant :

1) On utilise le théorème de convergence, on a :

$$|3| > |1| + |-1| \;, \qquad |5| > |1| + |2| \;, \qquad |-6| > |2| + |-1|$$

Les trois inégalités sont vérifiées, alors la matrice A est à diagonale strictement dominante, et par conséquent la méthode de Gauss-Seidel converge.
2) Pour le système (2), la méthode de Gauss-Seidel s'écrit :

$$x_1^{k+1}=\frac{1}{3}\left(2-x_2^k+x_3^k\right)$$
$$x_2^{k+1}=\frac{1}{5}\left(17-x_1^{k+1}-2x_3^k\right)$$
$$x_3^{k+1}=\frac{1}{-6}\left(-18-2x_1^{k+1}+x_2^{k+1}\right)$$

partant de $[0 \quad 0 \quad 0]^T$, on trouve d'abord :

$$x_1^1=\frac{1}{3}(2-0+0)=\frac{2}{3}$$
$$x_2^1=\frac{1}{5}\left(17-\frac{2}{3}-0\right)=\frac{49}{15}$$
$$x_3^1=\frac{1}{-6}\left(-18-2\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{49}{15}\right)=\frac{241}{90}$$

tandis qu'à la deuxième itération on trouve :

$$x_1^1=\frac{1}{3}\left(2-\frac{49}{15}+\frac{241}{90}\right)=0{,}4703704$$
$$x_2^1=\frac{1}{3}\left(17-0{,}4703704+2\left(\frac{241}{90}\right)\right)=2{,}234815$$
$$x_3^1=\frac{1}{-6}(-18-2(0{,}4703704)+2{,}234815)=2{,}784321$$

ainsi que les itérations suivantes :

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
1	0.6666667	3.266667	2.677778
2	0.4703704	2.234815	2.784321
3	0.8498354	2.116305	2.930561
4	0.9380855	2.040158	2.972669
5	0.9775034	2.015432	2.989929
6	0.9914991	2.005729	2.996212
7	0.9968277	2.002150	2.998584
8	0.9988115	2.000804	2.999470
9	0.9995553	2.000301	2.999802
10	0.9998335	2.000113	2.999926

II. <u>Travail pratique</u>

1) Méthode d'élimination de Gauss

a. Algorithme de la méthode d'élimination de Gauss :

1. Donner la matrice A, le vecteur B et la dimension n du sytème.
2. Calculer les éléments du système triangulaire supérieur équivalent par :

$$a_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{ik}}{a_{kk}}a_{kj}\,,b_i=b_i-\frac{a_{ik}}{a_{kk}}b_k\,,k=1{:}\,n-1\,,i=k+1{:}\,n\,,j=k{:}\,n$$

3. Calculer la solution recherchée du système par la formule :

$$x_i=\begin{cases}\dfrac{b'_n}{a'_{nn}} & si \quad i=n\\[2ex] \dfrac{\left(b'_i-\sum_{j=i+1}^{n}a'_{ij}\,x_j\right)}{a'_{ii}} & si \quad i\neq n\end{cases}\quad,\quad(i=n\,,\dots,2\,,1)$$

du système obtenu :

$$
\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a'_{33} & \dots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a'_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_n \end{bmatrix}
$$

b. Le programme MATLAB de la méthode d'élimination de Gauss :

```
clear all;close all;clc;
%Programme de la méthode d'élimination de Gauss
A=[2 1 2;6 4 0;8 5 1];B=[10;26;35];n=length(B);
%Calcul du système triangulaire supérieur
for k=1:n-1
if A(k,k)==0
disp('Attention: pivot nul')
break
end
for i=k+1:n
C=A(i,k)/A(k,k);
B(i)=B(i)-B(k)*C;
for j=k:n
A(i,j)=A(i,j)-A(k,j)*C;
end
end
end
disp('La matrice triangulaire supérieur obtenue est :')
disp(A)
disp('Le vecteur B devient :')
disp(B)
%Calcul de la solution du système
for i=n:-1:1
if i==n
x(i)=B(i)/A(i,i);
else
s1=0;
for j=i+1:n
s1=s1+A(i,j)*x(j);
end
x(i)=(B(i)-s1)/A(i,i);
end
end
disp('solution est :')
disp(x)
```

Après exécution on obtient

La matrice triangulaire supérieur obtenue est :

```
2 1 2
0 1 -6
0 0 -1
```

Le vecteur B devient :

```
10
-4
-1
```

La solution est :

```
3 2 1
```

***Attention* :** On ne peut pas appliquer la méthode d'élimination de Gauss si le pivot dans chaque étape est nul.

c. On fait ce calcul directement sur la zone de commandes :

```
>> A=[2 1 2;6 4 0;8 5 1];B=[10;26;35];
>> X=A\B
X =
    3
    2
    1

>> X=inv(A)*B
X =
    3
    2
    1
```

Ces commandes prédéfinies équivalentes donnent le même résultat que notre programme réalisé.

2) Méthode de Gauss-Seidel

a. On fait ce calcul directement sur la zone de commandes :

```
>> A=[3 1 -1;1 5 2;2 -1 -6];B=[2;17;-18];
>> X=inv(A)*B
        X =
            1
            2
            3

>> X=A\B
        X =
          1.00000000000000
          2.00000000000000
          3.00000000000000
```

b. Algorithme de la méthode de Gauss-Seidel :

1. Donner la matrice A, le vecteur B, un vecteur de départ X_0, la précision ε, le nombre maximal des itérations N.
2. Calculer les éléments du vecteur X^{k+1} à partir du vecteur X^k en utilisant la formule la méthode de Gauss-Seidel.
3. Si $\max\left|X^{k+1} - X^k\right| \leq \varepsilon$; afficher le résultat : vecteur solution $X = X^{k+1}$ et le nombre d'itération k, et arrêter le calcul.
Si $\max\left|X^{k+1} - X^k\right| > \varepsilon$; poser $X^{k+1} = X^k$.
Si $k > N$ afficher « le nombre d'itérations maximal est atteint » et arrêter.
4. Retour à l'étape **2**.

c. Le programme MATLAB de la méthode de Gauss-Seidel :

```
clear all;close all;clc;
format long
%Programme de la méthode de Gauss-Seidel
A=[3 1 -1;1 5 2;2 -1 -6];B=[2;17;-18];n=length(B);
x0=[0;0;0];
x1=x0;
eps=10^-2
e=1+eps;
k=0;
while e>eps
for i=1:n
s1=A(i,1:i-1)*x1(1:i-1);
s2=A(i,i+1:n)*x0(i+1:n);
x1(i)=(B(i)-s1-s2)/A(i,i);
end
e=max(abs(x1-x0));
x0=x1;
k=k+1;
end
disp('le vecteur solution est')
disp(x1)
disp('le nombre d''itérations est')
disp(k)
```

On obtient après exécution le résultat suivant :

le vecteur solution est :
0.99682770502025
2.00214981016155
2.99858426664649
le nombre d'itérations est : 7

d. Les résultats obtenus pour différentes précisions sont donnés dans le tableau suivant :

ε	Nombre d'itérations	x_1	x_2	x_3
10^{-2}	7	0.99682770502025	2.00214981016155	2.99858426664649
10^{-3}	9	0.99955527762739	2.00030101282468	2.99980159040502
10^{-4}	12	0.99997667778165	2.00001578354740	2.99998959533598
10^{-6}	14	0.99999673260932	2.00000221124840	2.99999854232837

On conclut que lorsque la précision augmente, le nombre d'itérations effectué augmente plus en plus, et la solution converge vers la solution exacte.