SOLUTION DE LA SÉRIE DE TD N° 03

EXERCICE 01 :

$m_1 = 3{,}2\ kg$

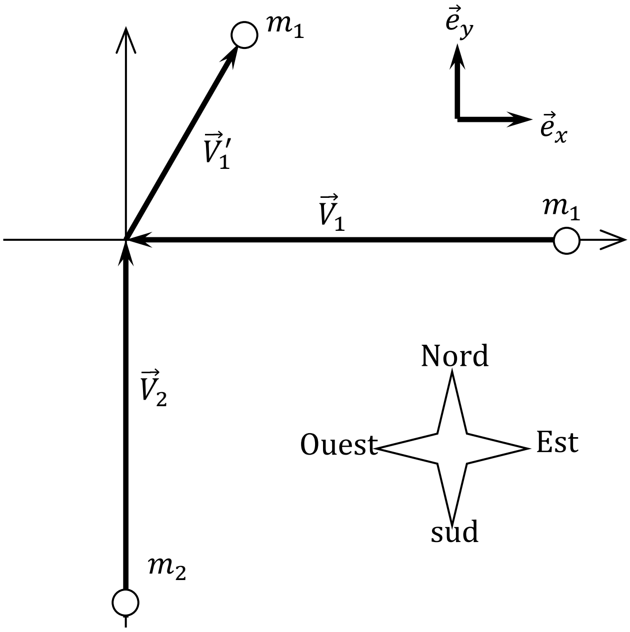
Avant collision $|\vec{V}_1| = 6\ m/s$ et $\vec{V}_1 = -6.\vec{e}_x$

Après collision $|\vec{V}'_1| = 3\ m/s$ et $\vec{V}'_1 = 3.\sin 30°.\vec{e}_x + 3.\cos 30°.\vec{e}_y$ (par projection)

$m_2 = 1{,}6\ kg$

Avant collision $|\vec{V}_2| = 5\ m/s$ et $\vec{V}_2 = 5.\vec{e}_y$

Après collision $\vec{V}'_2 = V'_{2x}.\vec{e}_x + V'_{2y}.\vec{e}_y$



1. Conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

Ou

$$m_1.\vec{V}_1 + m_2.\vec{V}_2 = m_1.\vec{V}'_1 + m_2.\vec{V}'_2$$

En remplaçant suivant les deux axes :

$$m_1.\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix} + m_2.\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} = m_1.\begin{pmatrix}3.\frac{1}{2}\\3.\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} + m_2.\begin{pmatrix}V'_{2x}\\V'_{2y}\end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{cases}-19{,}2 = 4{,}8 + 1{,}6.V'_{2x}\\ 8 = 8{,}31 + 1{,}6.V'_{2y}\end{cases}$$

Finalement

$$\begin{cases}V'_{2x} = -15\\V'_{2y} = -0{,}19\end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{V}'_2 = -15.\vec{e}_x - 0{,}19.\vec{e}_y} \text{ et } \boxed{|\vec{V}'_2| = 15\ m/s}$$

2. Quantité de mouvement totale :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

Ou

$$m_1.\vec{V}_1 + m_2.\vec{V}_2 = m_1.\vec{V}'_1 + m_2.\vec{V}'_2 = m_1.\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix} + m_2.\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$$

Donc

$$\boxed{\vec{p}_{\text{Tot}}\begin{pmatrix}-19{,}2\\8\end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{|\vec{p}_{\text{Tot}}| = 20{,}8\ kg.m/s}$$

3. Variation de la quantité de mouvement :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \Rightarrow \vec{p}'_2 - \vec{p}_2 = -(\vec{p}'_1 - \vec{p}_1) \Rightarrow \boxed{\Delta\vec{p}_2 = -\Delta\vec{p}_1}$$

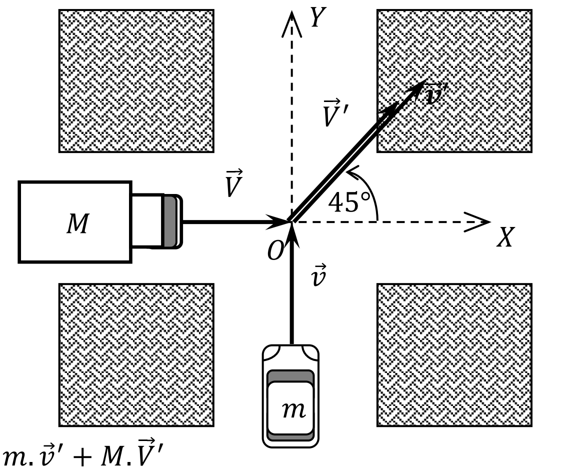
$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 - \vec{p}_1 = m_1.\vec{V}'_1 - m_1.\vec{V}_1 \Rightarrow \Delta\vec{p}_1\begin{pmatrix}+24\\+8{,}31\end{pmatrix}$$

$$\Delta\vec{p}_2 = \vec{p}'_2 - \vec{p}_2 = m_2.\vec{V}'_2 - m_2.\vec{V}_2 \Rightarrow \Delta\vec{p}_2\begin{pmatrix}-24\\-8{,}31\end{pmatrix}$$

4. Variation de la vitesse :

$$\begin{cases}\Delta\vec{V}_1 = \vec{V}'_1 - \vec{V}_1 \Rightarrow \Delta\vec{V}_1\begin{pmatrix}+7{,}5\\+2{,}6\end{pmatrix}\\ \Delta\vec{V}_2 = \vec{V}'_2 - \vec{V}_2 \Rightarrow \Delta\vec{V}_2\begin{pmatrix}-15\\-5{,}19\end{pmatrix}\end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\Delta\vec{V}_1 \neq \Delta\vec{V}_2}$$

EXERCICE 02 :



Avant l'accident :
Voiture (masse m, vitesse $\vec{v}$).
Camion (masse M, Vitesse $\vec{V}$).
Quantité de mouvement totale : $\vec{p} = m.\vec{v} + M.\vec{V}$.

Après l'accident :
Voiture (masse m, vitesse $\vec{v}'$).
Camion (masse M, Vitesse $\vec{V}'$).
Quantité de mouvement totale : $\vec{p}' = m.\vec{v}' + M.\vec{V}'$.

Conservation de la quantité de mouvement : $m.\vec{v} + M.\vec{V} = m.\vec{v}' + M.\vec{V}'$

Projection sur l'axe OX : $M.V = m.v'.\cos(45°) + M.V'.\cos(45°)$.

Projection sur l'axe OY : $m.v = m.v'.\sin(45°) + M.V'.\sin(45°)$.

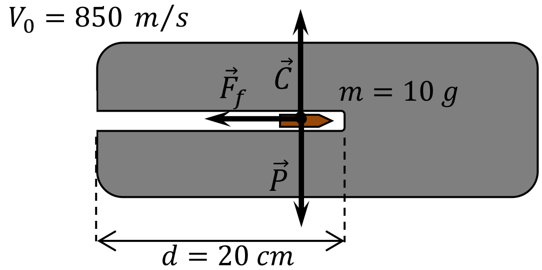
Or $\cos(45°) = \sin(45°)$ $\Rightarrow$ $m.v = M.V$

D'après le témoin $V = 80\ km/h$ d'où

$$\boxed{v = \frac{M}{m}V} \qquad \text{et} \qquad \boxed{v = 320\ km/h}$$

Ce qui est impossible pour une deux chevaux.

EXERCICE 03 :



1. Principe Fondamental de la Dynamique :

$$\sum \vec{f} = \vec{P} + \vec{C} + \vec{F}_f = m.\vec{a}$$

En projetant suivant l'axe horizontal (OX)

$$-F_f = m.a$$

Comme est constante alors a est constante et le mouvement est uniformément varié. D'où nous pouvons utiliser

$$V^2 - V_0^2 = 2.a.(x - x_0)$$

Donc

$$a = \frac{V^2 - V_0^2}{2.(x - x_0)} = \frac{-V_0^2}{2d}$$

Et

$$\boxed{F_f = -m.a = \frac{V_0^2}{2d}} \qquad \text{A.N:} \quad \boxed{F_f = 18062{,}5\ N}$$

2. Mouvement uniformément varié :

$$x(t) = \frac{1}{2}a.t^2 + V_0.t + x_0 \qquad \text{et} \qquad V(t) = a.t + V_0$$

Arrêt de la balle

$$V(t) = a.t_A + V_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_A = \frac{-V_0}{a} = \frac{2d}{V_0}} \qquad \text{A.N:} \quad \boxed{t_A = 4{,}7 \times 10^{-7}\ s}$$

EXERCICE 04 :

1. Principe Fondamental de la Dynamique.

$$\vec{F}_g = m_s.\vec{a} = m_s.\vec{a}_N$$

En projetant :

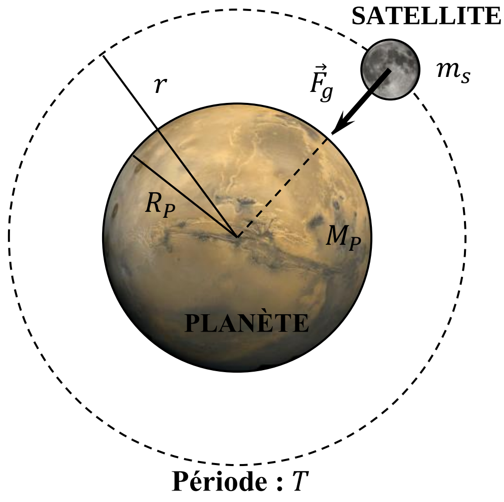
$$G\frac{m_s.M_P}{r^2} = m_s.a_N = m_s\frac{V^2}{r} \quad \text{avec} \quad V = r.\omega \ \text{ et } \ \omega = \frac{2\pi}{r}$$

ω est la vitesse angulaire.
D'où

$$G\frac{M_P}{r^2} = \frac{4.\pi^2}{T^2}r$$

Et enfin

$$\boxed{M_P = \frac{4.\pi^2}{G}\frac{r^3}{T^2}}$$



2. Accélération normale :

$$\boxed{a_N = \frac{V^2}{r} = r.\omega^2 = \frac{4.\pi^2}{T^2}r}$$

3. Force appliquée :

$$\boxed{F_g = m_s.a_N = m_s\frac{4.\pi^2}{T^2}r}$$

4. Accélération de la pesanteur : $R_P = r/10$

Au voisinage de la surface de la planète on a :

$$F_g = G\frac{m_s.M_P}{r^2} = m_s.g_P \qquad \text{avec} \qquad r \approx R_P$$

Donc

$$\boxed{g_P = G\frac{M_P}{R_P^2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{g_P = \frac{400.\pi^2}{T^2}r}$$

5. Masse de la terre :

$$\boxed{M_T = \frac{4.\pi^2}{G}\frac{r^3}{T^2}}$$

$$r = R_T + h = 6{,}88 \times 10^6 \quad ; \quad T = 98\,min = 5880\ s$$

A.N.

$$\boxed{M_T = 5{,}57 \times 10^{24}\ kg}$$

EXERCICE 05 :

PHASE I

En appliquant le PFD :

$$\begin{cases} \vec{P}_1+\vec{C}_1+\vec{T}_1+\vec{F}_f=m_1.\vec{a}_1 \\ \vec{P}_2+\vec{T}_2=m_2.\vec{a}_2 \end{cases} \quad \text{en projetant} \quad \begin{cases} T-F_f=m_1.a_I \\ -T+m_2.g=m_2.a_I \end{cases} \quad \text{avec} \quad F_f=\mu.C_1=\mu.m_1.g$$

D'où

$$\boxed{a_I=\frac{(m_2-\mu.m_1)}{m_1+m_2}g} \quad \dots\dots\dots\dots(1)$$

$a_I=\text{Constante}$ $\Rightarrow$ le mouvement de la masse m_1 est rectiligne uniformément accéléré, donc :

$$V^2-V_0^2=2a_I.h \qquad \text{avec} \qquad V_0=0$$

PHASE II

En appliquant le PFD :

$\vec{P}_1+\vec{C}_1+\vec{F}_f=m_1.\vec{a}_1$ en projetant $-F_f=m_1.a_{II}$ avec $F_f=\mu.C_1=\mu.m_1.g$ **.** D'où **:**

$$\boxed{a_{II}=-\mu.g} \quad \dots\dots\dots\dots(2)$$

$a_{II}=\text{Constante}$ $\Rightarrow$ le mouvement de la masse m_1 est rectiligne uniformément accéléré, donc :

$$V_0^2-V^2=2a_{II}.d \qquad \text{avec} \qquad V_0=0$$

En comparant :

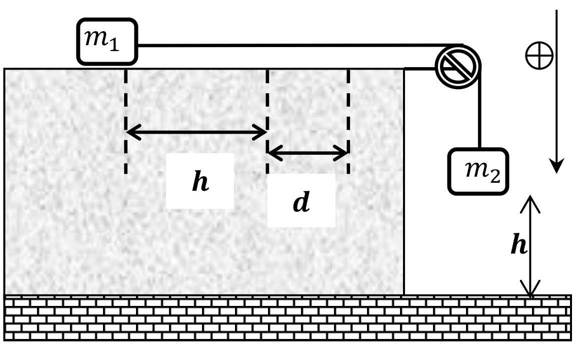
$$\boxed{a_I.h=-a_{II}.d} \quad \dots\dots\dots\dots(3)$$

En remplaçant (1) et (2) dans l'équation (3), il vient que :

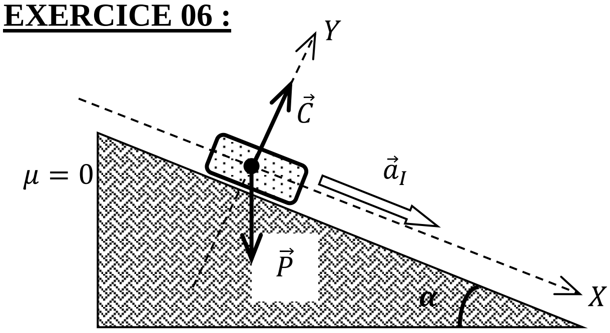
$$\frac{(m_2-\mu.m_1)}{m_1+m_2}g.h=\mu.g.d$$

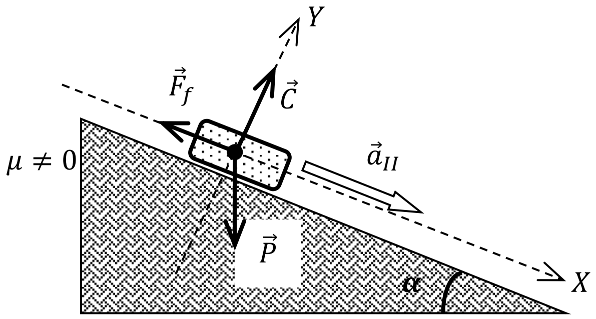
D'où

$$\boxed{\mu=\frac{m_2.h}{m_1.(h+d)+m_2.d}}$$



EXERCICE 06 :





PLAN I : En appliquant le PFD :

$\vec{P} + \vec{C} = m.\vec{a}_I$ en projetant $\begin{cases} mg.\sin\alpha = m.a_I \\ -mg.\cos\alpha + C = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{a_I = g.\sin\alpha}$ ……… (1)

$a_I = \text{Constante}$ ⇒ le mouvement de la masse m est rectiligne uniformément accéléré, donc :

$$\boxed{x_I = \frac{1}{2}a_I.t^2} \qquad (V_0 = 0, x_0 = 0)$$

PLAN II : En appliquant le PFD :

$\vec{P} + \vec{C} + \vec{F}_f = m.\vec{a}_{II}$ en projetant $\begin{cases} mg.\sin\alpha - F_f = m.a_{II} \\ -mg.\cos\alpha + C = 0 \end{cases}$ avec $F_f = \mu.C = \mu.mg.\cos\alpha$

D'où

$$\boxed{a_{II} = g.(\sin\alpha - \mu.\cos\alpha)} \text{ ……… (2)}$$

$a_{II} = \text{Constante}$ ⇒ le mouvement de la masse m est rectiligne uniformément accéléré, donc :

$$\boxed{x_{II} = \frac{1}{2}a_{II}.t^2} \qquad (V_0 = 0, x_0 = 0)$$

Les deux masses parcourent la même distance L durant t_I et t_{II} avec $\boxed{t_{II} = 2.t_I}$.

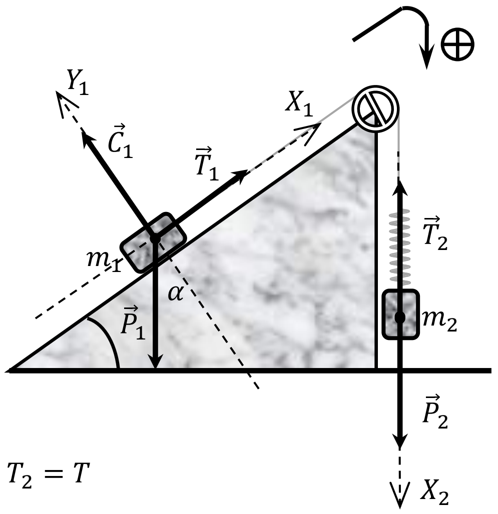
$\begin{cases} L = \frac{1}{2}a_I.t_I^2 \\ L = \frac{1}{2}a_{II}.t_{II}^2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $a_I.t_I^2 = a_{II}.(2.t_I^2)$ $\Rightarrow$ $\boxed{a_I = 4.a_{II}}$ ……… (3)

En remplaçant (1) et (2) dans l'équation (3) on trouve :

$$\boxed{\mu = \frac{3}{4}\tan\alpha}$$

EXERCICE 07 :

1.a. Mouvement sans frottement



Principe Fondamental de la Dynamique : $\sum \vec{f} = m.\vec{a}$

(m_1) $\quad \vec{P}_1 + \vec{C}_1 + \vec{T}_1 = m_1.\vec{a}_1$

(m_2) $\quad \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2.\vec{a}_2$

Projection sur :

$$\begin{matrix} O_1X_1 \\ O_1Y_1 \end{matrix} \quad \begin{cases} T_1 - m_1 g.\sin\alpha = m_1.a_1 \\ -m_1 g.\cos\alpha + C_1 = 0 \end{cases}$$

$$O_2X_2 \qquad m_2 g - T_2 = m_2.a_2$$

Les fils, poulies et le ressort étant de masses négligeables : $T_1 = T_2 = T$

L'élongation du ressort étant constante et les fils inextensibles : $a_1 = a_2 = a$

En faisant la somme des projections suivant O_1X_1 et O_2X_2 :

$$(m_2 - m_1.\sin\alpha)g = (m_1 + m_2).a$$

D'où

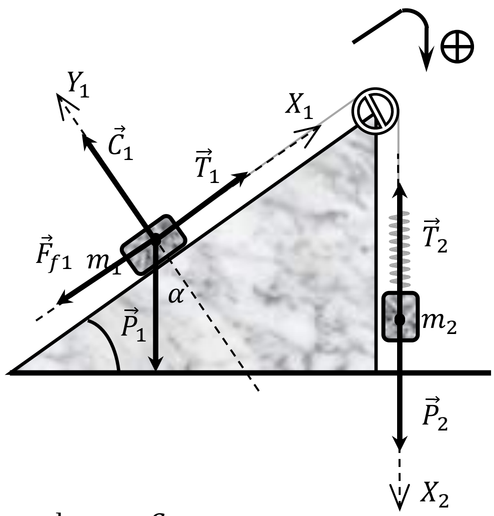
$$a = \frac{m_2 - m_1\sin\alpha}{m_1 + m_2} g$$

Pour des masses égales $(m_1 = m_2 = m)$.

$$a = \frac{1}{2}(1 - \sin\alpha)g > 0$$

Et le système se déplace dans le sens positif.

1.b. Mouvement avec frottement



Principe Fondamental de la Dynamique : $\sum \vec{f} = m.\vec{a}$

(m_1) $\quad \vec{P}_1 + \vec{C}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1.\vec{a}_1$

(m_2) $\quad \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2.\vec{a}_2$

Projection sur :

$$\begin{matrix} O_1X_1 \\ O_1Y_1 \end{matrix} \quad \begin{cases} T_1 - m_1 g.\sin\alpha - F_{f1} = m_1.a_1 \\ -m_1 g.\cos\alpha + C_1 = 0 \end{cases}$$

Avec $\qquad F_{f1} = \mu.C_1$

$$O_2X_2 \qquad m_2 g - T_2 = m_2.a_2$$

En faisant la somme des projections suivant O_1X_1 et O_2X_2 et en remplaçant C_1 :

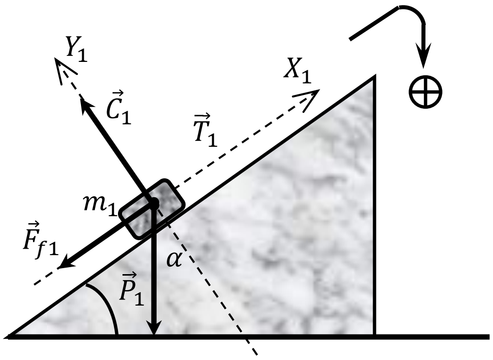
$$(m_2 - m_1.\sin\alpha - \mu.m_1.\cos\alpha)g = (m_1 + m_2).a$$

D'où

$$a = \frac{m_2 - m_1.\sin\alpha - \mu.m_1.\cos\alpha}{m_1 + m_2} g \qquad \text{et pour } (m_1 = m_2 = m) \qquad \boxed{a = \frac{1 - \sin\alpha - \mu.\cos\alpha}{2} g}$$

A partir de la projection sur O_2X_2 :

$$T_2 = k.\Delta l = m_2 g - m_2 a \quad \text{d'où} \quad \boxed{\Delta l = \frac{mg}{2k}(1 + \sin\alpha + \mu.\cos\alpha)}$$



2.a. Accélération de la masse m_1.

Principe Fondamental de la Dynamique : $\vec{P}_1 + \vec{C}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1.\vec{a}_1$

Projection sur :

$$\begin{matrix} O_1X_1 \\ O_1Y_1 \end{matrix} \quad \begin{cases} -m_1 g.\sin\alpha - F_{f1} = m_1.a' \\ -m_1 g.\cos\alpha + C_1 = 0 \end{cases}$$

Avec $F_{f1} = \mu.C_1$

En remplaçant dans la première équation

$$-m_1 g.\sin\alpha - \mu.m_1 g.\cos\alpha = m_1.a'$$

D'où

$$\boxed{a' = -g.(\sin\alpha + \mu.\cos\alpha)}$$

2.b. La vitesse initiale de la deuxième étape est égale à la vitesse à la fin de la première étape

$$V_{1\text{fin}}^2 - V_{1\text{init}}^2 = 2.a.\Delta x$$

Comme $V_{1\text{init}} = 0$ et $\Delta x = h$ donc

$$V_{20} = V_{1\text{fin}} = \sqrt{gh(1 - \sin\alpha - \mu.\cos\alpha)}$$

La position à la fin de la première étape

$$x_{20} = x_{1\text{fin}} = h$$

L'accélération dans la deuxième étape est constante $(a' = \text{Constante})$, le mouvement de la masse m_1 est rectiligne uniformément varié.

D'où l'équation horaire de la deuxième étape

$$x_2(t) = \frac{1}{2}a'.t^2 + V_{20}.t + x_{20}$$

En remplaçant

$$\boxed{x_2(t) = -\frac{1}{2}g.(\sin\alpha + \mu.\cos\alpha).t^2 + \sqrt{gh(1 - \sin\alpha - \mu.\cos\alpha)}.t + h}$$

2.c. Déplacement au cours de la deuxième étape

$$V_{2\text{fin}}^2 - V_{20}^2 = 2.a'.\Delta x$$

Avec $V_{2\text{fin}} = 0$. Donc

$$-gh(1 - \sin\alpha - \mu.\cos\alpha) = -2g.(\sin\alpha + \mu.\cos\alpha).d$$

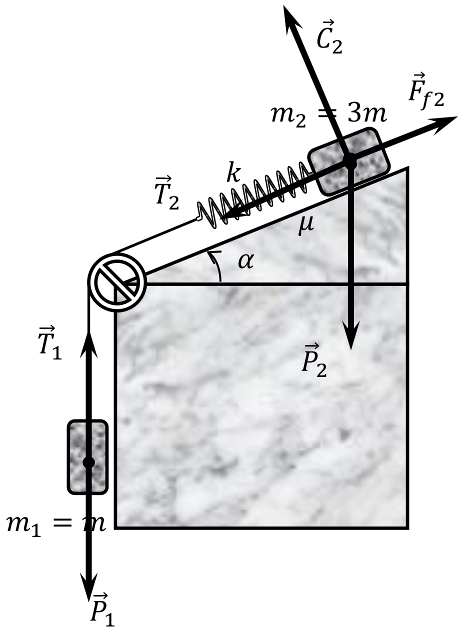
D'où

$$d = \frac{1 - \sin\alpha - \mu.\cos\alpha}{2(\sin\alpha + \mu.\cos\alpha)}h$$

Et la position maximale atteinte par la masse m_1.

$$\boxed{x_{\max} = h + d = \frac{1 + \sin\alpha + \mu.\cos\alpha}{2(\sin\alpha + \mu.\cos\alpha)}h}$$

EXERCICE 08 :



1. **Principe Fondamental de la Dynamique.**

$$\sum \vec{f} = m.\vec{a}$$

(m_1) $\qquad \vec{P}_1 + \vec{T}_1 = m_1.\vec{a}_1$

(m_2) $\qquad \vec{P}_2 + \vec{C}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2.\vec{a}_2$

2. **Projection sur :**

$$O_1X_1 : \quad m_1 g - T_1 = m_1.a_1$$

$$\begin{matrix} O_2X_2 \\ O_2Y_2 \end{matrix} \quad \begin{cases} m_2 g.\sin\alpha + T_2 - F_{f2} = m_2.a_2 \\ -m_2 g.\cos\alpha + C_2 = 0 \end{cases}$$

Les fils, poulies et le ressort étant de masses négligeables : $T_1 = T_2 = T$

L'élongation du ressort étant constante : $a_1 = a_2 = a$

En faisant la somme des projections suivant O_1X_1 et O_2X_2 :

$$m_1 g + m_2 g.\sin\alpha - F_{f2} = (m_1 + m_2).a \quad \dots\dots\dots\dots \ (1)$$

Avec

$$F_{f2} = \mu.C_2 = \mu.m_2 g.\cos\alpha \quad \dots\dots\dots\dots \ (2)$$

A l'équilibre des forces : $a = 0$

$$m_1 g + m_2 g.\sin\alpha = \mu.m_2 g.\cos\alpha$$

Et

$$\boxed{\mu_{\lim} = \frac{1}{3\cos\alpha} + \tan\alpha}$$

3. **Accélération :** en reprenant les équations (1) et (2).

$$m_1 g + m_2 g.\sin\alpha - \mu.m_2 g.\cos\alpha = (m_1 + m_2).a$$

Et en remplaçant les masses

$$mg + 3mg.\sin\alpha - \mu.3mg.\cos\alpha = 4m.a$$

Donc

$$\boxed{a = \frac{g}{4}(1 + 3\sin\alpha - 3\mu.\cos\alpha)}$$

Comme $a =$ constante : **le mouvement est rectiligne uniformément varié.**

4. **Elongation du ressort**

$$m_1 g - T_1 = m_1.a_1 \quad avec \quad T_1 = T_2 = k.\Delta l$$

Donc

$$k.\Delta l = m_1(g - a) = m\left(\frac{4g}{4} - \frac{g}{4} - \frac{3g}{4}\sin\alpha + \frac{3g}{4}\mu.\cos\alpha\right)$$

D'où

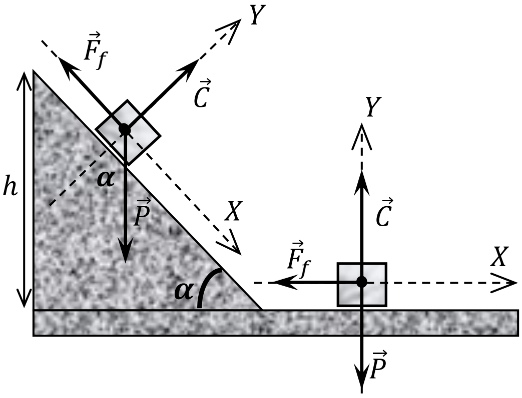
$$\boxed{\Delta l = \frac{3mg}{4k}(1 - \sin\alpha + \mu.\cos\alpha)}$$

5. **Application numérique** :

$$k = 60 \ N/m \ ; \ \mu = 0{,}4 \ ; m = 300 \ g \ ; \ \alpha = 30° \ ; \ g = 9{,}81 \ m/s^2$$

$\boxed{\mu_{\lim} = 0{,}7698}$; $\boxed{a = 3{,}583 \ m/s^2}$ et $\boxed{\Delta l = 0{,}03114\, m = 3{,}114\, cm}$

EXERCICE 09 :



1. Principe Fondamental de la Dynamique : Cas Statique.

Système à l'équilibre : $\sum \vec{f} = \vec{P} + \vec{C} + \vec{F}_f = \vec{0}$

Projection sur $\begin{matrix} OX \\ OY \end{matrix}$ $\begin{cases} +P.\sin\alpha - F_f = 0 & \dots\dots\dots(1) \\ -P.\cos\alpha + C = 0 & \dots\dots\dots(2) \end{cases}$

Dans l'équation (1) nous avons : $F_f = \mu_{\text{lim}}.C$, donc

$$\begin{cases} mg.\sin\alpha = \mu_{\text{lim}}.C \\ mg.\cos\alpha = C \end{cases}$$

En divisant : $\boxed{\mu_{\text{lim}} = \tan\alpha}$

2. Cas dynamique :

$\sum \vec{f} = \vec{P} + \vec{C} + \vec{F}_f = m.\vec{a}$ Projection sur $\begin{matrix} OX \\ OY \end{matrix}$ $\begin{cases} +P.\sin\alpha - F_f = m.a & \dots\dots\dots(3) \\ -P.\cos\alpha + C = 0 & \dots\dots\dots(4) \end{cases}$

A partir de l'équation (4) à l'équilibre nous avons : $mg.\cos\alpha = C$
Donc

$$\boxed{a = g.(\sin\alpha - \mu.\cos\alpha)}$$

3. $a = \text{Constante}$ alors le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

4. Calcul de la distance AB : $\sin\alpha = \frac{h}{AB} \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{h}{\sin\alpha}$

Mouvement rectiligne uniformément accéléré

$$V_B^2 - V_A^2 = 2a.AB$$

$$V_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B^2 = 2g.(\sin\alpha - \mu.\cos\alpha)\frac{h}{\sin\alpha}$$

Et

$$\boxed{V_B = \sqrt{2gh.(1 - \mu/\tan\alpha)}}$$

5. Mouvement rectiligne uniformément accéléré

$$V(t) = a.t + V_0 \quad \text{avec} \quad V_0 = V_A = 0$$

D'où

$$t_B = \frac{V_B}{a} = \frac{\sqrt{2a.AB}}{a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_B = \sqrt{\frac{2h}{g.\sin\alpha.(\sin\alpha - \mu.\cos\alpha)}}}$$

6. Principe Fondamental de la Dynamique :

$$\sum \vec{f} = \vec{P} + \vec{C} + \vec{F}_f = m.\vec{a}'$$

Projection sur $\begin{matrix} OX \\ OY \end{matrix}$ $\begin{cases} -F_f = -\mu.C = m.a' \\ -P + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad a' = -\mu.g$

Mouvement rectiligne uniformément accéléré

$$V_C^2 - V_B^2 = 2a'.d$$

$$V_C = 0 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{-V_B^2}{-2\mu.g} \quad \text{et} \quad \boxed{d = h\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\tan\alpha}\right)}$$

7. Application numérique :

$\boxed{\mu_{\text{lim}} = 1/\sqrt{3} = 0{,}577}$; $\boxed{a = 3{,}268\ m/s^2}$; $\boxed{V_B = 5{,}113\ m/s}$; $\boxed{t_B = 1{,}565\ s}$; $\boxed{d = 6{,}536\ m}$

EXERCICE 10 :

1. Principe Fondamental de la Dynamique.

$$\sum \vec{f} = \vec{P} + \vec{F}_f = m.\vec{a}$$

Projection sur OZ $\Rightarrow$ $\boxed{m.g - \beta.V = m.a}$ (équation différentielle du 1er degré).

Résolution :

$$m.g - \beta.V = m.\frac{dV}{dt}$$

En séparant les variables

$$-\frac{\beta}{m}dt = \frac{-\beta}{m.g - \beta.V}dV$$

Et en intégrant

$$-\frac{\beta}{m}\int dt = \int \frac{-\beta}{m.g - \beta.V}dV \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{\beta}{m}t + C = \ln(m.g - \beta.V)$$

Conditions initiales $t = 0$; $V_0 = 0$ $\Rightarrow$ $C = \ln(m.g)$

Donc

$$-\frac{\beta}{m}t = \ln\left(\frac{m.g - \beta.V}{m.g}\right)$$

Et

$$m.g - \beta.V = m.g.e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

Finalement

$$\boxed{V(t) = \frac{m.g}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right)}$$

2. Position

$$z(t) = \int V(t).dt \quad \Rightarrow \quad z(t) = \frac{m.g}{\beta}\int\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right).dt \quad \Rightarrow \quad z(t) = \frac{m.g}{\beta}\left(t + \frac{m}{\beta}e^{-\frac{\beta}{m}t} + C\right)$$

Conditions initiales $t = 0$; $z = 0$ $\Rightarrow$ $C = -m/\beta$

D'où

$$\boxed{z(t) = \frac{m.g}{\beta}\left(t + \frac{m}{\beta}e^{-\frac{\beta}{m}t} - \frac{m}{\beta}\right)}$$

Accélération

$$a(t) = \frac{dV(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad a(t) = \frac{m.g}{\beta}\left(0 + \frac{\beta}{m}e^{-\frac{\beta}{m}t}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a(t) = g.e^{-\frac{\beta}{m}t}}$$

3. Vitesse limite

La vitesse limite est atteinte quand $t \to +\infty$. D'où :

$$V_L = \lim_{t\to+\infty} V(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{m.g}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V_L = \frac{m.g}{\beta}}$$

Autre méthode :

Quand la vitesse atteint sa valeur limite, elle devient constante $V = V_L = \text{Cte}$ $\Rightarrow$ $a = 0$.

D'après le Principe Fondamental de la Dynamique :

$$m.g - \beta.V_L = m.a = 0$$

Et

$$\boxed{V_L = \frac{m.g}{\beta}}$$

EXERCICE 11 :

1. Principe Fondamental de la Dynamique.

$$\sum \vec{f} = \vec{F} + \vec{F}_f = m.\vec{a}$$

Projection sur (OX) $\Rightarrow$ $\boxed{F - k.V^2 = m.a}$ (équation différentielle du 1er degré).

Résolution :

$$F - k.V^2 = m.\frac{dV}{dt}$$

En séparant les variables

$$\frac{1}{m}dt = \frac{1}{F - k.V^2}dV$$

En multipliant les deux cotés par $(-2kV)$

$$\frac{-2k}{m}Vdt = \frac{-2kV}{F - k.V^2}dV$$

Et en intégrant

$$\frac{-2k}{m}\int V.dt = \int \frac{-2kV}{F - k.V^2}dV \quad \Rightarrow \quad -\frac{2k}{m}x + C = \ln(F - k.V^2)$$

Conditions initiales $t = 0$; $V = V_0$ et $x = 0$ $\Rightarrow$ $C = \ln(F - k.V_0^2)$. Donc

$$-\frac{2k}{m}x = \ln\left(\frac{F - k.V^2}{F - k.V_0^2}\right)$$

Et

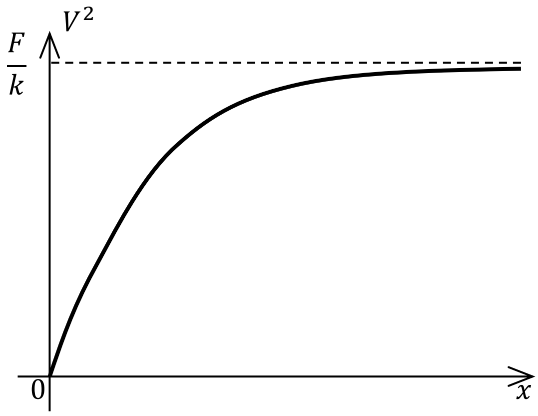
$$F - k.V^2 = (F - k.V_0^2).e^{-\frac{2k}{m}x}$$

Finalement

$$\boxed{V^2 = \left(\frac{F}{k}\right) + \left(V_0^2 - \frac{F}{k}\right).e^{-\frac{2k}{m}x}}$$

2. Pour on a :

$$V^2 = \frac{F}{k}\left(1 - e^{-\frac{2k}{m}x}\right)$$



Représentation (Figure ci-contre).

3. Vitesse limite

La vitesse limite est atteinte quand $x \to +\infty$. D'où :

$$V_L = \lim_{x\to+\infty} V(t) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{F}{k}\right) + \left(V_0^2 - \frac{F}{k}\right).e^{-\frac{2k}{m}x}$$

Et

$$\boxed{V_L = \frac{F}{k}}$$

4. Si on supprime F la force après que le corps ait atteint sa vitesse limite, l'équation différentielle et la solution restent les mêmes avec :

$$F = 0 \quad \text{et} \quad V_0 = V_L$$

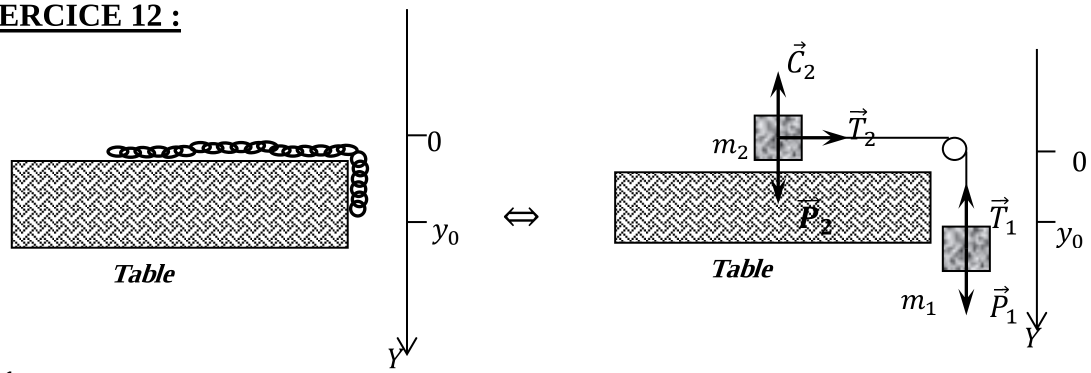
D'où

$$V^2 = V_L^2.e^{-\frac{2k}{m}x}$$

Si le corps parcours une distance $x = m/k$, alors :

$$V^2 = V_L^2.e^{-2} \quad \text{et} \quad \boxed{V = \frac{V_L}{e}}$$

EXERCICE 12 :



1.

m_1 : est la masse de la partie de la chaîne en dehors de la table
m_2 : est la masse de la partie de la chaîne sur la table

$$m_1 + m_2 = M$$

En appliquant le PFD :

$$\begin{cases} \vec{P}_1 + \vec{T}_1 = m_1.\vec{a}_1 \\ \vec{P}_2 + \vec{C}_2 + \vec{T}_2 = m_2.\vec{a}_2 \end{cases} \quad \text{en projetant} \quad \begin{cases} m_1 g - T = m_1.a \\ T = m_2.a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g = \frac{m_1}{M} g}$$

sachant que : $m_1 = \frac{M}{l} y = \lambda.y$ *et* $a = y^{\bullet\bullet}$ alors

$$\boxed{y^{\bullet\bullet} = \frac{\lambda.g}{M} y = \frac{g}{l} y}$$

2.

$$y(t) = A.e^{\omega.t} + B.e^{-\omega.t} \quad \Rightarrow \quad y^{\bullet\bullet} = \omega^2.y \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

Conditions initiales : à $t = 0\ s$; $y = y_0$ et $V = 0\ m/s$

$$\begin{cases} A + B = y_0 \\ A - B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = B = \frac{y_0}{2}}$$

En remplaçant :

$$y(t) = \frac{y_0}{2}(e^{\omega.t} + e^{-\omega.t}) \quad \text{ou} \quad \boxed{y(t) = y_0.\mathrm{ch}(\omega.t)}$$

3. Calcul de τ :

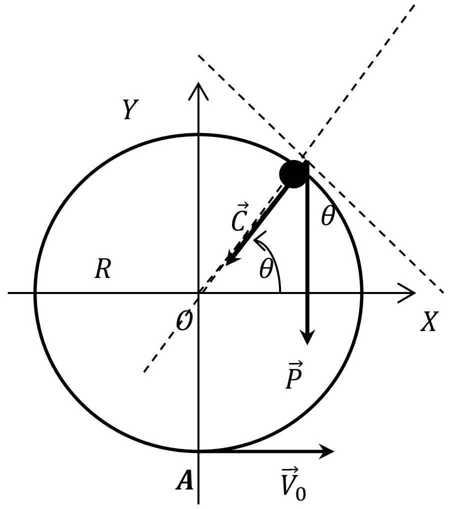
$$y(\tau) = y_0.\mathrm{ch}(\omega.\tau) = l$$

D'où

$$\omega.\tau = \mathrm{Arcch}\left(\frac{l}{y_0}\right) \quad \text{et} \quad \boxed{\tau = \frac{1}{\omega}\mathrm{Arcch}\left(\frac{l}{y_0}\right)}$$

.

EXERCICE 13 :



1. en appliquant le PFD $\vec{P} + \vec{C} = m.\vec{a}$

En projetant sur les axes des coordonnées polaires on a :

L'accélération est donnée par

$$\vec{a} = \left(r^{\bullet\bullet} - r.\theta^{\bullet 2}\right).\vec{e}_r + (2r^{\bullet}.\theta^{\bullet} + r.\theta^{\bullet\bullet}).\vec{e}_\theta$$

Avec $r = R = \text{Constante}$ et $r^{\bullet} = 0.$

Donc

$$\begin{cases} C + mg.\sin\theta = mR.\theta^{\bullet 2} = m.a_N & \dots\dots\dots\dots (1) \\ -mg.\cos\theta = mR.\theta^{\bullet\bullet} = m.a_T & \dots\dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

L'équation (2) est l'équation différentielle du mouvement

$$\boxed{-g.\cos\theta = R.\theta^{\bullet\bullet}}$$

2. Pour calculer la vitesse, nous multiplions l'équation (2) par $\theta^{\bullet}$ et nous intégrons par rapport à t :

$$-\int g.\cos\theta\,.\theta^{\bullet}.dt = \int R.\theta^{\bullet\bullet}.\theta^{\bullet}.dt \quad \Rightarrow \quad -g.\sin\theta + \text{Cte} = \frac{1}{2}R.\theta^{\bullet 2}$$

Conditions initiales : à $(t = 0\,s\ ,\ \theta = -\pi/2\ rad\ ,\ \theta_0^{\bullet} = V_0/R)$

D'où

$$\text{Cte} = \frac{V_0^2 - 2R.g}{2R}$$

Et puisque

$$\theta^{\bullet} = \frac{V}{R} \qquad et \qquad \sin\theta = \frac{Y}{R}$$

Nous pouvons écrire

$$\boxed{V = \sqrt{V_0^2 - 2g(Y + R)}}$$

3. Nous calculons C à partir de l'équation (1) :

$$C = m\frac{V^2}{R} - mg.\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{m}{R}[V_0^2 - g(3Y + 2R)]}$$

4. Pour que $V = 0$ il faut que : $V_0^2 = 2g(Y + R)$ or $V_0^2 = g.R$

Donc $\boxed{Y_M = -R/2}$ $\Rightarrow$ ***Nous avons un mouvement oscillatoire autours d e A.***

Expression de C : pour $V_0^2 = g.R$ nous avons

$$\boxed{C = -\frac{mg(3Y + R)}{R}}$$

$$C = 0 \quad \Rightarrow \quad Y = -R/3 \quad \Rightarrow \quad Y > Y_M \quad \text{impossible}$$

5. Pour que la masse puisse suivre la piste sans décoller il faut que C au point le plus haut soit supérieure à zéro i.e. : $C(Y = R) > 0.$

$$C(Y = R) = \frac{m}{R}[V_0^2 - 5g.R] > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_0 > \sqrt{5g.R}}$$

EXERCICE 14 :

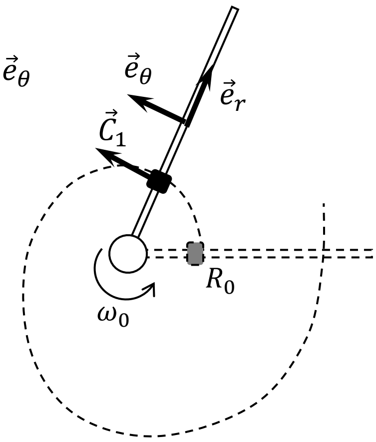
1. Principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{f} = \vec{C} + \vec{P} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 + \vec{P} = m.\vec{a}$$

En utilisant les coordonnées polaires :

$$\vec{a} = \left(r^{\bullet\bullet} - r.\theta^{\bullet 2}\right).\vec{e}_r + \left(2r^{\bullet}.\theta^{\bullet} + r.\theta^{\bullet\bullet}\right).\vec{e}_\theta$$

En projetant sur les axes $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ comme le montre la figure.



Vue d'au dessus.

Suivant : $\begin{cases}\vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = m.a_r = m.\left(r^{\bullet\bullet} - r.\theta^{\bullet 2}\right) \\ C_1 = m.a_\theta = m.\left(2r^{\bullet}.\theta^{\bullet} + r.\theta^{\bullet\bullet}\right)\end{cases}$

Avec

$$\theta^{\bullet} = \omega_0 = \text{Constante} \quad \text{et} \quad \theta^{\bullet\bullet} = 0$$

En projetant sur l'axe $(\vec{e}_z)$

$$C_2 - P = 0$$

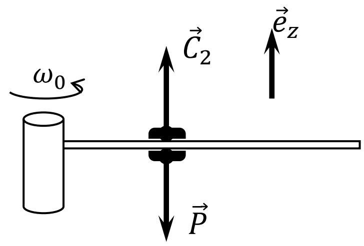
La première équation donne l'équation différentielle :

$$r^{\bullet\bullet} - r.\theta^{\bullet 2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r^{\bullet\bullet} = \omega_0^2.r}$$

2. Solution de l'équation de la forme : $r(t) = A.e^{\omega.t} + B.e^{-\omega.t}$

En dérivant :

$$\begin{cases} r(t) = A.e^{\omega.t} + B.e^{-\omega.t} \\ r^{\bullet}(t) = \omega A.e^{\omega.t} - \omega B.e^{-\omega.t} \\ r^{\bullet\bullet}(t) = \omega^2 A.e^{\omega.t} + \omega^2 B.e^{-\omega.t} = \omega^2.r \end{cases}$$



Vue de côté.

D'où en identifiant on a :

$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

Conditions initiales : $t = 0$, $r = R_0$ et $V_0 = 0$

$$\begin{cases} R_0 = A + B \\ 0 = \omega(A - B) \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = B = \frac{R_0}{2}}$$

En remplaçant dans $r(t)$ on a :

$$\boxed{r(t) = \frac{R_0}{2}.e^{\omega_0.t} + \frac{R_0}{2}.e^{-\omega_0.t} = R_0.\cosh(\omega_0.t)}$$

3. Force appliquée par la tige sur la masse $\vec{C}$.

C_1 est donnée par l'équation

$$C_1 = m.\left(2r^{\bullet}.\theta^{\bullet} + r.\theta^{\bullet\bullet}\right) = 2m.\omega_0.r^{\bullet} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2m.\omega_0^2.R_0.\sinh(\omega_0.t)$$

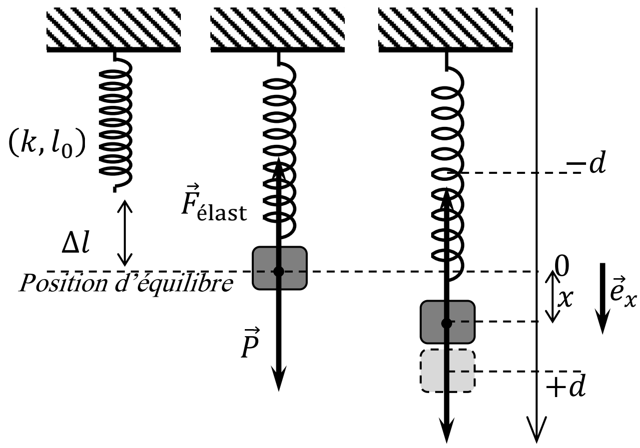
C_2 est donnée par l'équation

$$C_2 = P = m.g$$

D'où

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = m.\sqrt{4\omega_0^4.R_0^2.\sinh^2(\omega_0.t) + g^2}}$$

EXERCICE 15 :



Calcul de l'élongation Δl:

En Appliquant le PFD à l'équilibre

$$\sum \vec{f} = \vec{P} + \vec{F}_{\text{élast}} = m.\vec{a} = \vec{0}$$

Avec $\vec{F}_{\text{élast}} = -k.\Delta\vec{l}$ et son module $F_{\text{élast}} = k.\Delta l$

En projetant sur l'axe (OX) :

$$m.g - k.\Delta l = 0$$

D'où

$$\boxed{\Delta l = \frac{m.g}{k}}$$

1. Principe Fondamental de la Dynamique : $\sum \vec{f} = \vec{P} + \vec{F}_{\text{élast}} = m.\vec{a}$

En projetant sur l'axe (OX) :

$$m.g - k.(\Delta l + x) = m.a$$

Comme

$$m.g - k.\Delta l = 0$$

Alors

$$\boxed{a = -\frac{k}{m}x}$$

C'est une équation différentielle du 2ème degrés.

2. Solution de la forme : $x(t) = A.\sin(\omega.t) + B.\cos(\omega.t)$

En dérivant :

$$\begin{cases} x(t) = A.\sin(\omega.t) + B.\cos(\omega.t) \\ V = x^{\bullet} = \omega A.\cos(\omega.t) - \omega B.\sin(\omega.t) \\ a = x^{\bullet\bullet} = -\omega^2 A.\sin(\omega.t) - \omega^2 B.\cos(\omega.t) = -\omega^2.x \end{cases}$$

D'où en identifiant on a :

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Conditions initiales : $t = 0$, $x = d$ et $V_0 = 0$ $\begin{cases} d = B \\ 0 = \omega A \end{cases}$

En remplaçant dans $x(t)$ on a :

$$\boxed{x(t) = d.\cos(\omega.t)}$$

3. Vitesse et accélération :

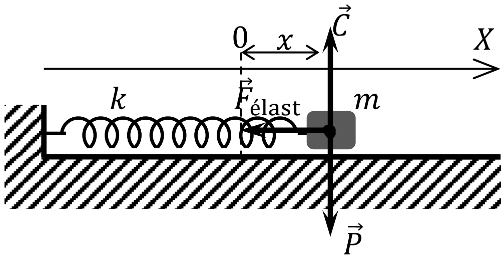
$$\begin{cases} V = x^{\bullet} = -\omega d.\sin(\omega.t) \\ a = x^{\bullet\bullet} = -\omega^2 d.\cos(\omega.t) \end{cases}$$

	$\omega.t = n.\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 2n\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)}$	$\omega.t = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = (2n+1)\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)}$
$x(t)$	$\lvert x(t)\rvert = x_{\text{Max}} = d$	$x(t) = 0$
$V(t)$	$V(t) = 0$	$\lvert V(t)\rvert = V_{\text{Max}} = \omega.d$

$a(t)$	$\lvert a(t)\rvert = a_{\text{Max}} = \omega^2 d$	$a(t) = 0$

Système masse-ressort horizontal :

Principe Fondamental de la Dynamique :



$$\sum \vec{f} = \vec{P} + \vec{F}_{\text{élast}} = m.\vec{a}$$

En projetant sur l'axe (OX) :

$$-k.x = m.a \qquad \text{et} \qquad \boxed{a = -\frac{k}{m}x}$$

On retrouve la même équation différentielle du 2ème degrés. La solution est de la même forme que ce qui a précédé.

Application Numérique : $k = 10\ N/m\,;\ l = 0{,}2\,m\,;\ \ m = 50\ g\,;\ d = 3\ cm$

Donc

$$\Delta l = 0{,}04905\,m \quad ; \quad \omega = 14{,}142\ rad/s \quad ; \quad B = d = 0{,}03\,m$$

$$V_{\text{Max}} = 0{,}424\ m/s \quad ; \quad a_{\text{Max}} = 6\ m/s^2$$

EXERCICE 16 :

1. En appliquant le PFD : $\boldsymbol{\sum \vec{f} = \vec{P} + \vec{C} + \vec{T} = m.\vec{a}}$

En projetant sur l'axe $(\boldsymbol{BA})$ on obtient $\boldsymbol{T = m.a_N}$

Avec $\boldsymbol{T = k.\Delta l = k.(l - l_0)}$; $\boldsymbol{a_N = R.\omega^2}$; $\boldsymbol{R = l}$

Donc

$$k.(l - l_0) = m.l.\omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{l = \frac{k.l_0}{k - m.\omega^2}}$$

2.

$$\boxed{T = m.l.\omega^2 = \frac{k.l_0.m.\omega^2}{k - m.\omega^2}}$$

3.

Résonance $\Rightarrow$ $(l \to +\infty)$ $\Rightarrow$ $k - m.\omega_1^2 = 0$ et $\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

4. Moment cinétique $\vec{L} = m.\vec{r} \times \vec{V} = m.r^2\vec{\omega}$ en module $L = m.r^2\omega = m.l^2\omega$

$$\boxed{L = \frac{k^2.l_0^2.m.\omega}{(k - m.\omega^2)^2}}$$

5. En appliquant le PFD aux deux masses :

$$\begin{cases} \vec{P}_1 + \vec{C}_1 + \vec{T}_1 + \vec{T}_1^{'} = m_1.\vec{a}_1 \\ \vec{P}_2 + \vec{C}_2 + \vec{T}_2 = m_2.\vec{a}_2 \end{cases} \quad \text{en projetant sur l'axe } (BA) \quad \begin{cases} T_1 - T_2 = m.\omega^2.l_1 \\ T_2 = m.\omega^2.(l_1 + l_2) \end{cases}$$

Avec

$$T_1 = k.(l_1 - l_0) \quad \text{et} \quad T_2 = k.(l_2 - l_0)$$

D'où

$$\begin{cases} k.(l_1 - l_0) - k.(l_2 - l_0) = m.\omega^2.l_1 \\ k.(l_2 - l_0) = m.\omega^2.(l_1 + l_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (k - m.\omega^2).l_1 - k.l_2 = 0 \\ (-m.\omega^2).l_1 - (k - m.\omega^2).l_2 = k.l_0 \end{cases}$$

C'est un système d'équation dont les solutions sont :

$$\boxed{l_1 = \frac{k^2.l_0}{(k - m.\omega^2)^2 - k.m.\omega^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{l_2 = \frac{k.(k - m.\omega^2).l_0}{(k - m.\omega^2)^2 - k.m.\omega^2}}$$

6. En appliquant le PFD : $\vec{P}_1 + \vec{C}_1 + \vec{T}_1 + \vec{T}_1' = m_1.\vec{a}_1$

En projetant sur l'axe (BA) on obtient

$$-k.x_1 - k.x_1 = -2k.x_1 = m.a_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_1 = \ddot{x}_1 = -\frac{2k}{m}x_1}$$

C'est une équation différentielle du 2ème ordre

7. La solution est de la forme

$$\begin{cases} x_1(t) = x_0.\sin(\omega_0.t + \varphi) \\ V_1(t) = \dot{x}_1 = \omega_0.x_0.\cos(\omega_0.t + \varphi) \\ a_1(t) = \ddot{x}_1 = -\omega_0^2.x_0.\sin(\omega_0.t + \varphi) = -\omega_0^2.x_1(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}}$$

Condition initiales à $(t = 0 \ , \ x_1 = d \ , \ V_1 = 0)$.

En remplaçant dans l'équations de V_1 on trouve :

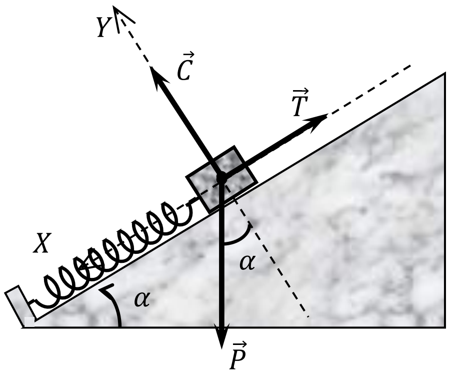
$$0 = \omega_0.x_0.\cos(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \cos(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}\ rad \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}\ rad$$

Et en remplaçant dans l'équations de x_1 on a :

$$\begin{cases} \text{pour} \quad \varphi = \pi/2 \quad \text{on a} \quad x_0 = d \\ \text{pour} \quad \varphi = 3\pi/2 \quad \text{on a} \quad x_0 = -d \end{cases} \quad \text{qui donnent la même solution}$$

$$\boxed{x_1(t) = d.\sin\left(\omega_0.t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

EXERCICE 17 :



1. Principe Fondamental de la Dynamique.

Système à l'équilibre : $\sum \vec{f} = \vec{P} + \vec{C} + \vec{T} = \vec{0}$

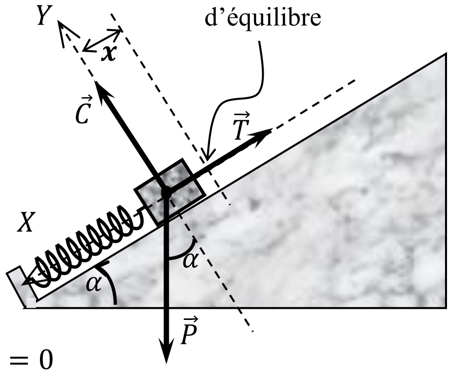
Projection sur $\begin{matrix} OX \\ OY \end{matrix} \quad \begin{cases} +P.\sin\alpha - T = 0 & \ldots\ldots\ldots(1) \\ -P.\cos\alpha + C = 0 & \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$

De l'équation (1) nous avons : $T = k.\Delta l = mg.\sin\alpha$, et

$$\Delta l = \frac{mg.\sin\alpha}{k}$$

Avec $\Delta l = l_0 - l$ compression du ressort, d'où :

$$\boxed{l = l_0 - \frac{mg.\sin\alpha}{k}}$$



2. Cas dynamique :

$$\sum \vec{f} = \vec{P} + \vec{C} + \vec{T} = m.\vec{a}$$

Projection sur $\begin{matrix} OX \\ OY \end{matrix} \quad \begin{cases} +P.\sin\alpha - T = m.a & \ldots\ldots\ldots(3) \\ -P.\cos\alpha + C = 0 \end{cases}$

Avec : $T = k.(\Delta l + x)$

A partir de l'équation (1) à l'équilibre nous avons : $mg.\sin\alpha - k.\Delta l = 0$
Donc

$$+mg.\sin\alpha - k.(\Delta l + x) = m.a \qquad \Rightarrow \qquad -k.x = m.a$$

Et l'équation différentielle est donnée par

$$\boxed{a = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x}$$

3. La solution de l'équation différentielle du 2ème degrés est de la forme :

$$\begin{cases} x(t) = A.\sin(\omega.t + \varphi) \\ V(t) = \dot{x} = A\omega.\cos(\omega.t + \varphi) & \ldots\ldots\ldots \ (1) \\ a(t) = \ddot{x} = -A\omega^2.\sin(\omega.t + \varphi) \end{cases}$$

D'où $\boxed{a = \ddot{x} = -\omega^2.x}$

En comparant avec l'équation différentielle, on trouve :

$$\omega^2 = k/m \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\omega = \sqrt{k/m}}$$

On calcul A et φ en utilisant les conditions initiales :

A $t = 0\ s$; $x = 0$ (équilibre). $\Rightarrow$ $A.\sin(\varphi) = 0$ $\Rightarrow$ $\sin(\varphi) = 0$

D'où $\boxed{\varphi = 0}$ ou $\boxed{\varphi = \pi}$

A $t = 0\ s$; $V = V_0$ $\Rightarrow$ $A\omega.\cos(\varphi) = V_0$

$$\boxed{\begin{cases} \varphi = 0 & \Rightarrow & A = V_0/\omega = V_0\sqrt{m/k} \\ \varphi = \pi & \Rightarrow & A = -V_0/\omega = -V_0\sqrt{m/k} \end{cases}}$$

En remplaçant dans l'équation (1) : $\boxed{\begin{cases} x(t) = V_0\sqrt{m/k}\,.\sin\left(\sqrt{k/m}\,.t\right) \\ V(t) = V_0.\cos\left(\sqrt{k/m}\,.t\right) \\ a(t) = -V_0\sqrt{k/m}\,.\sin\left(\sqrt{k/m}\,.t\right) \end{cases}}$

EXERCICE 18 :

1. Le système est en équilibre, donc en appliquant le ***Principe Fondamentale de la Dynamique*** on a :

$$\sum \vec{f} = \vec{P} + \vec{T}_A + \vec{T}_B = \vec{0}$$

Les valeurs algébriques des forces élastiques sont $T_A = -k.x_A$ et $T_B = -k.x_B$.

Tel que x_A et x_B sont respectivement les élongations des ressorts fixés en (A) et en (B) (en valeur algébrique) le sens positif étant donné par la figure ci-contre.

D'où le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} k.(x_A + x_B) = m.g \\ AB = 2.L_0 + x_A - x_B \end{cases}$$

la 1ère équation vient du PFD et la 2ème exprime la longueur totale (AB)

Dont la solution est

$$\boxed{\begin{cases} x_A = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{mg}{k} + AB - 2L_0\right) \\ x_B = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{mg}{k} - AB + 2L_0\right) \end{cases}} \qquad \text{A. N.} \qquad \boxed{\begin{cases} x_A = 0,1\ m \\ x_B = -0,05\ m \end{cases}}$$

2. Soit x la positon du point par rapport à sa position d'équilibre.

$$T_A = -k.(x_A + x) \qquad \text{et} \qquad T_B = -k.(x_B + x)$$

En appliquant le ***Principe Fondamentale de la Dynamique*** on a :

$$\sum \vec{f} = \vec{P} + \vec{T}_A + \vec{T}_B = m.\vec{a}$$

D'où $$mg - k.(x_A + x_B + 2.x) = m.a$$

Or $$mg - k.(x_A + x_B) = 0 \qquad \text{(condition d'équilibre)}$$

On obtient, alors, l'équation différentielle de 2ème ordre :

$$\boxed{a = \ddot{x} = -\frac{2k}{m}x}$$

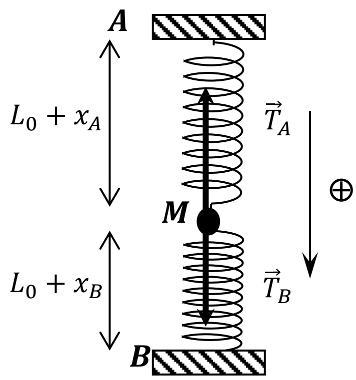


FIG 1.

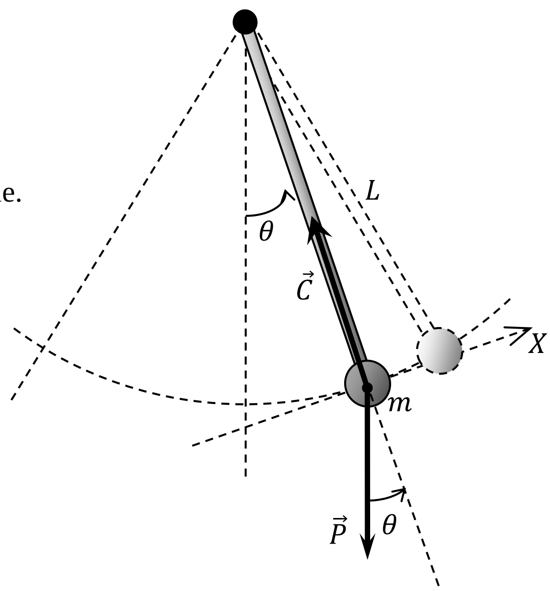
Dont la solution est donnée par un ***mouvement rectiligne sinusoïdal***.

Sa pulsation est $$\boxed{\omega = \sqrt{2k/m}}$$

Et sa période est

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}} \qquad \text{A. N.} \qquad \boxed{T = 0,31\ s}$$

EXERCICE 19 :



1. Principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{f} = \vec{P} + \vec{C} = m.\vec{a}$$

En projetant suivant les axes des accélérations normale et tangentielle.

$$\begin{array}{l} \text{axe} \quad (OX) \\ \text{axe} \quad (OY) \end{array} \begin{cases} -mg.\sin\theta = m.a_T = m.L.\theta^{\bullet\bullet} \\ -mg.\cos\theta + C = m.a_N = m.L.\theta^{\bullet 2} \end{cases}$$

La première équation donne l'équation différentielle du mouvement.

$$\theta^{\bullet\bullet} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

Dans le cas des petits angles $(\theta \ll)$ on a $\sin\theta \approx \theta$ et

$$\boxed{\theta^{\bullet\bullet} = -\frac{g}{L}\theta}$$

2. La solution de l'équation différentielle précédente est de la forme :

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_0.\sin(\omega.t + \varphi) \\ \theta^{\bullet}(t) = \omega.\theta_0.\cos(\omega.t + \varphi) \\ \theta^{\bullet\bullet}(t) = -\omega^2.\theta_0.\sin(\omega.t + \varphi) \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

Période

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

Conditions initiales $(t = 0 \;\;,\;\; \theta(0) = 0)$ position d'équilibre. $(t = 0 \;\;,\;\; \theta^{\bullet}(0) = V_0/L)$.
En remplaçant :

$$0 = \theta_0.\sin(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi = \pi$$

$$\frac{V_0}{L} = \omega.\theta_0.\cos(\varphi) = \sqrt{\frac{g}{L}}.\theta_0.\cos(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = V_0/\omega L = V_0/\sqrt{gL} \\ \varphi = \pi \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = -V_0/\omega L = -V_0/\sqrt{gL} \end{cases}}$$

Les deux cas de figure donnant la même solution

$$\boxed{\theta(t) = \frac{V_0}{\sqrt{gL}}.\sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}.t\right)}$$

D'où

$$\boxed{\theta^{\bullet}(t) = \frac{V_0}{L}.\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}.t\right)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\theta^{\bullet\bullet}(t) = -\sqrt{\frac{g}{L}}\frac{V_0}{L}.\sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}.t\right)}$$

	$\omega.t = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = (2n+1)\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)}$	$\omega.t = n.\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 2n\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)}$
$\theta^{\bullet}(t)$	$\theta^{\bullet}(t) = 0$	$\lvert\theta^{\bullet}(t)\rvert = \theta^{\bullet}_{\max} = V_0/L$
$\theta^{\bullet\bullet}(t)$	$\lvert\theta^{\bullet\bullet}(t)\rvert = \theta^{\bullet\bullet}_{\max} = V_0\sqrt{g}/L\sqrt{L}$	$\theta^{\bullet\bullet}(t) = 0$

3. Théorème du moment cinétique :

$$\vec{M}(\vec{C}) + \vec{M}(\vec{P}) = m.L^2\theta^{\bullet\bullet}.\vec{e}_z$$

Comme on a : $\vec{C} \parallel \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}(\vec{C}) = \vec{r} \times \vec{C} = \vec{0}$
Donc

$$\vec{r} \times \vec{P} = -mg.L.\sin\theta\,.\vec{e}_z = m.L^2\theta^{\bullet\bullet}.\vec{e}_z$$

On retrouve la même équation différentielle

$$\theta^{\bullet\bullet} = -\frac{g}{L}\sin\theta \qquad \text{et pour } (\theta \ll) \text{ on a} \qquad \boxed{\theta^{\bullet\bullet} = -\frac{g}{L}\theta}$$

Application Numérique : $L = 19\,m$; $V_0 = 0{,}5\ m/s$

$$\boxed{\omega = 0{,}719\ \ rad/s} \ ; \ \boxed{T = 8{,}744\ s} \ ; \ \boxed{\theta_0 = 0{,}0366\ rad \approx 2°}$$

$$\boxed{\theta^{\bullet}_{\max} = 0{,}026\ \ rad/s} \ ; \ \boxed{\theta^{\bullet\bullet}_{\max} = 0{,}019\ \ rad/s^2}$$

EXERCICE 21 :

1. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}$

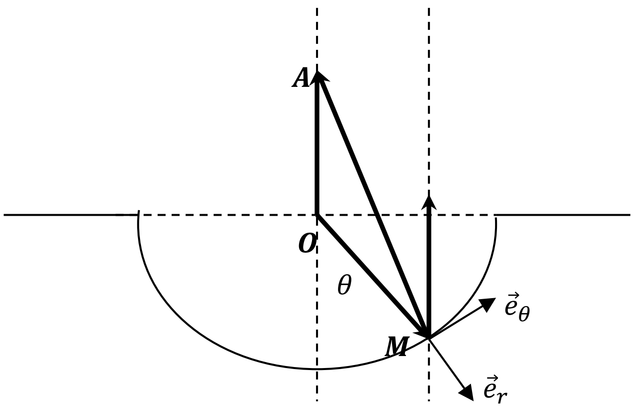
On projette $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ sur les axes $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$: $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = -(r.\cos\theta).\vec{e}_r + (r.\sin\theta).\vec{e}_\theta \\ \overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r \end{cases}$

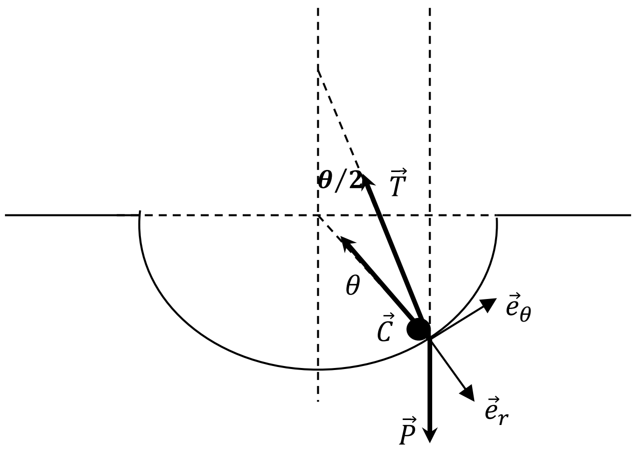
D'où

$$\boxed{\overrightarrow{MA} = -r(1+\cos\theta).\vec{e}_r + r(\sin\theta).\vec{e}_\theta}$$

2. $|\overrightarrow{MA}| = r\sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = r\sqrt{2 + 2.\cos\theta}$
Donc

$$\boxed{|\overrightarrow{MA}| = 2r.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$





3. Calculons d'abord le module de $\vec{T}$.

$$T = k.\Delta l = k.(l - l_0) = k.\left(2r.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - l_0\right) \qquad \text{avec} \qquad l = |\overrightarrow{MA}|$$

Et puisque $\overrightarrow{MA} \parallel \vec{T}$, alors le vecteur unitaire dans la direction de $\vec{T}$.

$$\vec{e}_T = \frac{\vec{T}}{T} = \frac{\overrightarrow{MA}}{MA} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{e}_T = \frac{-r(1+\cos\theta).\vec{e}_r + r(\sin\theta).\vec{e}_\theta}{2r.\cos(\theta/2)}$$

Comme nous avons $1 + \cos(\theta) = 2.\cos^2(\theta/2)$ et $\sin(\theta) = 2.\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$

Alors

$$\boxed{\vec{e}_T = -\cos(\theta/2)\,.\,\vec{e}_r + \sin(\theta/2)\,.\,\vec{e}_\theta}$$

Mais $\vec{e}_T$ est aussi le vecteur unitaire dans la direction de $\vec{T}$ donc :

$$\boxed{\vec{T} = T.\vec{e}_T = k.(2r.\cos(\theta/2) - l_0).[-\cos(\theta/2)\,.\,\vec{e}_r + \sin(\theta/2)\,.\,\vec{e}_\theta]}$$

4. Composantes de $\vec{C}$: $\boxed{\vec{C} = -C.\vec{e}_r + 0.\vec{e}_\theta}$

Composantes de $\vec{P}$: $\boxed{\vec{P} = mg.\cos(\theta)\,.\,\vec{e}_r - mg.\sin(\theta)\,.\,\vec{e}_\theta}$

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{C} + \vec{T} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}\begin{pmatrix} -k.\cos(\theta/2)\,.\,(2r.\cos(\theta/2) - l_0) - C + mg.\cos(\theta) \\ k.\sin(\theta/2)\,.\,(2r.\cos(\theta/2) - l_0) - mg.\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

5. Principe Fondamental de la Dynamique : $\vec{F} = \vec{P} + \vec{C} + \vec{T} = m.\vec{a}$

En coordonnées polaires ($r = R = \text{Constante}$):

$$\vec{a} = \left(r^{\bullet\bullet} - r.\theta^{\bullet 2}\right).\vec{e}_r + (2r^{\bullet}.\theta^{\bullet} + r.\theta^{\bullet\bullet}).\vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \left(-r.\theta^{\bullet 2}\right).\vec{e}_r + (+r.\theta^{\bullet\bullet}).\vec{e}_\theta$$

D'où les deux équations :

$$\begin{cases} -k.\cos(\theta/2)\,.\,(2r.\cos(\theta/2) - l_0) - C + mg.\cos(\theta) = -mr.\theta^{\bullet 2} \\ k.\sin(\theta/2)\,.\,(2r.\cos(\theta/2) - l_0) - mg.\sin(\theta) = mr.\theta^{\bullet\bullet} \end{cases}$$

La deuxième équation est l'équation différentielle du mouvement.

$$\boxed{k.\sin(\theta/2)\,.\,(2r.\cos(\theta/2) - l_0) - mg.\sin(\theta) = mr.\theta^{\bullet\bullet}}$$

6. Le vecteur moment cinétique est donné par :

$$\vec{L}_0 = m.\vec{r} \times \vec{V} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_0 = m.(r.\vec{e}_r) \times (r^{\bullet}.\vec{e}_r + r\theta^{\bullet}.\vec{e}_\theta) = m.r^2\theta^{\bullet}(\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta)$$

Donc

$$\boxed{\vec{L}_0 = m.r^2\theta^{\bullet}.\vec{e}_z = m.r^2\vec{\omega}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\vec{\omega} = \theta^{\bullet}.\vec{e}_z}$$

7. En appliquant le théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = m.r^2\theta^{\bullet\bullet}.\vec{e}_z = \vec{M}(\vec{T}) + \vec{M}(\vec{C}) + \vec{M}(\vec{P})$$

Comme on a : $\vec{C} \parallel \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}(\vec{C}) = \vec{r} \times \vec{C} = \vec{0}$

Donc

$$\vec{r} \times \vec{T} + \vec{r} \times \vec{P} = m.r^2\theta^{\bullet\bullet}.\vec{e}_z$$

$$\begin{cases} \vec{r} \times \vec{P} = -mg.r.\sin\theta\,.\,\vec{e}_z \\ \vec{r} \times \vec{T} = T.r.\sin\alpha\,.\,\vec{e}_z \end{cases} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\theta}{2}$$

Finalement

$$\boxed{[k.\sin(\theta/2)\,.\,(2r.\cos(\theta/2) - l_0) - mg.\sin(\theta)].\vec{e}_z = [mr.\theta^{\bullet\bullet}].\vec{e}_z}$$