

## CHAPITRE 5 les lignes d'influence

### 1. Introduction

Dans les ouvrages en génie civil, les charges d'exploitation sont connues en valeurs, mais peuvent changer de positions. Cela entrainera dans une section choisie de l'ouvrage, des efforts et des déformations variables qui dépendent directement de la position de la charge d'exploitation. La représentation graphique de cette fonction est appelée ligne d'influence. Son grand intérêt est de fournir les effets extrêmes (maximaux et minimaux) dans une section donnée de la structure, sous des charges d'exploitation d'étendue variable comme c'est le cas des portiques de bâtiments et des tabliers ou appuis de ponts.

### 2. Pourquoi les lignes d'influence ?

Soit une poutre AB soumise à un chargement mobile  $P_i$ , soit S une section choisie de cette poutre d'abscisse fixe  $x_s$ . L'effet élastique dans la section S est soit les efforts (M, N, T), soit les déformations ( $\delta, \theta, \epsilon, \dots$ ). Cet effet E varie en fonction de la position du chargement  $P_i$ . On pourra ainsi connaître les effets  $E_{max}$  et  $E_{min}$  dans la section S, d'où l'intérêt de la méthode.

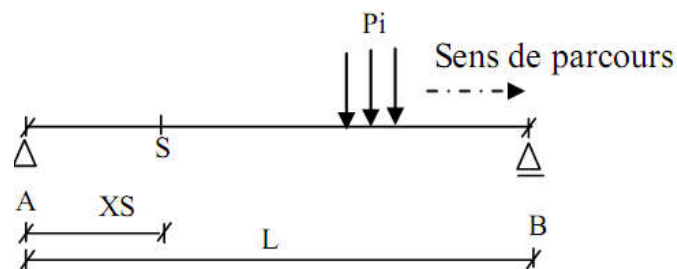


Fig. 1 Variation de l'effet élastique E en fonction de la position  $P_i$ .

La figure 2 représente un portique type d'un bâtiment scolaire qui abrite 2 classes pour chaque niveau. Les travées (1) et (3) reçoivent les charges des classes  $q_c$  tandis que la travée intermédiaire n°2 supporte les charges d'escalier  $q_e$ .

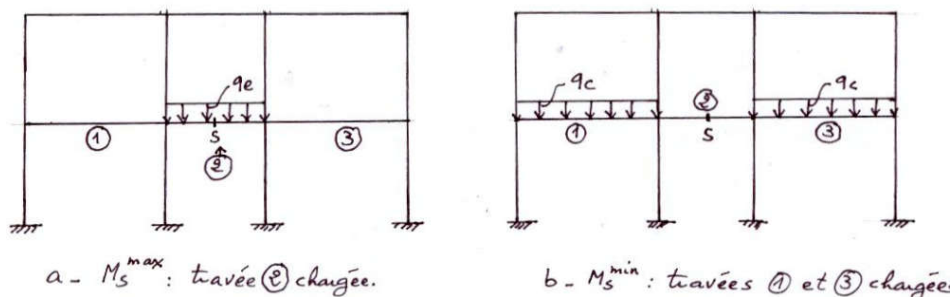


Fig. 2 Dispositions de charges dans un portique de bâtiment pour calculer  $M^{\wedge}$  et  $M^{TMn}$ .

Le moment fléchissant maximal au milieu S de la travée (2) est obtenu en chargeant seulement cette même travée (fig. 2-a), tandis que le moment minimal dans la même section est déterminé en chargeant les travées (1) et (3) (fig. 2-b).

Pour calculer les réactions maximale et minimale de l'appui A d'un pont isostatique, la charge roulante  $q_r$  est disposée selon la figure 3.

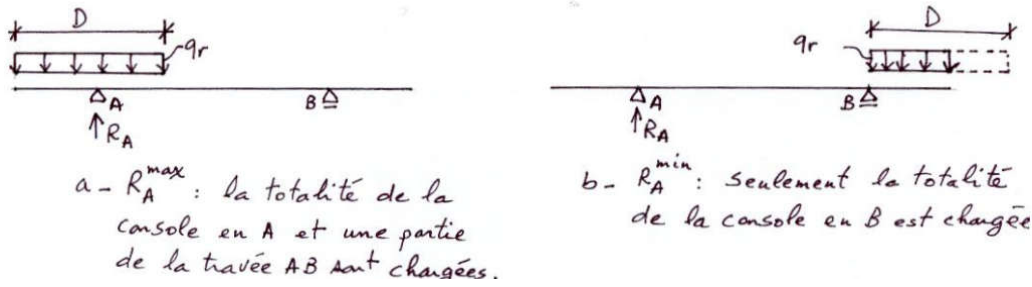


Fig. 3 Réactions extrêmes  $R_A^{\max}$   $R_A^{\min}$  d'un pont isostatique.

La disposition des charges dans les exemples des figures 2 et 3 est justifiée par le traçage des lignes d'influence qui seront traitées dans le paragraphe qui va suivre.

### 3. Qu'est-ce que c'est la ligne d'influence ?

Revenons à l'exemple de la figure 1, si on remplace le chargement mobile  $P_i$  par une force unitaire  $P=1$  d'abscisse  $x$  variable, l'effet élastique  $E$  dans la section  $S$  variera donc en fonction de  $x$ .

$$ES = f(x) \quad (1)$$

$f(x)$  est appelée fonction d'influence, le tracé de  $f(x)$  est appelé ligne d'influence.

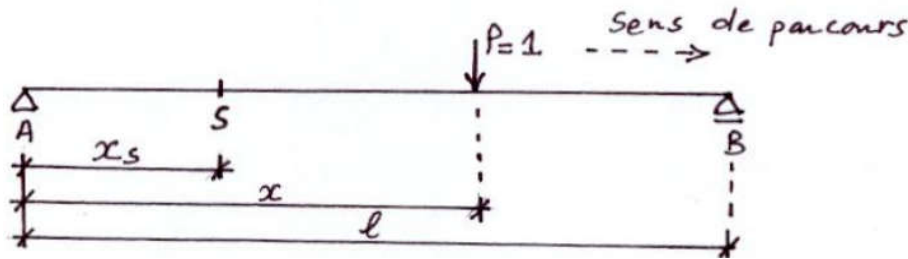


Fig. 4 Eléments de base d'une fonction d'influence  $E_s = f(x)$ .

#### Exemple

La ligne d'influence de l'effort tranchant en  $S$  est donnée sans démonstration par la figure 5, ce tracé est obtenu en faisant déplacer la force unitaire de A vers B.

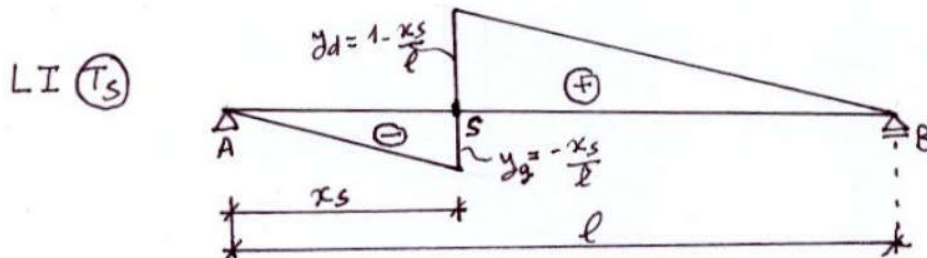


Fig. 5 Ligne d'influence de l'effort tranchant  $T_s$ .

L'effort tranchant max ou min est obtenu en chargeant la ligne d'influence de  $T_s$  par les charges  $P_i$ . D'après la figure 6, on a

$$T_s^{\max} = \sum_{i=1}^n P_i y_i \quad (3)$$

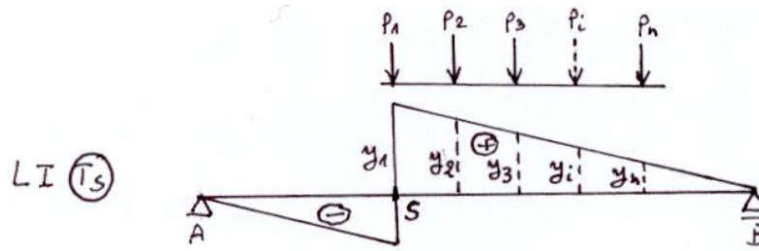


Fig. 6 Calcul de T 1=1

**4. Comment calculer l'effet élastique ?**

L'effet élastique  $E_s$  est obtenu en chargeant la ligne d'influence  $f(x)$  par les forces mobiles  $P_i$ .

**Cas 1 : Charges concentrées.**

$$E_s = \sum_{i=1}^n P_i y_i$$

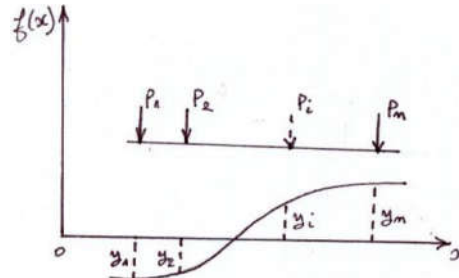


Fig. 7 L'effet élastique du aux charges concentrées  $P_i$ .

**Cas 2 : Charge uniformément répartie.**

$$E_s = q(\Omega^+ + \Omega^-) \tag{5}$$

Où  $q$  est la valeur de la charge uniforme.

$\Omega^+$  et  $\Omega^-$  sont respectivement les aires positive et négative délimitées par la ligne d'influence  $f(x)$  et l'axe des  $x$ , sur la longueur d'étendue de la charge  $q$ . Les aires  $\Omega^+ + \Omega^-$  et  $\Omega^+ - \Omega^-$  sont prises avec leurs signes.

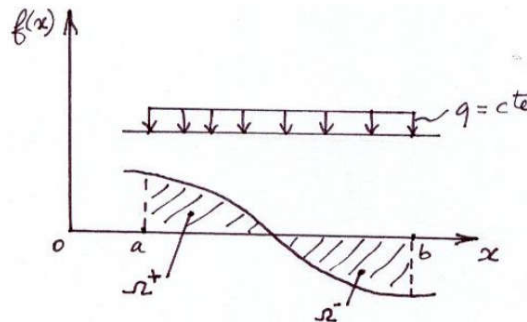


Fig. 8 L'effet élastique du a une charge uniformément répartie  $q$ .

Cas 3 : Charge répartie quelconque.

$$E_s = \int_a^b q(x) \cdot y \cdot dx \quad (6)$$

Où  $q(x)$  est la charge répartie qui dépend de l'abscisse  $x$ .

L'ordonnée  $y$  est la fonction d'influence.

$$y = f(x) \quad (7)$$

$a$  et  $b$  sont les bornes qui délimitent la zone d'application de la charge  $q(x)$ .

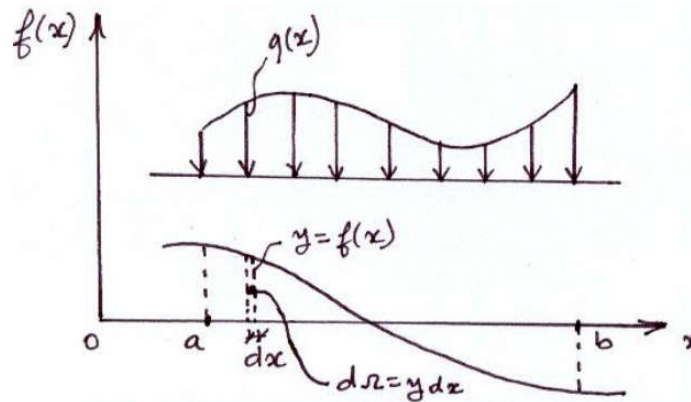


Fig. 9 L'effet élastique d'une charge répartie  $q$ .

## 5. Les lignes d'influence dans une poutre isostatique

### 5.1 Les réactions d'appuis

#### 5.1.1 La réaction $R_A$

Pour définir la fonction d'influence de la réaction  $R_A$  d'une poutre isostatique (fig. 10), on fait déplacer la charge unitaire  $P = 1$ . La section étudiée  $S$  se situe toujours en  $A$ .

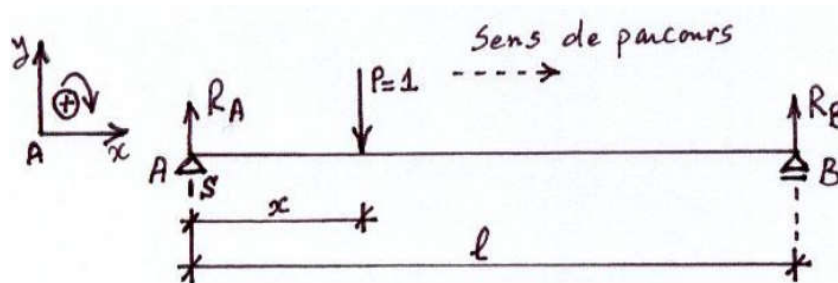


Fig. 10 Schéma statique d'une poutre à une seule travée.

D'après la figure 10, on a  $\sum M'_{/B} = 0 \Rightarrow R_A \cdot l - 1 \cdot (l - x) = 0$

D'où la fonction d'influence  $R_A = \frac{l-x}{l} \quad (8)$

Ou bien  $R_A = 1 - \frac{x}{l}$  (9)

$x = 0 \Rightarrow R_A = 1$

$x = l \Rightarrow R_A = 0$

Le traçage de cette fonction d'influence donnera la ligne d'influence de  $R_A$  (fig. 11).

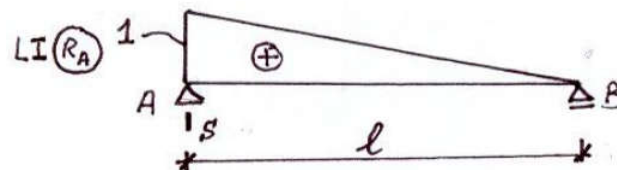


Fig. 11 Ligne d'influence de  $R_A$ .

### 5.1.2 La réaction $R_B$

En utilisant la figure 10, on a  $\sum M'_{/A} = 0 \Rightarrow 1 \cdot x - R_B \cdot l = 0$

D'où la fonction d'influence  $R_B = \frac{x}{l}$  (10)

$x = 0 \Rightarrow R_B = 0$

$x = l \Rightarrow R_B = 1$

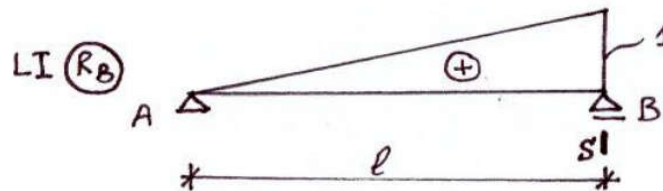
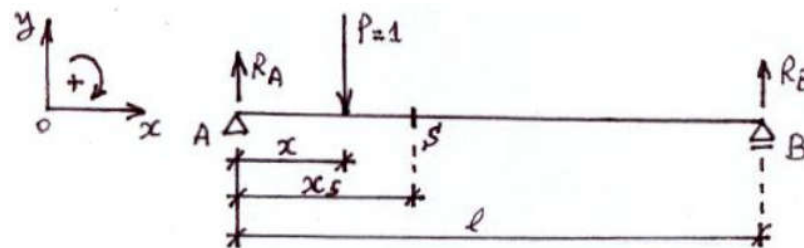


Fig. 12 Ligne d'influence de  $R_B$ .

## 5.2 L'effort tranchant

1- 1<sup>er</sup> cas :  $x \leq x_s$

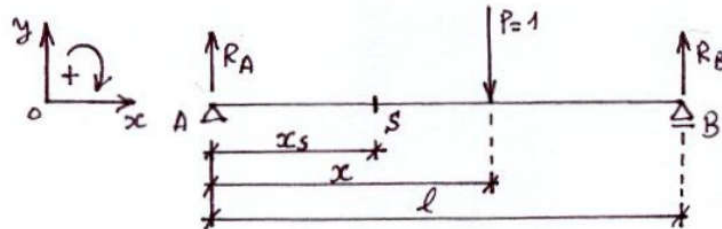


$T_s = -\frac{x}{l}$  (11)

$$x = 0 \Rightarrow T_s = 0$$

$$x = x_s \Rightarrow T_s = -\frac{x_s}{l}$$

2° cas :  $x_s \leq x \leq l$



$$T_s = R_A$$

$$T_s = 1 - \frac{x}{l} \quad (12)$$

$$x = x_s \Rightarrow T_s = 1 - \frac{x_s}{l}$$

$$x = l \Rightarrow T_s = 0$$

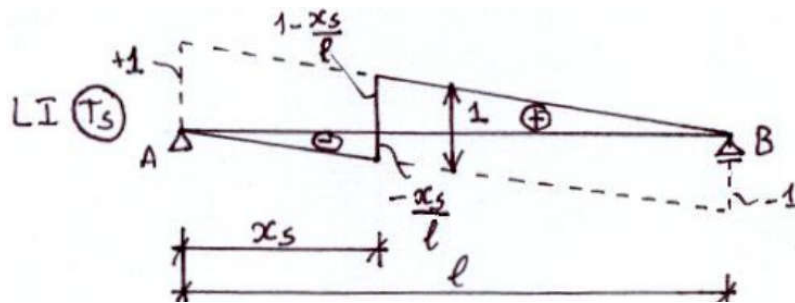
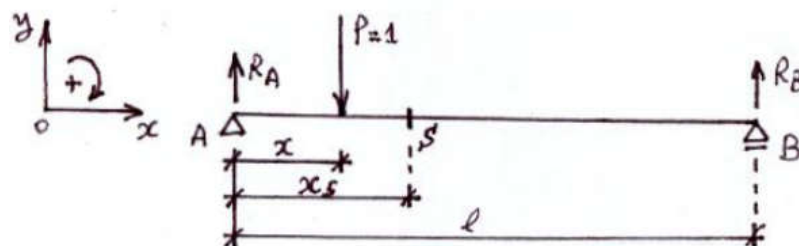


Fig 14. La ligne d'influence de l'effort tranchant T dans la section S

### 5.3 Le moment fléchissant

#### 5.3.1 Le moment fléchissant dans une section S

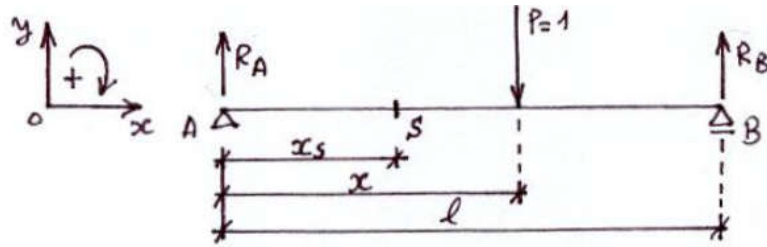
1- 1<sup>er</sup> cas :  $x \leq x_s$



$$M_s = R_A \cdot x_s - 1 \cdot (x_s - x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot x_s - 1 \cdot (x_s - x)$$

$$\text{Soit } M_s = x \cdot \left(1 - \frac{x_s}{l}\right) \quad (13)$$

2<sup>e</sup> cas :  $x_s \leq x \leq l$



$$M_s = R_A \cdot x_s = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot x_s$$

$$x = x_s \Rightarrow M_s = x_s = \left(1 - \frac{x_s}{l}\right) \cdot x_s$$

$$x = l \Rightarrow M_s = 0$$

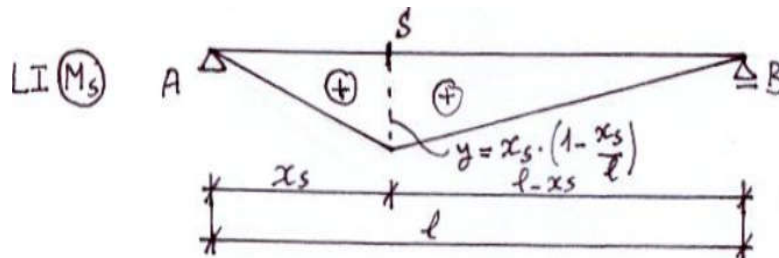


Fig. 15 La ligne d'influence du moment fléchissant M dans la section S.

### 5.3.2 Le moment fléchissant maximal dans une section S

#### a) Charges concentrées

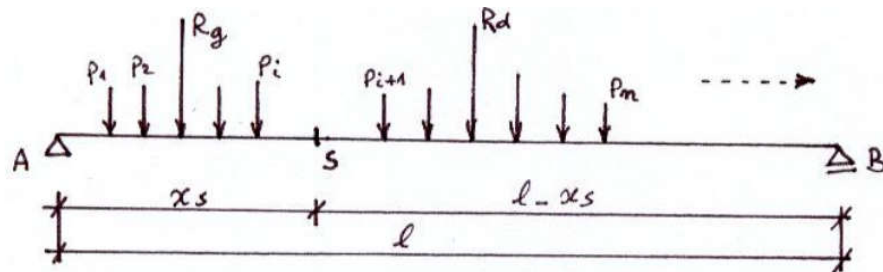
La poutre de la figure 16 est sollicitée par le passage d'un convoi composé de n charges concentrées  $P_i$ . La résultante de ces forces est

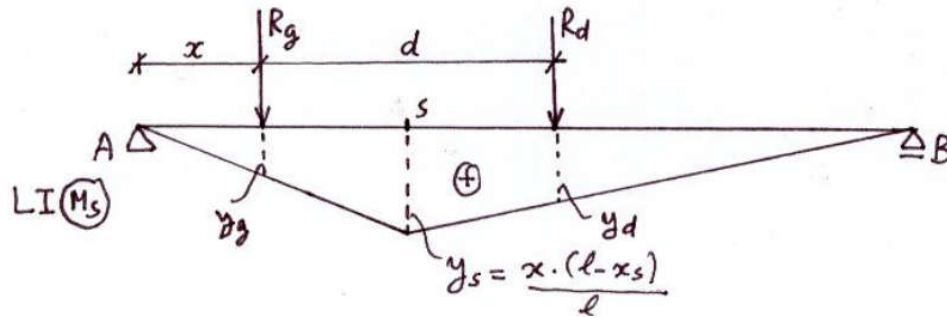
$$R = \sum_{i=1}^n P_i \tag{14}$$

Cette résultante peut s'écrire sous la forme

$$R = R_g + R_d \tag{15}$$

Où  $R_g$  et  $R_d$  sont respectivement les résultantes des forces se trouvant à gauche et à droite de la section S.




 Fig. 16 Décomposition des forces  $P_i$  en résultantes  $R_g$  et  $R_d$ .

En déplaçant le convoi, l'abscisse  $x$  de  $R_g$  est supposée varier. Le moment fléchissant dans la section  $S$  s'écrit

$$M_s = \sum_{i=1}^n P_i y_i \quad (16)$$

Où bien  $M_s = R_g \cdot y_g + R_d \cdot y_d \quad (17)$

D'après la figure 16, on a

$$\begin{cases} y_g = y_s \times \frac{x}{x_s} \\ y_d = y_s \times \frac{(l-d-x)}{(l-x_s)} \end{cases} \quad (18)$$

En remplaçant les valeurs de  $y_g$  et  $y_d$  dans l'équation 17, on obtient

$$M_s = R_g \cdot y_s \cdot \frac{x}{x_s} + R_d \cdot y_s \cdot \frac{(l-d-x)}{(l-x_s)} \quad (19)$$

Pour que le moment fléchissant en  $S$  soit maximal, il faut que sa dérivée par rapport à  $x$  soit nulle.

$$M_s^{\max} \Rightarrow \frac{dM_s}{dx}$$

$$\frac{dM_s}{dx} = R_g \cdot \frac{y_s}{x_s} - R_d \cdot \frac{y_s}{(l-x_s)} = 0 \Rightarrow y_s \left( \frac{R_g}{x_s} - \frac{R_d}{(l-x_s)} \right) = 0$$

$$\text{D'où } \frac{R_g}{x_s} = \frac{R_d}{(l-x_s)} = \frac{R_g + R_d}{x_s + l - x_s} = \frac{R}{l} \quad (20)$$

L'équation 20 peut donc s'écrire sous la forme  $\frac{R_g}{x_s} = \frac{R}{l} \quad (21)$

Si l'équation 20 ou 21 est satisfaite, le moment fléchissant en  $S$  est maximal. Mais puisqu'il s'agit de forces concentrées  $P_i$ , la dérivée  $dM_s/dx$  ne va pas s'annuler obligatoirement. Le problème sera résolu par les approximations successives, cette méthode va tester le signe de la dérivée  $dM_s/dx$ .



Dans le cas où il y a un changement de signes de cette dérivée cela veut dire que le moment fléchissant  $M_s$  est maximal.

pour un essieu  $P_k$  situé en S, supposons que l'on a

$$\frac{R_{g1}}{x_s} \geq \frac{R}{l} \quad (22)$$

Où  $R_{g1}$  est la résultante des forces se trouvant à gauche de S y compris la force  $P_k$ .

$$R_{g1} = \sum_{i=1}^k P_i \quad (23)$$

La relation 22 peut aussi s'écrire sous la forme

$$R_{g1} \geq \frac{R \cdot x_s}{l} \quad (24)$$

D'après la relation 22, la dérivée  $dM_s/dx$  est positive.

En déplaçant le convoi vers la gauche d'une valeur infinitésimale  $dx$ , la charge  $P_k$  ne fait plus partie de  $R_g$  (fig. 17-b), on aura donc

$$R_{g2} = \sum_{i=1}^{k-1} P_i \quad (25)$$

Si l'on a  $\frac{R_{g2}}{x_s} < \frac{R}{l}$  (26)

La relation 26 peut s'écrire sous la forme  $R_{g2} < \frac{R \cdot x_s}{l}$  (27)

La dérivée  $dM_s/dx$  est donc négative. Cette dérivée à changer de signe en déplaçant  $P_k$  de part et d'autre de S, le moment fléchissant  $M_s$  est donc maximal si la force  $P_k$  est au droit de S.

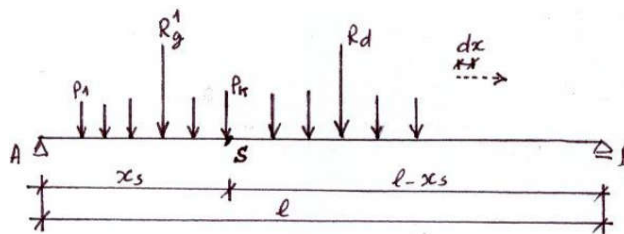


Fig. 17 Déplacement de la charge  $P_k$  au niveau de la section S.

En pratique, pour déterminer  $M_s^{\max}$ , on fait varier  $i$  de 1 jusqu'à  $n$ , pour chaque valeur de  $i$  on procède de la manière suivante :

1. Placer la charge  $P_i$  en S, et calculer la valeur  $\frac{R \cdot x_s}{l}$
2. Calculer les 2 valeurs :  $R_{g1}$  en tenant compte de la charge  $P_i$  et  $R_{g2}$  en omettant la charge  $P_i$ .
3. Vérifier les 2 conditions :

$$\begin{cases} R_{g1} \geq \frac{R \cdot x_s}{l} \\ R_{g2} < \frac{R \cdot x_s}{l} \end{cases} \quad (28)$$

4. Si la condition 3 est vérifiée, le moment fléchissant en S est maximal si la charge  $P_i$  est au droit de S.

$$M_s^{\max} = \sum P_i y_i \quad (29)$$

Sinon, on déplace le convoi en mettant la charge  $P_{i-1}$  au droit de S, on refait ensuite la procédure de 1 à 4 jusqu'à ce que l'on ait  $M_s^{\max}$

**b) Charge uniformément répartie**

La charge constante  $q$  est répartie sur une longueur  $D$  inférieure à la portée  $L$  de la poutre. On suppose que l'emplacement de la figure 20 nous donne un moment fléchissant maximal en S. D'après l'équation 20, on a

$$M_s^{\max} \Rightarrow \frac{R_g}{x_s} = \frac{R_d}{(l - x_s)} \quad (31)$$

$R_g$  est la résultante de la charge se trouvant à gauche de S et qui s'étend sur une longueur  $L_g$  inférieure à  $D$ .

$$L_g \Rightarrow \alpha \cdot D \quad (32)$$

Où  $\alpha$  est un coefficient de proportion de  $L_g$  par rapport à  $D$ . Il vient

$$0 < \alpha < 1 \quad (33) \quad \text{Donc}$$

$$R_g = \alpha \cdot D \cdot q \quad (34)$$

De même  $R_d$  est la résultante de la charge se trouvant à droite de S sur une longueur

$$L_d = (1 - \alpha) \cdot D \quad (35)$$

$$\text{D'où } R_d = (1 - \alpha) \cdot D \cdot q \quad (35)$$

Pour résoudre le problème il suffit de calculer le coefficient  $\alpha$ . En remplaçant les valeurs de  $R_g$  et  $R_d$  dans l'équation 31, on obtient

$$\frac{\alpha \cdot D \cdot q}{x_s} = \frac{(1 - \alpha) \cdot D \cdot q}{(l - x_s)}$$

$$\text{D'où après simplification} \quad \frac{\alpha}{x_s} = \frac{(1 - \alpha)}{(l - x_s)} \quad (37)$$

$$\text{En développant la relation 37, il vient} \quad \alpha = \frac{x_s}{l} \quad (38)$$

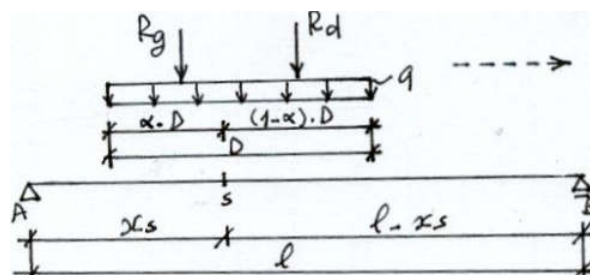


Fig. 20 Poutre soumise à une charge uniformément répartie.

### 5.3.3 Les courbes enveloppes

En chaque point de la poutre, il est possible de calculer T et M extrêmes (min et max) dus à un convoi quelconque constitué de charges localisées dont les distances partielles entre elles sont supposées constantes. L'ensemble de ces points est appelé courbe enveloppe.

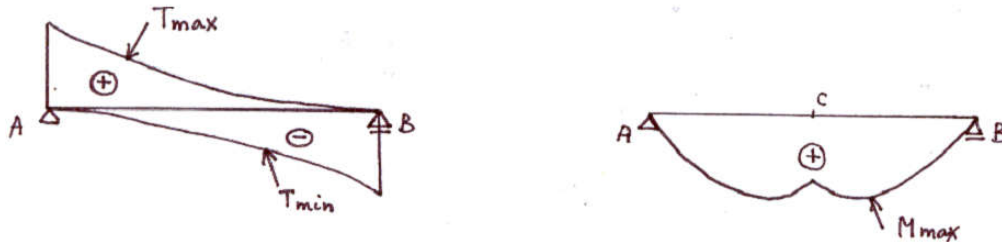


Fig. 21 Courbes enveloppes T et M dans une poutre a une seule travée dus au déplacement d'un convoi quelconque de charges localisées.

D'après la figure 21, on constate que le moment fléchissant maximal dans une poutre n'est pas obligatoirement obtenu au milieu c de la poutre mais dans une section s critique proche de c.

### 5.3.4 Le moment fléchissant maximal dans une poutre

Pour un convoi donné, le problème qui se pose est de connaître la position exacte de la section où se produit le moment fléchissant maximal, on l'appelle section critique. Cet effet se produit lorsque le milieu c se situe entre la résultante R des charges se trouvant sur la travée et l'essieu P<sub>i</sub> le plus rapproché de R. La section critique se trouve au droit de cet essieu. Pour démontrer ce fait, on utilise la figure 22 où d<sub>i</sub> est la distance entre l'essieu P<sub>i</sub> et la résultantes R, δ est la distance entre la résultante R et le milieu c de la poutre.

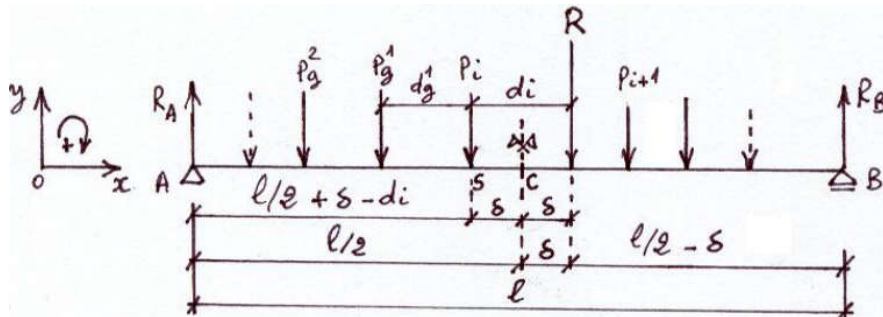


Fig. 22 Section critique S d'un convoi quelconque.

$$\sum M'_{/B} = 0 \Rightarrow R_A l - R \left( \frac{l}{2} - \delta \right) = 0$$

$$\text{D'où } R_A = R \left( \frac{1}{2} - \frac{\delta}{l} \right) = 0 \tag{39}$$

Le moment fléchissant au droit de P<sub>i</sub>

$$M_i = R_A \left( \frac{l}{2} + \delta - d_i \right) - \sum P_g d_g$$

En remplaçant la valeur de  $R_A$  dans l'équation de  $M_i$ , il vient

$$M_i = R \left( \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} + \delta - d_i \right) - \sum P_g d_g \quad (40)$$

Dans l'expression 40 seul  $\delta$  est variable.

$$M_i^{\max} \Rightarrow \frac{dM_i}{d\delta} = 0$$

$$\frac{dM_i}{d\delta} = -\frac{R}{l} \cdot \left( \frac{l}{2} + \delta - d_i \right) + R \cdot \left( \frac{l}{2} + \frac{\delta}{l} \right)$$

D'où

$$\delta = \frac{d_i}{2} \quad (41)$$

En remplaçant la valeur de  $\delta$  dans l'équation 40, on obtient

$$M_i = \frac{Rl}{4} \left( 1 - \frac{d_i}{2} \right)^2 - \sum P_g d_g \quad (42)$$

L'essieu  $P_i$  et la résultante  $R$  sont donc symétriques par rapport au milieu  $c$  de la poutre, cela confirme ce qui a été énoncé précédemment et se traduit par le théorème suivant :

**Théorème de Barrés :** Le moment fléchissant est maximal au droit d'un essieu lorsque cet essieu et la résultante générale du convoi occupent des positions symétriques par rapport au milieu de la poutre.

## 6. Les lignes d'influence dans une poutre continuée

En déplaçant la charge unitaire le long de la poutre, on peut déterminer la réaction  $R$  ou l'effort tranchant  $T$  ou le moment fléchissant  $M$  dans une section  $S$  choisie dans la poutre. Pour cela, il suffit de calculer les moments fléchissant aux appuis intermédiaires en fonction de l'abscisse  $x$  de la charge unitaire. La méthode la plus adéquate est celle des 3 moments.

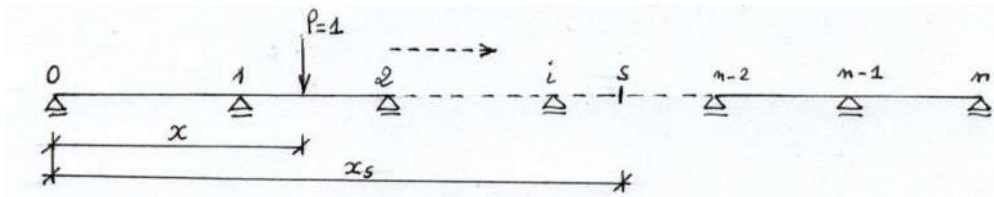


Fig. 39 Poutre continue soumise a une charge mobile  $P = 1$ .

### 6.1 L'équation des 3 moments

La poutre continue de la figure 40 contient  $n$  travées et  $(n-1)$  appuis intermédiaires, chacun de ces appuis a un moment fléchissant inconnu, le système est donc  $(n-1)$  fois hyperstatique.

Pour calculer ces (n-1) inconnues  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ , on utilise la méthode des 3 moments ou de Clapeyron, elle s'écrit dans sa forme générale pour l'appui i.

$$b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) M_i + b_{i+1} M_{i+1} = \theta'_{i+1} - \theta''_i \quad (55)$$

Où  $\theta'_{i+1}$  : Rotation de l'appui gauche de la travée (i+1) supposée isostatique.

$\theta''_i$  : Rotation de l'appui droit de la travée (i) supposée isostatique.

Les rotations sont supposées positives dans le sens antihoraire. Le tableau 1 donne quelques valeurs de rotations les plus courantes.

$a_i, b_i, c_i$  sont les coefficients de souplesse de la travée (i). Si cette travée garde une section constante, on aura

$$\begin{cases} a_i = c_i = \frac{l_i}{3EI_i} \\ b_i = \frac{l_i}{6EI_i} \end{cases} \quad (56)$$

- $l_i$  : Longueur de la travée (i).
- $E$  : Module de déformation longitudinale du matériau utilisé.
- $I_i$  : Moment d'inertie en section de la travée (i).

Dans une poutre de section variable, le moment d'inertie de la travée i dépend de l'abscisse x de la section considérée, il sera noté  $I_i(x)$ . Les 3 constantes  $a_i, b_i, c_i$  se retrouvent à partir des intégrales suivantes :

$$\begin{cases} a_i = \int_0^{l_i} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right)^2 \frac{dx}{EI_i(x)} \\ b_i = \int_0^{l_i} \frac{x}{l_i} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) \frac{dx}{EI_i(x)} \\ c_i = \int_0^{l_i} \left(\frac{x}{l_i}\right)^2 \frac{dx}{EI_i(x)} \end{cases}$$

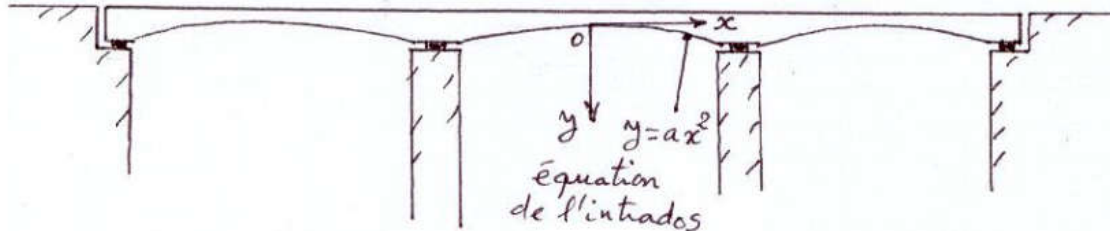


Fig. 39' Exemple d'une poutre continue a section variable.

Si la quantité EI est constante le long de la poutre continue, l'équation 55 devient

$$l_i M_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1}) M_i + l_{i+1} M_{i+1} = 6EI(\theta'_{i+1} - \theta''_i) \quad (57)$$

L'équation 57 peut s'écrire pour chaque nœud intermédiaire. On dispose donc de (n-1) équations, sachant que le nombre d'inconnues ( $M_i$ ) est (n-1). Le système admet donc une solution.

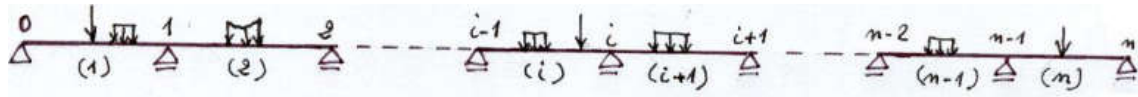


Fig. 40 Schema statique d'une poutre continue a n travées.

| Charges | Rotations   |
|---------|---|
|         | $\theta' = \theta_A = -\frac{ql^3}{24EI}$ $\theta'' = \theta_B = \frac{ql^3}{24EI}$                 |
|         | $\theta' = \theta_A = -\frac{Pa(l-a)(2l-a)}{6EIl}$ $\theta'' = \theta_B = \frac{Pa(l^2-a^2)}{6EIl}$ |
|         | $\theta' = \theta_A = -\frac{Pa(l-a)}{2EI}$ $\theta'' = \theta_B = \frac{Pa(l-a)}{2EI}$             |

Tab.1 Quelques valeurs de rotations les plus connues.

## 6.2 La réaction d'appui

Pour un appui donne, la réaction  $R_i$  est la somme de 2 réactions :

1. Réaction due à la continuité de la poutre, elle est notée  $R_i^c$ , elle dépend des moments fléchissant  $M_i$  se trouvant aux appuis intermédiaires. On a

$$R_i^c = R_{ig}^c + R_{id}^c \quad (58)$$

Ou  $R_{ig}^c$  et  $R_{id}^c$  sont respectivement les réactions gauche et droite dues à la continuité de la poutre (fig. 41). En utilisant les relations d'équilibre des moments, on obtient

$$\begin{cases} R_{ig}^c = \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i} \\ R_{id}^c = \frac{M_{i+1} - M_i}{l_{i+1}} \end{cases} \quad (59)$$

La réaction  $R_i^c$  due à la continuité aura la forme

$$R_i^c = \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i} + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_{i+1}} \quad (60)$$

2. Réaction  $r_i$  due aux charges extérieures en supposant que toutes les travées sont indépendantes (système isostatiques)

$$r_i = r_{ig} + r_{id}$$

$r_{ig}$  et  $r_{id}$  sont les réactions gauche et droite dues aux charges extérieures en supposant que les travées de la poutre sont indépendantes.

La réaction totale  $R_i$  est donnée par l'expression.

$$R_i = R_i^c + r_i \quad (61)$$

En remplaçant la valeur de RC dans cette expression, il vient

$$R_i = \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i} + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_{i+1}} + r_i \quad (62)$$

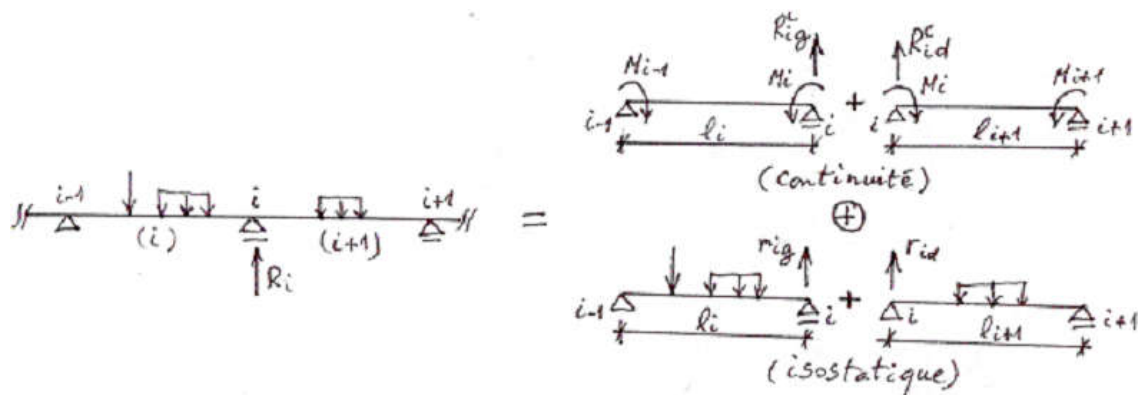


Fig. 41 Schema des reactions de l'appui i.

### 6.3 Le moment fléchissant dans une section en travée

Le moment fléchissant dans une section de la travée  $(i-1, i)$  se décompose en 2 parties :

1- Moment fléchissant  $M^c(x)$  du a la continuité de la poutre, il dépend des moments  $M_{i-1}$  et  $M_i$  aux appuis. D'après la figure 42, on a

$$M^c(x) = M_{(i-1)d}^c \cdot x + M_{i-1} \quad (63)$$

En remplaçant l'expression de  $M_{(i-1)d}^c$  dans la relation 63, on obtiendra

$$M^c(x) = \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} \cdot x + M_{i-1} \quad (64)$$

Ou bien

$$M^c(x) = M_{i-1} \cdot \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) + \frac{M_i}{l_i} \cdot x \quad (65)$$

2- Moment fléchissant isostatique  $m(x)$  du aux charges extérieures, en supposant que la travée  $i$  est indépendante.

Le moment fléchissant total sera donc

$$M(x) = M^c(x) + m(x) \quad (66)$$

En remplaçant la valeur de  $M^c(x)$  dans cette relation, il vient

$$M(x) = M_{i-1} \cdot \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) + \frac{M_i}{l_i} \cdot x + m(x) \quad (67)$$

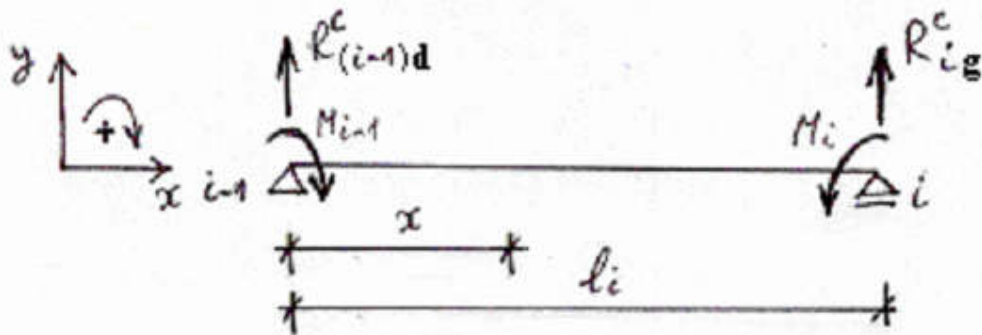


Fig. 42 Efforts dus à la continuité de la poutre dans la travée i.

#### 6.4 L'effort tranchant dans une section en travée

$$T(x) = \frac{dM(x)}{dx} \quad (68)$$

$$T(x) = \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} + t(x) \quad (69)$$

Où  $t(x)$  est l'effort tranchant isostatique dû aux charges extérieures.

## 7. Les lignes d'influence dans une poutre en treillis isostatique

### 7.1 Généralité

#### a) Treillis extérieurement isostatique

Les réactions d'appuis sont calculées en utilisant seulement les équations de la statique. Dans l'exemple de la figure 47, on a 3 inconnues  $V_A$ ,  $H_A$  et  $V_B$ , mais le système est isostatique puisqu'on dispose des 3 équations

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M' / po\ int = 0 \end{cases} \quad (70)$$



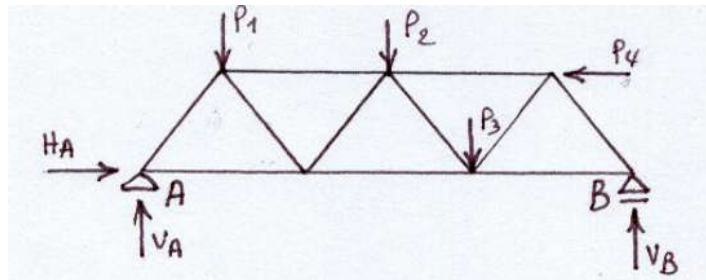


Fig. 47 Treillis extérieurement isostatique.

**b) Treillis intérieurement isostatique**

Ce système vérifie la relation

$$b = 2n - 3 \quad (71)$$

Où  $b$  est le nombre de barres.  
 $n$  est le nombre de nœuds.

Dans l'exemple de la figure 47, on a :  $b = 11$  et  $n = 7$ , on a bien  $11 = 2 \times 7 - 3$

Le système est donc intérieurement isostatique. Dans le cas contraire, on peut avoir

Système instable :  $b < 2n - 3$

Système hyperstatique :  $b > 2n - 3$

Le système de la figure 48 est instable (mécanisme),  $b = 4$ ,  $n = 4$ .

$$b = 4 < 2n - 3 = 5$$

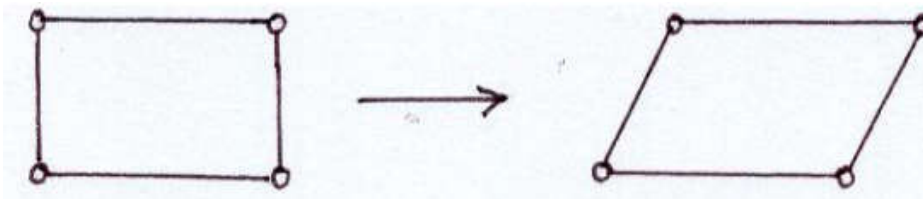


Fig. 48 Mécanisme d'un cadre articulé en ses 4 sommets.

Le système de la figure 49 est extérieurement isostatique, mais intérieurement, il est hyperstatique.

$$b = 11 > 2n - 3 = 9$$

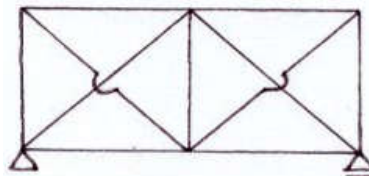


Fig. 49 Système extérieurement isostatique et intérieurement hyperstatique.

La figure 50 montre un système intérieurement isostatique mais extérieurement hyperstatique.

$$b = 15 = 2n - 3 = 15$$

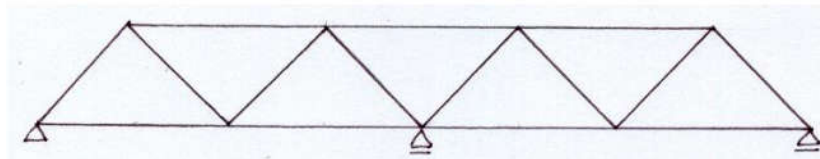


Fig. 50 Systeme exterieurement hyperstatique et interieurement isostatique.

### 7.2 Calcul des efforts

Dans les ponts à poutres en treillis, les charges sont transmises de l'hourdis vers les traverses qui reposent directement sur les nœuds du treillis. Dans l'exemple de la figure 51, les charges sont transmises de l'hourdis vers les traverses ensuite vers les nœuds A, B, C, D et E. A titre d'exemple, la charge  $P_3$  est transmise aux nœuds C et D sous forme de réactions  $r_1$  et  $r_2$  (fig. 52).

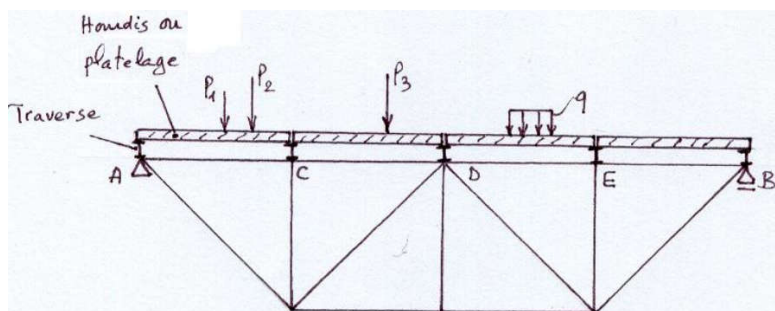


Fig. 51 Transmission des charges vers les nœuds d'une poutre en treillis.

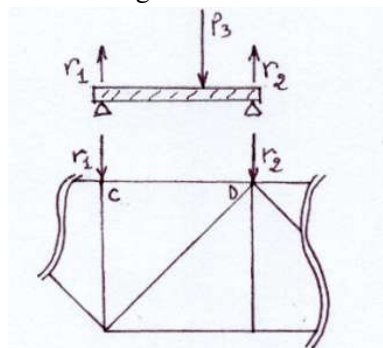


Fig. 52 Les charges sont transmises aux nœuds du treillis sous forme de réactions.

### 7.3 Lignes d'influence

Dans une section S donnée appartenant à une poutre en treillis, on se propose de calculer les efforts normaux extrêmes dus au passage d'un convoi quelconque. Pour cela on doit charger la poutre par une force unitaire mobile ; d'abscisse  $x$  variable, on obtiendra ainsi la ligne d'influence qu'on chargera par la suite par notre convoi réel pour aboutir à l'effort recherché. La ligne d'influence est souvent tracée en utilisant la méthode des sections.

## 9 CONCLUSION

Dans les ponts on a affaire a des charges mobiles. Pour une section donnee les efforts et les deformations vont changer en fonction de la position de la charge. Le souci majeur est de definir les efforts ou déplacements extremes de cette section, d'ou l'utilite de la ligne d'influence qui joue un role principal dans l'etude de n'importe quelle section de l'ouvrage.