

CHAPITRE 2 Les lignes d'influence

1. Introduction

Dans les ouvrages en génie civil, les charges d'exploitation sont connues en valeurs, mais peuvent changer de positions. Cela entrainera dans une section choisie de l'ouvrage, des efforts et des déformations variables qui dépendent directement de la position de la charge d'exploitation. La représentation graphique de cette fonction est appelée ligne d'influence. Son grand intérêt est de fournir les effets extrêmes (maximaux et minimaux) dans une section donnée de la structure, sous des charges d'exploitation d'étendue variable comme c'est le cas des portiques de bâtiments et des tabliers ou appuis de ponts.

2. Pourquoi les lignes d'influence ?

Soit une poutre AB soumise à un chargement mobile P_i , soit S une section choisie de cette poutre d'abscisse fixe x_s . L'effet élastique dans la section S est soit les efforts (M, N, T), soit les déformations ($\delta, \theta, \epsilon, \dots$). Cet effet E varie en fonction de la position du chargement P_i . On pourra ainsi connaître les effets E_{max} et E_{min} dans la section S, d'où l'intérêt de la méthode.

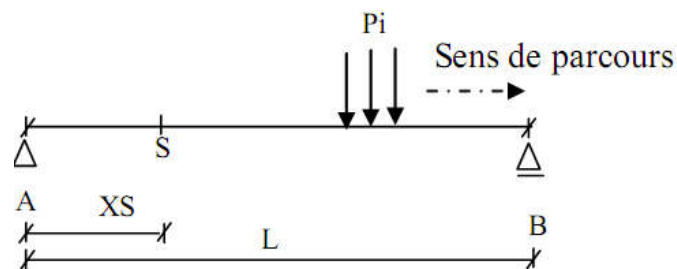


Fig. 1 Variation de l'effet élastique E en fonction de la position P_i .

La figure 2 représente un portique type d'un bâtiment scolaire qui abrite 2 classes pour chaque niveau. Les travées (1) et (3) reçoivent les charges des classes q_c tandis que la travée intermédiaire n°2 supporte les charges d'escalier q_e .

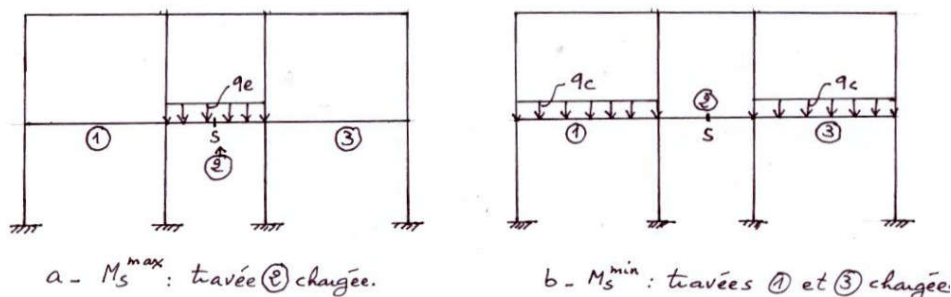


Fig. 2 Dispositions de charges dans un portique de bâtiment pour calculer M^{\wedge} et M^{TMn} .

Le moment fléchissant maximal au milieu S de la travée (2) est obtenu en chargeant seulement cette même travée (fig. 2-a), tandis que le moment minimal dans la même section est déterminé en chargeant les travées (1) et (3) (fig. 2-b).

Pour calculer les réactions maximale et minimale de l'appui A d'un pont isostatique, la charge roulante q_r est disposée selon la figure 3.

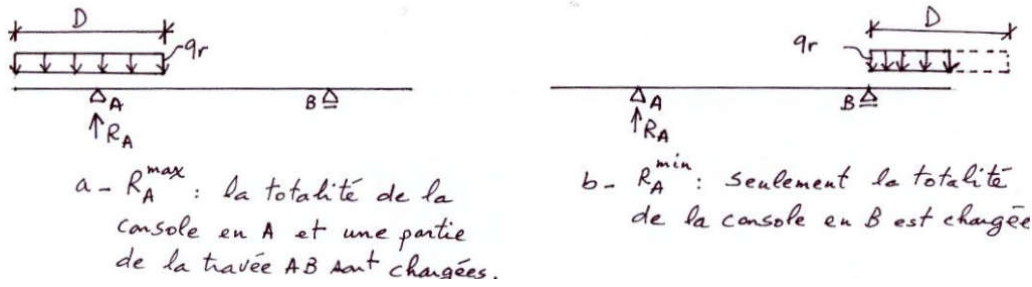


Fig. 3 Réactions extrêmes R_A^{\max} R_A^{\min} d'un pont isostatique.

La disposition des charges dans les exemples des figures 2 et 3 est justifiée par le traçage des lignes d'influence qui seront traitées dans le paragraphe qui va suivre.

3. Qu'est-ce que c'est la ligne d'influence ?

Revenons à l'exemple de la figure 1, si on remplace le chargement mobile P_i par une force unitaire $P=1$ d'abscisse x variable, l'effet élastique E dans la section S variera donc en fonction de x .

$$ES = f(x) \quad (1)$$

$f(x)$ est appelée fonction d'influence, le tracé de $f(x)$ est appelé ligne d'influence.

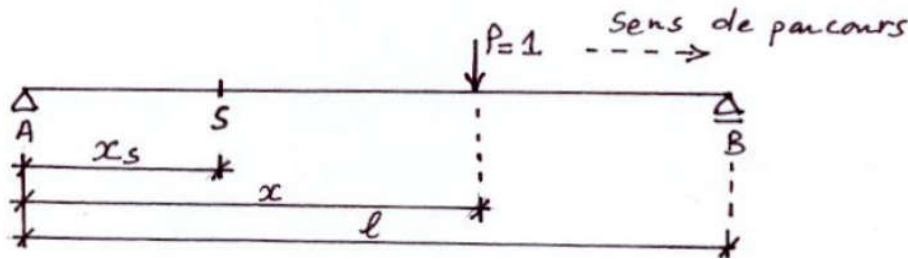


Fig. 4 Eléments de base d'une fonction d'influence $E_s = f(x)$.

Exemple

La ligne d'influence de l'effort tranchant en S est donnée sans démonstration par la figure 5, ce tracé est obtenu en faisant déplacer la force unitaire de A vers B .

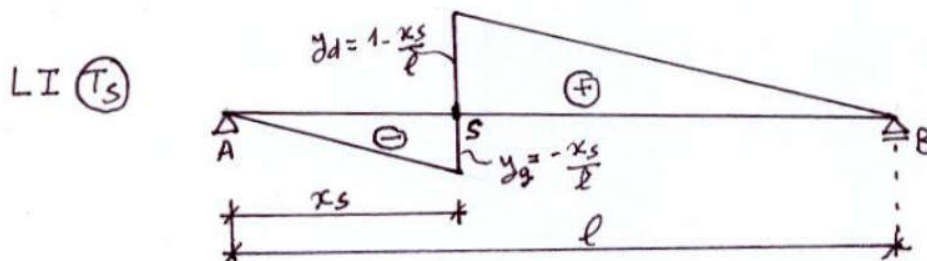


Fig. 5 Ligne d'influence de l'effort tranchant T_s .

L'effort tranchant max ou min est obtenu en chargeant la ligne d'influence de T_s par les charges P_i . D'après la figure 6, on a

$$T_s^{\max} = \sum_{i=1}^n P_i y_i \quad (3)$$

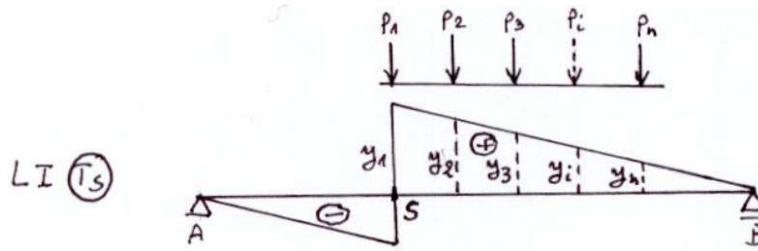


Fig. 6 Calcul de T 1=1

4. Comment calculer l'effet élastique ?

L'effet élastique E_s est obtenu en chargeant la ligne d'influence $f(x)$ par les forces mobiles P_i .

Cas 1 : Charges concentrées.

$$E_s = \sum_{i=1}^n P_i y_i$$

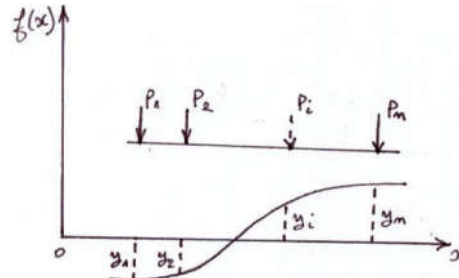


Fig. 7 L'effet élastique du aux charges concentrées P_i .

Cas 2 : Charge uniformément répartie.

$$E_s = q(\Omega^+ + \Omega^-) \tag{5}$$

Où q est la valeur de la charge uniforme.

Ω^+ et Ω^- sont respectivement les aires positive et négative délimitées par la ligne d'influence $f(x)$ et l'axe des x , sur la longueur d'étendue de la charge q . Les aires $\Omega^+ + \Omega^-$ et $\Omega^+ - \Omega^-$ sont prises avec leurs signes.

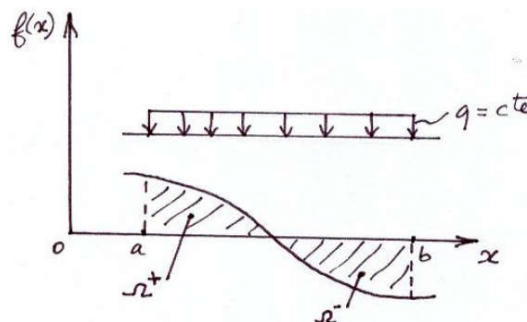


Fig. 8 L'effet élastique du a une charge uniformément répartie q .

Cas 3 : Charge répartie quelconque.

$$E_s = \int_a^b q(x) \cdot y \cdot dx \tag{6}$$

Où $q(x)$ est la charge répartie qui dépend de l'abscisse x .

L'ordonnée y est la fonction d'influence.

$$y = f(x) \tag{7}$$

a et b sont les bornes qui délimitent la zone d'application de la charge $q(x)$.

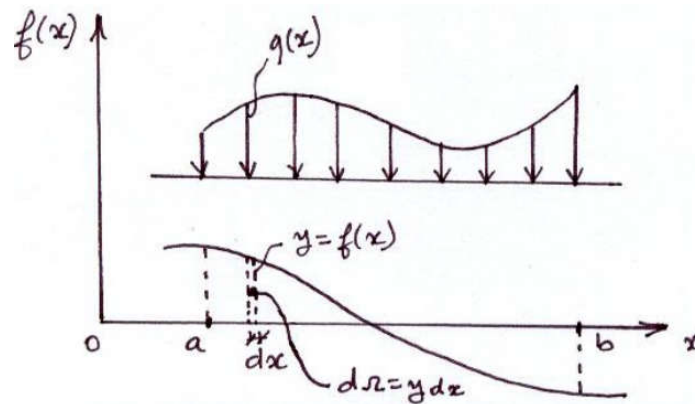


Fig. 9 L'effet élastique d'une charge répartie q .

5. Les lignes d'influence dans une poutre isostatique

5.1 Les réactions d'appuis

5.1.1 La réaction R_A

Pour définir la fonction d'influence de la réaction R_A d'une poutre isostatique (fig. 10), on fait déplacer la charge unitaire $P = 1$. La section étudiée S se situe toujours en A .

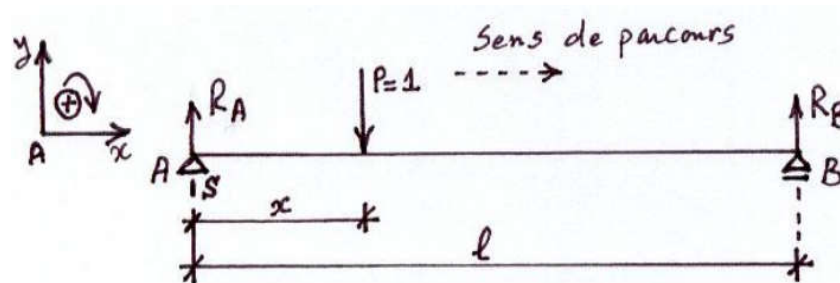


Fig. 10 Schéma statique d'une poutre à une seule travée.

D'après la figure 10, on a $\sum M'_{/B} = 0 \Rightarrow R_A \cdot l - 1 \cdot (l - x) = 0$

D'où la fonction d'influence $R_A = \frac{l-x}{l}$ (8)

Ou bien $R_A = 1 - \frac{x}{l}$ (9)

$x = 0 \Rightarrow R_A = 1$

$x = l \Rightarrow R_A = 0$

Le traçage de cette fonction d'influence donnera la ligne d'influence de R_A (fig. 11).

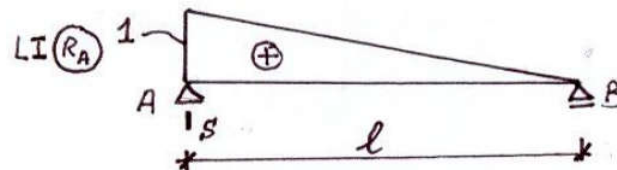


Fig. 11 Ligne d'influence de R_A .

5.1.2 La réaction R_B

En utilisant la figure 10, on a $\sum M'_{/A} = 0 \Rightarrow 1 \cdot x - R_B \cdot l = 0$

D'où la fonction d'influence $R_B = \frac{x}{l}$ (10)

$x = 0 \Rightarrow R_B = 0$

$x = l \Rightarrow R_B = 1$

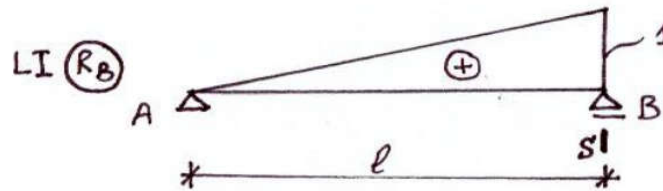
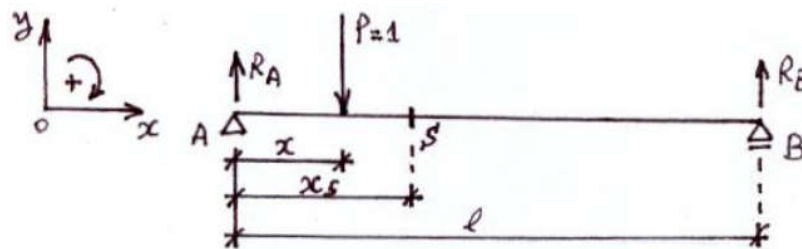


Fig. 12 Ligne d'influence de R_B .

5.2 L'effort tranchant

1- 1^{er} cas : $x \leq x_s$

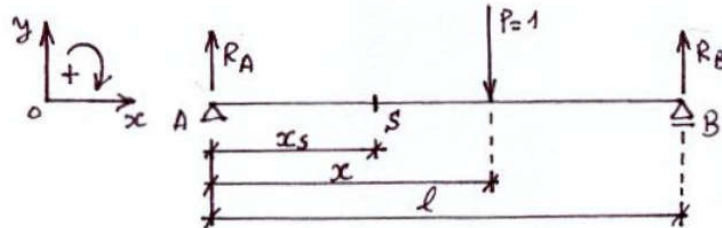


$T_s = -\frac{x}{l}$ (11)

$$x=0 \Rightarrow T_s = 0$$

$$x=x_s \Rightarrow T_s = -\frac{x_s}{l}$$

2^e cas : $x_s \leq x \leq l$



$$T_s = R_A$$

$$T_s = 1 - \frac{x}{l} \quad (12)$$

$$x=x_s \Rightarrow T_s = 1 - \frac{x_s}{l}$$

$$x=l \Rightarrow T_s = 0$$

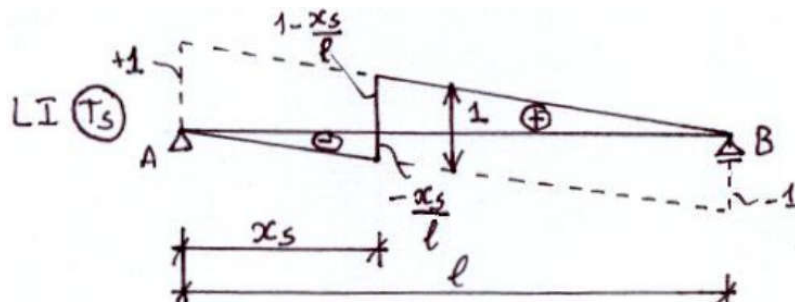
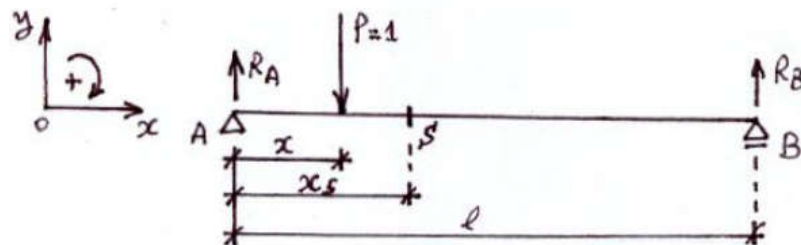


Fig 14. La ligne d'influence de l'effort tranchant T dans la section S

5.3 Le moment fléchissant

5.3.1 Le moment fléchissant dans une section S

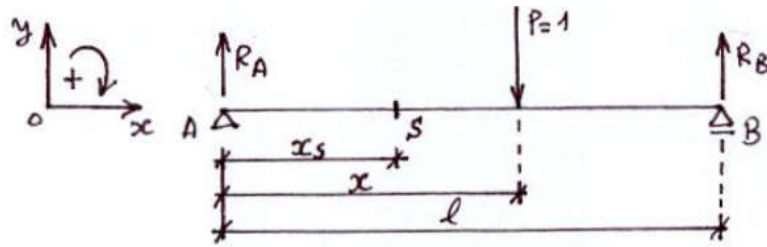
1- 1^{er} cas : $x \leq x_s$



$$M_s = R_A \cdot x_s - 1 \cdot (x_s - x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot x_s - 1 \cdot (x_s - x)$$

Soit
$$M_s = x \cdot \left(1 - \frac{x_s}{l}\right) \quad (13)$$

2^e cas : $x_s \leq x \leq l$



$$M_s = R_A \cdot x_s = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot x_s$$

$$x = x_s \Rightarrow M_s = x_s = \left(1 - \frac{x_s}{l}\right) \cdot x_s$$

$$x = l \Rightarrow M_s = 0$$

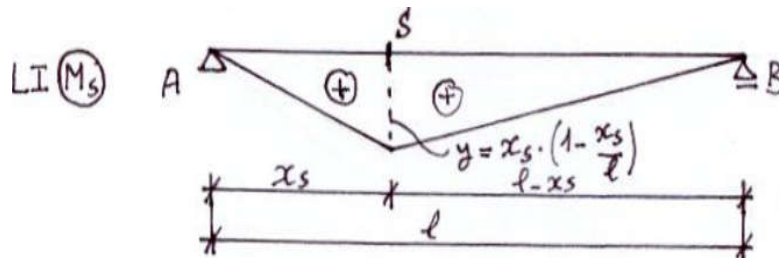


Fig. 15 La ligne d'influence du moment fléchissant M dans la section S.

5.3.2 Le moment fléchissant maximal dans une section S

a) Charges concentrées

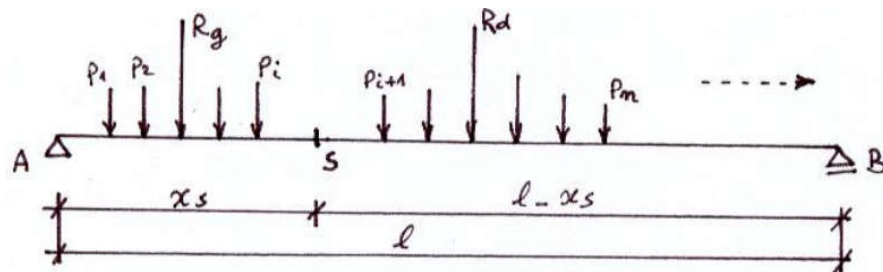
La poutre de la figure 16 est sollicitée par le passage d'un convoi composé de n charges concentrées P_i . La résultante de ces forces est

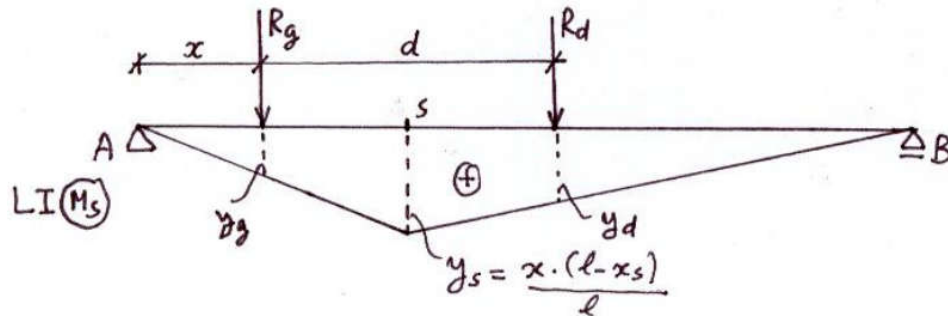
$$R = \sum_{i=1}^n P_i \tag{14}$$

Cette résultante peut s'écrire sous la forme

$$R = R_g + R_d \tag{15}$$

Où R_g et R_d sont respectivement les résultantes des forces se trouvant à gauche et à droite de la section S.




 Fig. 16 Décomposition des forces P_i en résultantes R_g et R_d .

En déplaçant le convoi, l'abscisse x de R_g est supposée varier. Le moment fléchissant dans la section S s'écrit

$$M_s = \sum_{i=1}^n P_i y_i \quad (16)$$

Où bien $M_s = R_g \cdot y_g + R_d \cdot y_d \quad (17)$

D'après la figure 16, on a

$$\begin{cases} y_g = y_s \times \frac{x}{x_s} \\ y_d = y_s \times \frac{(l-d-x)}{(l-x_s)} \end{cases} \quad (18)$$

En remplaçant les valeurs de y_g et y_d dans l'équation 17, on obtient

$$M_s = R_g \cdot y_s \cdot \frac{x}{x_s} + R_d \cdot y_s \cdot \frac{(l-d-x)}{(l-x_s)} \quad (19)$$

Pour que le moment fléchissant en S soit maximal, il faut que sa dérivée par rapport à x soit nulle.

$$M_s^{\max} \Rightarrow \frac{dM_s}{dx}$$

$$\frac{dM_s}{dx} = R_g \cdot \frac{y_s}{x_s} - R_d \cdot \frac{y_s}{(l-x_s)} = 0 \Rightarrow y_s \left(\frac{R_g}{x_s} - \frac{R_d}{(l-x_s)} \right) = 0$$

$$\text{D'où } \frac{R_g}{x_s} = \frac{R_d}{(l-x_s)} = \frac{R_g + R_d}{x_s + l - x_s} = \frac{R}{l} \quad (20)$$

L'équation 20 peut donc s'écrire sous la forme $\frac{R_g}{x_s} = \frac{R}{l} \quad (21)$

Si l'équation 20 ou 21 est satisfaite, le moment fléchissant en S est maximal. Mais puisqu'il s'agit de forces concentrées P_i , la dérivée dM_s/dx ne va pas s'annuler obligatoirement. Le problème sera résolu par les approximations successives, cette méthode va tester le signe de la dérivée dM_s/dx .

Dans le cas où il y a un changement de signes de cette dérivée cela veut dire que le moment fléchissant M_s est maximal.

pour un essieu P_k situé en S, supposons que l'on a

$$\frac{R_{g1}}{x_s} \geq \frac{R}{l} \quad (22)$$

Où R_{g1} est la résultante des forces se trouvant à gauche de S y compris la force P_k .

$$R_{g1} = \sum_{i=1}^k P_i \quad (23)$$

La relation 22 peut aussi s'écrire sous la forme

$$R_{g1} \geq \frac{R \cdot x_s}{l} \quad (24)$$

D'après la relation 22, la dérivée dM_s/dx est positive.

En déplaçant le convoi vers la gauche d'une valeur infinitésimale dx , la charge P_k ne fait plus partie de R_g (fig. 17-b), on aura donc

$$R_{g2} = \sum_{i=1}^{k-1} P_i \quad (25)$$

Si l'on a $\frac{R_{g2}}{x_s} < \frac{R}{l}$ (26)

La relation 26 peut s'écrire sous la forme $R_{g2} < \frac{R \cdot x_s}{l}$ (27)

La dérivée dM_s/dx est donc négative. Cette dérivée à changer de signe en déplaçant P_k de part et d'autre de S, le moment fléchissant M_s est donc maximal si la force P_k est au droit de S.

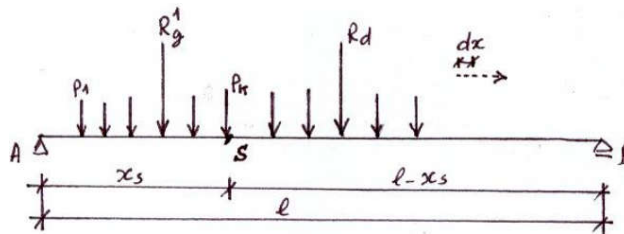


Fig. 17 Déplacement de la charge P_k au niveau de la section S.

En pratique, pour déterminer M_s^{\max} , on fait varier i de 1 jusqu'à n , pour chaque valeur de i on procède de la manière suivante :

1. Placer la charge P_i en S, et calculer la valeur $\frac{R \cdot x_s}{l}$
2. Calculer les 2 valeurs : R_{g1} en tenant compte de la charge P_i et R_{g2} en omettant la charge P_i .
3. Vérifier les 2 conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{g1} \geq \frac{R \cdot x_s}{l} \\ R_{g2} < \frac{R \cdot x_s}{l} \end{array} \right. \quad (28)$$

4. Si la condition 3 est vérifiée, le moment fléchissant en S est maximal si la charge P_i est au droit de S.

$$M_s^{\max} = \sum P_i y_i \quad (29)$$

Sinon, on déplace le convoi en mettant la charge P_{i-1} au droit de S, on refait ensuite la procédure de 1 à 4 jusqu'à ce que l'on ait M_s^{\max}

b) Charge uniformément répartie

La charge constante q est répartie sur une longueur D inférieure à la portée L de la poutre. On suppose que l'emplacement de la figure 20 nous donne un moment fléchissant maximal en S. D'après l'équation 20, on a

$$M_s^{\max} \Rightarrow \frac{R_g}{x_s} = \frac{R_d}{(l-x_s)} \quad (31)$$

R_g est la résultante de la charge se trouvant à gauche de S et qui s'étend sur une longueur L_g inférieure à D .

$$L_g \Rightarrow \alpha \cdot D \quad (32)$$

Où α est un coefficient de proportion de L_g par rapport à D . Il vient

$$0 < \alpha < 1 \quad (33) \quad \text{Donc}$$

$$R_g = \alpha \cdot D \cdot q \quad (34)$$

De même R_d est la résultante de la charge se trouvant à droite de S sur une longueur

$$L_g = (1-\alpha) \cdot D \quad (35)$$

$$\text{D'où } R_g = (1-\alpha) \cdot D \cdot q \quad (35)$$

Pour résoudre le problème il suffit de calculer le coefficient α . En remplaçant les valeurs de R_g et R_d dans l'équation 31, on obtient

$$\frac{\alpha \cdot D \cdot q}{x_s} = \frac{(1-\alpha) \cdot D \cdot q}{(l-x_s)}$$

$$\text{D'où après simplification} \quad \frac{\alpha}{x_s} = \frac{(1-\alpha)}{(l-x_s)} \quad (37)$$

$$\text{En développant la relation 37, il vient } \alpha = \frac{x_s}{l} \quad (38)$$

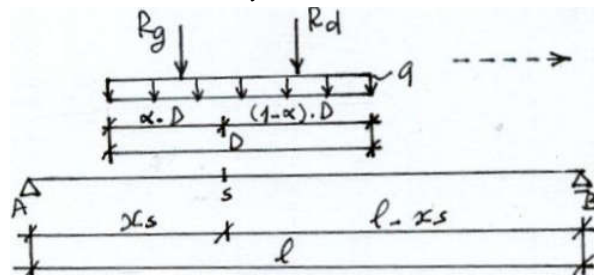


Fig. 20 Poutre soumise à une charge uniformément répartie.

5.3.3 Les courbes enveloppes

En chaque point de la poutre, il est possible de calculer T et M extrêmes (min et max) dus à un convoi quelconque constitué de charges localisées dont les distances partielles entre elles sont supposées constantes. L'ensemble de ces points est appelé courbe enveloppe.

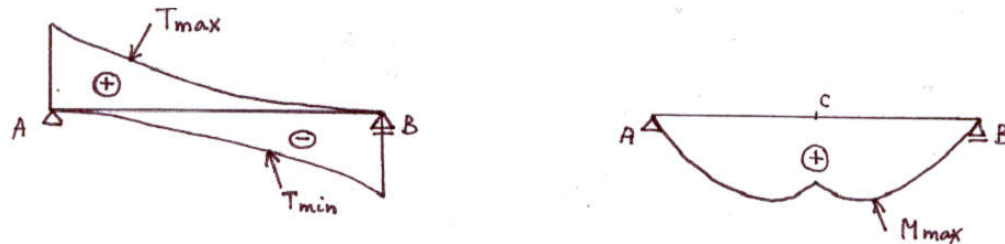


Fig. 21 Courbes enveloppes T et M dans une poutre a une seule travée dus au déplacement d'un convoi quelconque de charges localisées.

D'après la figure 21, on constate que le moment fléchissant maximal dans une poutre n'est pas obligatoirement obtenu au milieu c de la poutre mais dans une section s critique proche de c.

5.3.4 Le moment fléchissant maximal dans une poutre

Pour un convoi donné, le problème qui se pose est de connaître la position exacte de la section où se produit le moment fléchissant maximal, on l'appelle section critique. Cet effet se produit lorsque le milieu c se situe entre la résultante R des charges se trouvant sur la travée et l'essieu P_i le plus rapproché de R. La section critique se trouve au droit de cet essieu. Pour démontrer ce fait, on utilise la figure 22 où d_i est la distance entre l'essieu P_i et la résultantes R, δ est la distance entre la résultante R et le milieu c de la poutre.

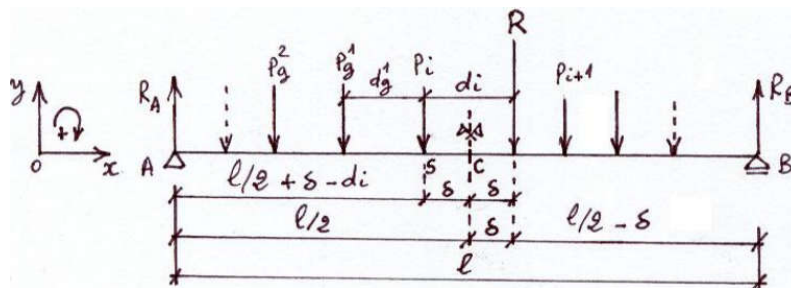


Fig. 22 Section critique S d'un convoi quelconque.

$$\sum M'_{/B} = 0 \Rightarrow R_A \cdot l - R \cdot \left(\frac{l}{2} - \delta\right) = 0$$

$$\text{D'où } R_A = R \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{l}\right) = 0 \tag{39}$$

Le moment fléchissant au droit de P_i

$$M_i = R_A \left(\frac{l}{2} + \delta - d_i\right) - \sum P_g d_g$$

En remplaçant la valeur de R_A dans l'équation de M_i, il vient

$$M_i = R \left(\frac{1-\delta}{2} \right) \cdot \left(\frac{l}{2} + \delta - d_i \right) - \sum P_g d_g \quad (40)$$

Dans l'expression 40 seul δ est variable.

$$M_i^{\max} \Rightarrow \frac{dM_i}{d\delta} = 0$$

$$\frac{dM_i}{d\delta} = -\frac{R}{l} \cdot \left(\frac{l}{2} + \delta - d_i \right) + R \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{\delta}{l} \right)$$

D'où

$$\delta = \frac{d_i}{2} \quad (41)$$

En remplaçant la valeur de δ dans l'équation 40, on obtient

$$M_i = \frac{Rl}{4} \left(1 - \frac{d_i}{2} \right)^2 - \sum P_g d_g \quad (42)$$

L'essieu Pi et la résultante R sont donc symétriques par rapport au milieu c de la poutre, cela confirme ce qui a été énoncé précédemment et se traduit par le théorème suivant :

Théorème de Barrés : Le moment fléchissant est maximal au droit d'un essieu lorsque cet essieu et la résultante générale du convoi occupent des positions symétriques par rapport au milieu de la poutre.

6. Les lignes d'influence dans une poutre continuée

En déplaçant la charge unitaire le long de la poutre, on peut déterminer la réaction R ou l'effort tranchant T ou le moment fléchissant M dans une section S choisie dans la poutre. Pour cela, il suffit de calculer les moments fléchissant aux appuis intermédiaires en fonction de l'abscisse x de la charge unitaire. La méthode la plus adéquate est celle des 3 moments.

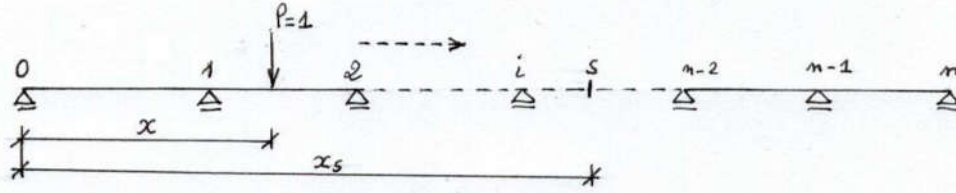


Fig. 39 Poutre continue soumise a une charge mobile P =1.

6.1 L'équation des 3 moments

La poutre continue de la figure 40 contient n travées et (n-1) appuis intermédiaires, chacun de ces appuis a un moment fléchissant inconnu, le système est donc (n-1) fois hyperstatique.

Pour calculer ces (n-1) inconnues M_1, M_2, \dots, M_{n-1} , on utilise la méthode des 3 moments ou de Clapeyron, elle s'écrit dans sa forme générale pour l'appui i.

$$b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) M_i + b_{i+1} M_{i+1} = \theta'_{i+1} - \theta''_i \quad (55)$$

Où θ'_{i+1} : Rotation de l'appui gauche de la travée (i+1) supposée isostatique.

θ''_i : Rotation de l'appui droit de la travée (i) supposée isostatique.

Les rotations sont supposées positives dans le sens antihoraire. Le tableau 1 donne quelques valeurs de rotations les plus courantes.

a_i, b_i, c_i sont les coefficients de souplesse de la travée (i). Si cette travée garde une section constante, on aura

$$\begin{cases} a_i = c_i = \frac{l_i}{3EI_i} \\ b_i = \frac{l_i}{6EI_i} \end{cases} \quad (56)$$

- l_i : Longueur de la travée (i).
- E : Module de déformation longitudinale du matériau utilise.
- I_i : Moment d'inertie en section de la travée (i).

Dans une poutre de section variable, le moment d'inertie de la travée i dépend de l'abscisse x de la section considérée, il sera noté $I_i(x)$. Les 3 constantes a_i, b_i, c_i se retrouvent a partir des intégrales suivantes :

$$\begin{cases} a_i = \int_0^{l_i} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right)^2 \frac{dx}{EI_i(x)} \\ b_i = \int_0^{l_i} \frac{x}{l_i} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) \frac{dx}{EI_i(x)} \\ c_i = \int_0^{l_i} \left(\frac{x}{l_i}\right)^2 \frac{dx}{EI_i(x)} \end{cases}$$

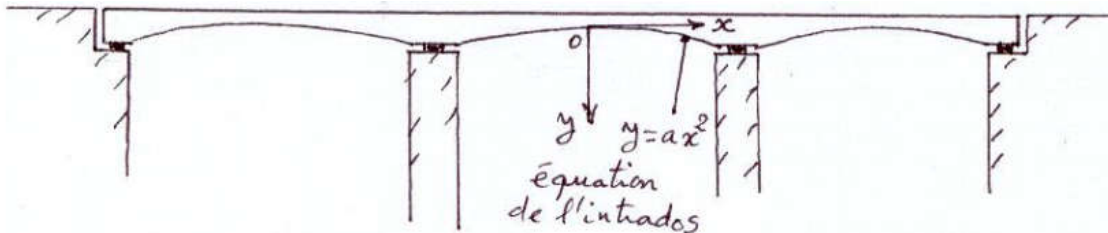


Fig. 39' Exemple d'une poutre continue a section variable.

Si la quantité EI est constante le long de la poutre continue, l'équation 55 devient

$$l_i M_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1})M_i + l_{i+1}M_{i+1} = 6EI(\theta'_{i+1} - \theta'_i) \quad (57)$$

L'équation 57 peut s'écrire pour chaque nœud intermédiaire. On dispose donc de (n-1) équations, sachant que le nombre d'inconnues (M_i) est (n-1). Le système admet donc une solution.

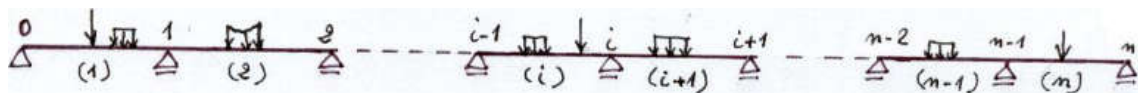


Fig. 40 Schema statique d'une poutre continue a n travées.

Charges	Rotations
	$\theta' = \theta_A = -\frac{ql^3}{24EI}$ $\theta'' = \theta_B = \frac{ql^3}{24EI}$
	$\theta' = \theta_A = -\frac{Pa(l-a)(2l-a)}{6EIl}$ $\theta'' = \theta_B = \frac{Pa(l-a)^2}{6EIl}$
	$\theta' = \theta_A = -\frac{Pa(l-a)}{2EI}$ $\theta'' = \theta_B = \frac{Pa(l-a)}{2EI}$

Tab.1 Quelques valeurs de rotations les plus connues.

6.2 La réaction d'appui

Pour un appui donne, la réaction R_i est la somme de 2 réactions :

1. Réaction due à la continuité de la poutre, elle est notée R_i^c , elle dépend des moments fléchissant M_i se trouvant aux appuis intermédiaires. On a

$$R_i^c = R_{ig}^c + R_{id}^c \quad (58)$$

Ou R_{ig}^c et R_{id}^c sont respectivement les réactions gauche et droite dues à la continuité de la poutre (fig. 41). En utilisant les relations d'équilibre des moments, on obtient

$$\begin{cases} R_{ig}^c = \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i} \\ R_{id}^c = \frac{M_{i+1} - M_i}{l_{i+1}} \end{cases} \quad (59)$$

La réaction R_i^c due à la continuité aura la forme

$$R_i^c = \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i} + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_{i+1}} \quad (60)$$

2. Réaction r_i due aux charges extérieures en supposant que toutes les travées sont indépendantes (système isostatiques)

$$r_i = r_{ig} + r_{id}$$

r_{ig} et r_{id} sont les réactions gauche et droite dues aux charges extérieures en supposant que les travées de la poutre sont indépendantes.

La réaction totale R_i est donnée par l'expression.

$$R_i = R_i^c + r_i \quad (61)$$

En remplaçant la valeur de RC dans cette expression, il vient

$$R_i = \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i} + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_{i+1}} + r_i \quad (62)$$

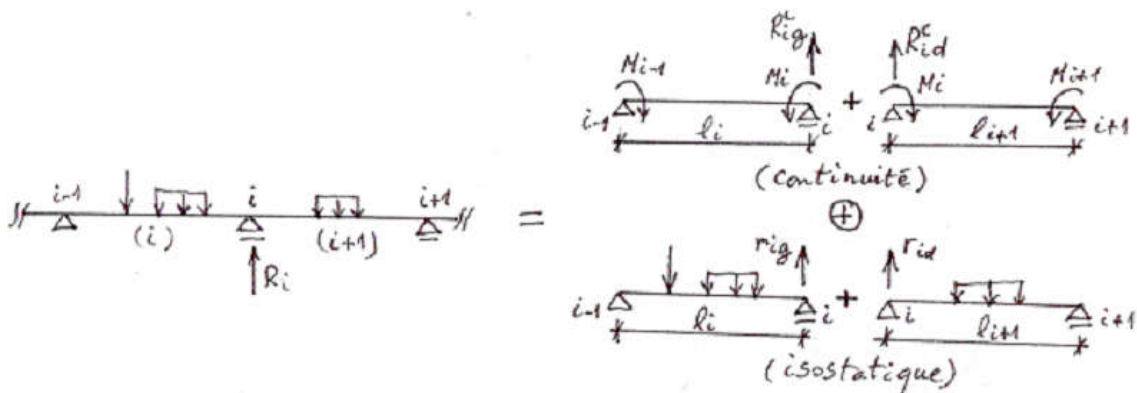


Fig. 41 Schema des réactions de l'appui i.

6.3 Le moment fléchissant dans une section en travée

Le moment fléchissant dans une section de la travée (i-1, i) se décompose en 2 parties :

1- Moment fléchissant $M^c(x)$ du a la continuité de la poutre, il dépend des moments M_{i-1} et M_i aux appuis. D'après la figure 42, on a

$$M^c(x) = M_{(i-1)d}^c \cdot x + M_{i-1} \quad (63)$$

En remplaçant l'expression de $M_{(i-1)d}^c$ dans la relation 63, on obtiendra

$$M^c(x) = \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} \cdot x + M_{i-1} \quad (64)$$

Ou bien

$$M^c(x) = M_{i-1} \cdot \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) + \frac{M_i}{l_i} \cdot x \quad (65)$$

2- Moment fléchissant isostatique $m(x)$ du aux charges extérieures, en supposant que la travée i est indépendante.

Le moment fléchissant total sera donc

$$M(x) = M^c(x) + m(x) \quad (66)$$

En remplaçant la valeur de $M^c(x)$ dans cette relation, il vient

$$M(x) = M_{i-1} \cdot \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) + \frac{M_i}{l_i} \cdot x + m(x) \quad (67)$$

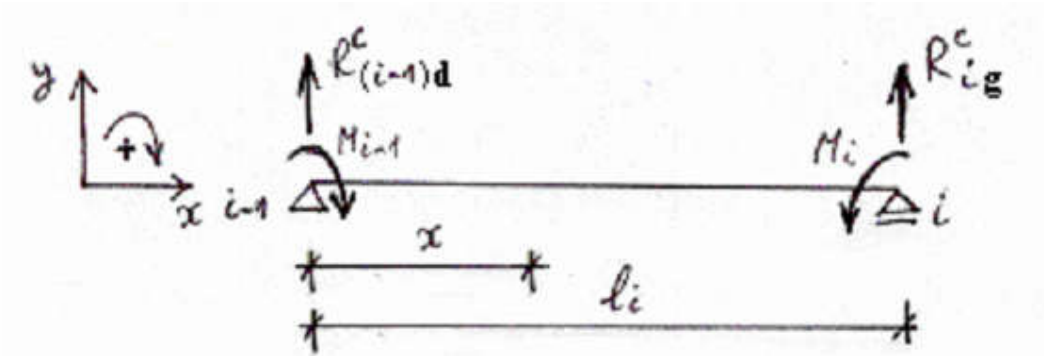


Fig. 42 Efforts dus à la continuité de la poutre dans la travée i.

6.4 L'effort tranchant dans une section en travée

$$T(x) = \frac{dM(x)}{dx} \quad (68)$$

$$T(x) = \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} + t(x) \quad (69)$$

Où $t(x)$ est l'effort tranchant isostatique dû aux charges extérieures.

7. Les lignes d'influence dans une poutre en treillis isostatique

7.1 Généralité

a) Treillis extérieurement isostatique

Les réactions d'appuis sont calculées en utilisant seulement les équations de la statique. Dans l'exemple de la figure 47, on a 3 inconnues V_A , H_A et V_B , mais le système est isostatique puisqu'on dispose des 3 équations

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M' / po \text{ int} = 0 \end{cases} \quad (70)$$

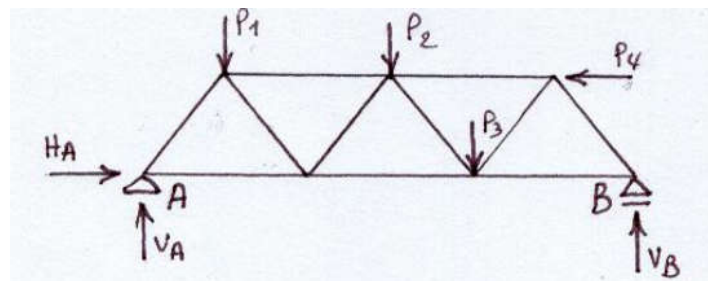


Fig. 47 Treillis extérieurement isostatique.

b) Treillis intérieurement isostatique

Ce système vérifie la relation

$$b = 2n - 3 \quad (71)$$

Où b est le nombre de barres.
 n est le nombre de nœuds.

Dans l'exemple de la figure 47, on a : $b = 11$ et $n = 7$, on a bien $11 = 2 \times 7 - 3$

Le système est donc intérieurement isostatique. Dans le cas contraire, on peut avoir

Système instable : $b < 2n - 3$

Système hyperstatique : $b > 2n - 3$

Le système de la figure 48 est instable (mécanisme), $b = 4$, $n = 4$.

$$b = 4 < 2n - 3 = 5$$

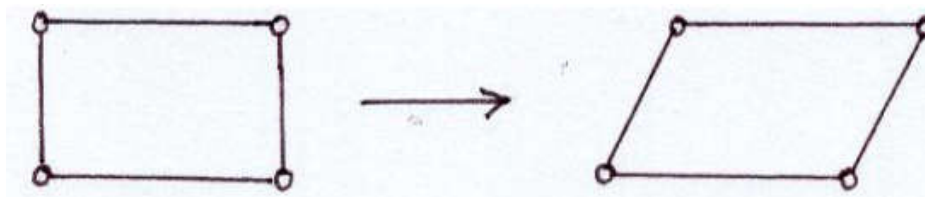


Fig. 48 Mécanisme d'un cadre articulé en ses 4 sommets.

Le système de la figure 49 est extérieurement isostatique, mais intérieurement, il est hyperstatique.

$$b = 11 > 2n - 3 = 9$$

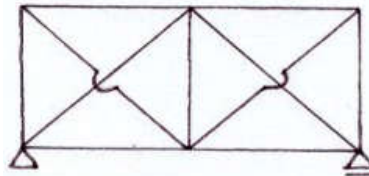


Fig. 49 Systeme exterieurement isostatique et interieurement hyperstatique.

La figure 50 montre un système intérieurement isostatique mais extérieurement hyperstatique.

$$b = 15 = 2n - 3 = 15$$

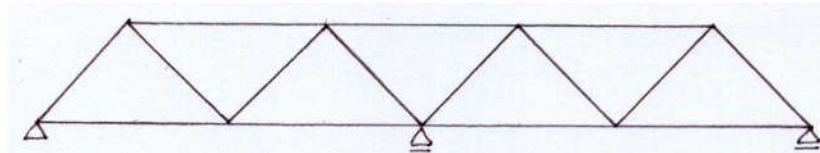


Fig. 50 Systeme exterieurement hyperstatique et interieurement isostatique.

7.2 Calcul des efforts

Dans les ponts à poutres en treillis, les charges sont transmises de l'hourdis vers les traverses qui reposent directement sur les nœuds du treillis. Dans l'exemple de la figure 51, les charges sont transmises de l'hourdis vers les traverses ensuite vers les nœuds A, B, C, D et E. A titre d'exemple, la charge P_3 est transmise aux nœuds C et D sous forme de réactions r_1 et r_2 (fig. 52).

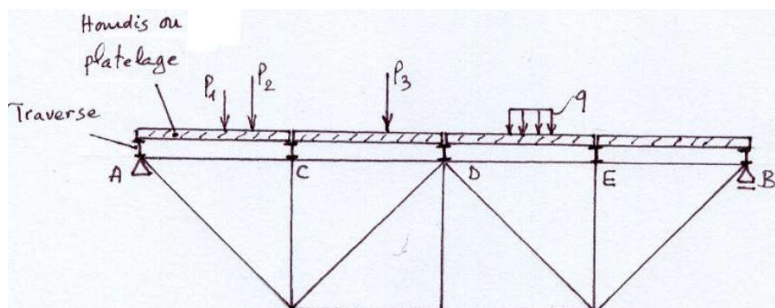


Fig. 51 Transmission des charges vers les nœuds d'une poutre en treillis.

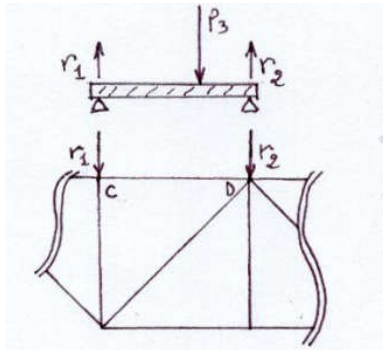


Fig. 52 Les charges sont transmises aux nœuds du treillis sous forme de réactions.

7.3 Lignes d'influence

Dans une section S donnée appartenant à une poutre en treillis, on se propose de calculer les efforts normaux extrêmes dus au passage d'un convoi quelconque. Pour cela on doit charger la poutre par une force unitaire mobile ; d'abscisse x variable, on obtiendra ainsi la ligne d'influence qu'on chargera par la suite par notre convoi réel pour aboutir à l'effort recherché. La ligne d'influence est souvent tracée en utilisant la méthode des sections.

9 CONCLUSION

Dans les ponts on a affaire à des charges mobiles. Pour une section donnée les efforts et les déformations vont changer en fonction de la position de la charge. Le souci majeur est de définir les efforts ou déplacements extrêmes de cette section, d'où l'utilité de la ligne d'influence qui joue un rôle principal dans l'étude de n'importe quelle section de l'ouvrage.