الفصل الثالث: الفائدة المركبة

1- تعريفها:

الفائدة المركبة أكثر شيوعا واستعمالا من طرف البنوك، وهي تختلف عن فائدة البسيطة التي تحسب ، ولا تضاف إلى رأس المال، بل تدفع إلى صاحبها في نهاية مدة القرض، أما بالنسبة للفائدة المركبة فتحسب الفائدة لكل فترة زمنية، وتضاف إلى رأس المال في الفترة الزمنية التالية، ويجري عليها فائدة حسب معدل الفائدة المقررة لذلك.

2- عناصر الفائدة المركبة:

وهي نفس العناصر التي تحدد الفائدة البسيطة، وهي:

- المبلغ الأصلي وهو عبارة عن أصل الدين أو المبلغ المودع: C_0
- معدل الفائدة: i
- المدة الزمنية بالسنوات لاستثمار المال أو إقراضه: n

3- حساب الجملة: C

باعتبار أن المودع أو المقرض للأموال يهدف إلى تحصيل مبالغ جديدة، فان الحاصل في نهاية الفترة أو السنة يسمى الجملة، أي هي القيمة المكتسبة الناتجة عن جمع المبلغ الأصلي مع الفائدة المركبة المحصل عليها للفترة.

نفترض أنه لدينا عدد فترات القرض أو المعاملة يساوي n فترة.

الفترات	رأس المال في بداية الفترة	فائدة الفترة I	القيمة المكتسبة في نهاية الفترة (الجملة) C
1	C_0	$C_0 \times i$	$C_0 + C_0 \times i = C_0 \times (1+i)$
2	$C_0 \times (1+i)$	$C_0 \times (1+i) \times i$	$C_0 \times (1+i) + C_0 \times (1+i) \times i = C_0 \times (1+i)(1+i) = C_0 \times (1+i)^2$
3	$C_0 \times (1+i)^2$	$C_0 \times (1+i)^2 \times i$	$C_0 \times (1+i)^2 (1+i) = C_0 \times (1+i)^3$
.			
.			
n	$C_0 \times (1+i)^{n-1}$	$C_0 \times (1+i)^{n-1} \times i$	$C_0 \times (1+i)^{n-1} \times (1+i) = C_0 \times (1+i)^n$

نلاحظ من الجدول أن فوائد السنوات أو الفترات تكون في ما بينها متتالية هندسية متزايدة، حدها الأول $C_0 \times i$، وأساسها $(1+i)$، وعدد حدودها n.

وأن جمل أو القيم المكتسبة للفترات أو السنوات تمثل أيضا متتالية هندسية، حدها الأول $C_0 \times (1+i)$، أساسها $(1+i)$، وعدد حدودها n.

$$\boxed{C = C_0 (1+i)^n}$$

مثال:

أودعت مؤسسة مبلغ 84500 دج ببنك، بمعدل فائدة مركبة 8 % سنويا، لمدة 6 سنوات. أحسب:

1- الفائدة المحصل عليها في نهاية السنة الأولى من الإيداع.
2- الفائدة المحصل عليها في السنة الرابعة فقط.
3- الجملة الناتجة عن الإيداع في نهاية المدة.

الحل:

1- $I_1 = C_0 \times i \times n = 84500 \times \frac{8}{100} \times 1 \Rightarrow I_1 = 6760$ DA

2- $I_{4فقط} = C_0 \times (1+i)^3 \times i = 84500 \times \left(1 + \frac{8}{100}\right)^3 \times \frac{8}{100} \Rightarrow I_{4فقط} = 8515.65$ DA

3- $C_6 = C_0 \times (1+i)^6 = 84500 \times \left(1 + \frac{8}{100}\right)^6 \Rightarrow C_6 = 134090.85$ DA

حساب مدة المعاملة: n

لحساب المدة الزمنية n للمعاملة المالية سواء كانت إيداع أو قرض، فتحسب باستعمال اللوغاريتم النيبيري Ln .

لدينا جملة المبلغ تساوي:

$$C = C_0 \times (1+i)^n$$

$$\frac{C}{C_0} = (1+i)^n \Rightarrow \text{Ln}\frac{C}{C_0} = \text{Ln}(1+i)^n \Rightarrow \text{Ln}\frac{C}{C_0} = n \times \text{Ln}(1+i)$$

$$\Rightarrow n = \text{Ln}\frac{C}{C_0} \div \text{Ln}(1+i) \Rightarrow \boxed{n = \frac{Ln\, C - Ln\, C_0}{Ln(1+i)}}$$

حساب المبلغ الأصلي أو المودع: C_0

$$\boxed{C_0 = \frac{C}{(1+i)^n}}$$

$$C = C_0 \times (1+i)^n$$

$$\boxed{C_0 = C \times (1+i)^{-n}}$$

حساب معدل الفائدة المركبة: i

$$C = C_0 \times (1+i)^n$$

$$\frac{C}{C_0} = (1+i)^n \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{C}{C_0}} = (1+i) \Rightarrow \boxed{i = \sqrt[n]{\frac{C}{C_0}} - 1} \qquad \boxed{i = \left(\frac{C}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}$$

مثال:

تم إيداع مبلغ يقدر بـ 10000 دج، لمدة 5 سنوات، بمعدل فائدة مركبة 10% .

1–أحسب جملة المبلغ في نهاية المدة.

2– إذا كانت جملة المبلغ بعد 5 سنوات من الإيداع 17821 دج، ما هو معدل الفائدة المركبة المطبق؟

3– إذا افترضنا أن جملة مبلغ معين في نهاية المدة 20000 دج، ما هو المبلغ المودع؟

4– إذا كان المبلغ المودع اليوم هو 10000 دج، ماهي مدة الإيداع إذا كانت جملة المبلغ 23580 دج؟

الحل:

1-$C = C_0 (1+i)^n$

$$C_5 = 10000\ (1 + 0.1)^5 = 16105.10\ DA$$

2- $i = \sqrt[n]{\frac{C}{C_0}} - 1 \qquad i = \left(\frac{C}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$

$$i = \sqrt[5]{\frac{17821}{10000}} - 1 \Rightarrow i = 0.1225 \Rightarrow i = 12.25\%$$

3- $C_0 = C \times (1+i)^{-n}$

$C_0 = 20000 \times (1+0.1)^{-5} = 12418.42$ DA

4- $n = \frac{Ln\, C - Ln\, C_0}{Ln(1+i)}$

$n = \frac{Ln\, 23580 - Ln\, 10000}{Ln(1+0.1)} \Rightarrow n = 9$ سنوات

4- المعدل المتناسب والمعدل المتكافئ:

عادة نستعمل معدل فائدة سنوي، أي تحسب الفائدة في نهاية السنة مرة واحدة، بينما قد نجد معدلات فائدة للسداسي أو للثلاثي أو للشهر، في هذه الحالة يجب تتطابق المدة الزمنية للمعاملة n ، مع معدلات الفترات الجزئية للسنة، لأن الفائدة المركبة تحسب لعدد الفترات، وليس لعدد السنوات فقط، ولهذا نجد هناك معدلات متناسبة ومعدلات متكافئة.

4-1 المعدلات المتناسبة:

المعدل المتناسب لمعدل سنوي i ، هو المعدل الذي يطبق على P فترة من السنة. حيث:

$i_p = \frac{i}{p}$ **p تتراوح بين 1 و 12 فترة.**

في هذه الحالة لا يتساوى المعدلان في نهاية نفس الفترة.

$I_1 = C_0 \times (1+i) - C_0$

$I_2 = C_0 \times \left(1 + \frac{i}{p}\right)^p - C_0$ $\qquad I_1 \neq I_2$

فإذا كان i معدل سنوي، فالمعدل السداسي المتناسب له هو : $\frac{i}{2}$.

فالفائدة السنوية لكل منهما هي:

$I_1 = C - C_0$

بالنسبة للمعدل السنوي والمدة سنة واحدة $I_1 = C_0 \times (1+i) - C_0$

بالنسبة للمعدل السداسي والمدة سداسيان $I_2 = C_0 \times \left(1 + \frac{i}{2}\right)^2 - C_0$

نلاحظ بأن الفائدة عند تطبيق المعدل السنوي، لا تتساوى مع الفائدة عند تطبيق المعدل السداسي المتناسب له، وبالتالي تختلف أيضا قيمة الجملة لكليهما.

مثال:

لدينا مبلغ 60000 دج ، تم إيداعه في بنك لمدة 4 سنوات، بمعدل فائدة مركبة سنوي 12% ، فهل تتساوى فائدة هذا المعدل مع فائدة المعدل الثلاثي المتناسب معه.

الفائدة بالمعدل السنوي:

$$I_1 = C_0 \times (1+i)^4 - C_0 \Rightarrow I_1 = 60000 \times (1+0.12)^4 - 60000 \Rightarrow I_1 = 34411.16$$

الفائدة بالمعدل الثلاثي:

$$I_2 = C_0 \times \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{16} - C_0 \Rightarrow I_2 = 60000 \times (1 + 0.03)^{16} - 60000 \Rightarrow I_2 = 36282.38$$

$$I_1 \neq I_2$$

4-2- المعدلات المتكافئة:

وهي عكس المعدلات المتناسبة، فهي تؤدي إلى نفس قيمة الفائدة، وبالتالي إلى نفس قيمة الجملة لنفس المدة.

$$I_1 = C_0 \times (1+i) - C_0$$

$$I_2 = C_0 \times (1+i_P)^P - C_0$$

وحتى نجد المعدل للفترات P: i_P المتكافئ مع المعدل السنوي i يجب تحقيق مساواة الفائدتين أو الجملتين.

$$I_1 = I_2$$

$$C_0 \times (1+i) - C_0 = C_0 \times (1+i_P)^P - C_0 \Rightarrow C_0 \times (1+i) = C_0 \times (1+i_P)^P$$

$$\Rightarrow (1+i) = (1+i_P)^P \Rightarrow (1+i)^{\frac{1}{p}} = (1+i_P) \qquad \Rightarrow i_P = (1+i)^{\frac{1}{p}} - 1$$

مثال: أحسب معدل الفائدة لكل شهرين المتكافئ لمعدل سنوي 16%.

$$i_P = (1+i)^{\frac{1}{p}} - 1 \Rightarrow i_P = (1+0.16)^{\frac{1}{6}} - 1 \Rightarrow i_p = 2.5\%.$$

تمارين الفصل الثالث

التمرين الأول:

مؤسسة أودعت مبلغ مالي قدره 200000 دج لمدة سبع سنوات ، بمعدل فائدة مركبة سنوي 11 % .

1-أحسب جملة المبلغ في نهاية المدة.

2-أحسب قيمة الفائدة للسنوات السبعة.

3-أحسب قيمة الفائدة للسنة الرابعة فقط.

4-إذا تم سحب مبلغ 200000 دج في نهاية السنة الرابعة، ووضع في بنك آخر بمعدل فائدة 3.5% للثلاثي.

أحسب ما تجمع للمؤسسة بعد نهاية السنوات السبعة للمبلغين.

الحل:

$$C = C_0 (1+i)^n \Rightarrow C = 200000 (1+0.11)^7 \Rightarrow C = 415232.03 \text{ DA}$$

$$I_7 = C - C_0 \Rightarrow I_7 = 415232.03 - 200000 \Rightarrow I_7 = 215232.03 \text{ DA}$$

$$I_{4فقط} = C_0 \times (1+i)^3 \times i = 200000 \times \left(1 + \frac{11}{100}\right)^3 \times \frac{11}{100} \Rightarrow I_{4فقط} = 30087.88 \text{ DA}$$

$$C_4 = C_0 (1+i)^4 \Rightarrow C_4 = 200000 (1+0.11)^4 \Rightarrow C_4 = 303614.08 \text{ DA}$$

المبلغ المتبقي في البنك الأول في نهاية السنة الرابعة، بعد سحب 200000 دج.

$$C_4 - 200000 = 303614.08 - 200000 = 103614.08 \text{ DA}$$

جملة المبلغ المتبقي في البنك الأول بعد 3 سنوات من الإيداع، لتصبح المدة الإجمالية للإيداع 7 سنوات.

$$103614.08 \times (1+i)^3 = 103614.08 \times (1+0.11)^3 = 141705.82 \text{ DA}$$

جملة المبلغ أو القيمة المكتسبة في البنك الأول:

$C_4 + 141705.82 = 303614.08 + 141705.82 = 445319.9$ DA

جملة المبلغ أو القيمة المكتسبة في البنك الثاني أين المدة تكون 3 سنوات:

معدل ثلاثي معناه المدة تكون بالثلاثيات، وبالتالي: 3سنوات = 12 ثلاثي

$C_{12} = C_0 (1+i)^{12} \Rightarrow C_{12} = 200000 (1+0.035)^{12} \Rightarrow C_{12} = 302213.73$ DA

مجموع ما تتحصل عليه هذه المؤسسة من البنكين:

$C_T = 445319.9$ DA $+ 302213.73$ DA $\Rightarrow C_T = 747533.63$

التمرين الثاني:

أودع شخص مبلغا من المال في بنك لمدة 10 سنوات، فبلغت جملته بعد 5 سنوات 40227.14 دج ، في حين أن جملته بعد 7 سنوات 53200.4 دج

1- أحسب معدل الفائدة المركبة المطبق على المبلغ.

2- أحسب المبلغ المودع في بداية المدة.

3- أحسب جملة المال المجمع بعد 10 سنوات من الإيداع، وفائدة السنة السادسة فقط.

$C_5 = C_0 (1+i)^5 = 40227.14$

$C_7 = C_0 (1+i)^7 = 53200.4$

$$\frac{C_7}{C_5} = \frac{C_0 (1+i)^7}{C_0 (1+i)^5} = \frac{(1+i)^7}{(1+i)^5} = (1+i)^2$$

$$\frac{C_7}{C_5} = \frac{53200.4}{40227.14} = 1.3225 = (1+i)^2 \Rightarrow (1+i) = \sqrt{1.3225}$$

$(1+i) = 1.15 \Rightarrow i = 0.15 = 15\%.$

$$C_5 = C_0 (1+i)^5 \Rightarrow C_0 = \frac{C_5}{(1+i)^5} \Rightarrow C_0 = \frac{40227.14}{(1+0.15)^5} \Rightarrow C_0 = 20000 \text{ DA}$$

$C_{10} = C_0 (1+i)^{10} = 20000 (1+0.15)^{10} = 80911.15$ DA

$$I_{6\text{فقط}} = C_0 \times (1+i)^5 \times i = 20000 \times \left(1 + \frac{15}{100}\right)^5 \times \frac{15}{100} \Rightarrow I_{6\text{فقط}} = 6034.07 \text{ DA}$$

التمرين الثالث:

رأس مال يقدر بـ 145000 دج، استثمر لمدة معينة فبلغت فوائده البسيطة 91350 دج، بمعدل معين، أما فوائده المركبة لنفس المدة وبمعدل 9% سنويا فبلغت 120065.655 دج.

1-أحسب مدة الإيداع.

2-أحسب معدل الفائدة المطبق في الحالة الأولى.

الحل:

$$C_n = C_0 + I_n = C_0 (1+i)^n$$

$$C_n = 145000+120065.655 = 145000 (1+0.09)^n$$

$$265065.655=145000(1+0.09)^n \Rightarrow \frac{265065.655}{145000} = (1+0.09)^n$$

$$Ln \frac{265065.655}{145000} = Ln(1+0.09)^n = n\ Ln\ (1+0.09)$$

$$Ln\ 265065.655 - Ln\ 145000 = n\ Ln\ (1+0.09)$$

$$n=\frac{Ln265065.655 - Ln\ 145000}{Ln\ (1+0.09)}$$

$$n= \frac{12.487 - 11.884}{0.0861} \Rightarrow n= 7 \text{ سنوات}$$

$$I = C_0 \times i \times n$$

$$i = \frac{I}{C_0 \times n} = \frac{91350}{145000 \times 7} \Rightarrow i = 0.09 = 9\%$$

التمرين الرابع:

استثمر تاجر مبلغ 100000دج، لمدة سنتين. أوجد جملة المبلغ المستثمر:

1-إذا كان معدل الفائدة المركبة هو 0.8 % شهريا.

2-إذا كان معدل الفائدة المركبة هو 6 % للثلاثي.

3-إذا كان معدل الفائدة المركبة هو 7% للسداسي.

الحل:

$$C_n = C_0 (1+i)^n$$

معدل فائدة شهري فالمدة تكون بالأشهر، المدة سنتان= 24 شهر

$$C_{24} = 100000 (1+0.008)^{24} = 121074.52 \text{ DA}$$

معدل فائدة ثلاثي فالمدة تكون بالثلاثيات، المدة سنتان= 8 أشهر

$$C_8 = 100000 (1+0.06)^8 = 159384.8 \text{ DA}$$

معدل فائدة سداسي فالمدة تكون بالسداسيات، المدة سنتان= 4 أشهر

$$C_4 = 100000 (1+0.07)^4 = 131079.6 \text{ DA}$$