من بين مصادر التمويل الخارجية للمؤسسات الاقتصادية، نجد الديون المتوسطة والطويلة الآجل، والتي تتحصل عليها المؤسسة في شكل مالي أو نقدي، نجد القروض ذات المصدر الوحيد.

1- القروض ذات المصدر الوحيد: وهي قروض متحصل عليها من مقرض وحيد، وعادة ما يكون مؤسسة مالية أو مصرفية، يتم تسديد هذا النوع من القروض، بطريقتين:

1-1- استهلاك القروض بدفعات ثابتة: يكون التسديد بصفة دورية، إما سنوية، أو سداسية...، وبدفعة ثابتة، وفي نهاية الدفعات، يكون المقرض قد تحصل على أصل القرض مع الفوائد.

العناصر الأساسية المحددة لاستهلاك القرض:

- **قيمة أصل القرض في بداية السنة الأولى للتسديد: V_0**
- **الدفعة الثابتة المتكونة من الاستهلاك والفائدة : a**
- **الاستهلاك للفترة يمثل الفرق بين الدفعة الثابتة و فائدة الفترة: M**
- **فائدة الفترة تساوي أصل القرض للفترة مضروب في معدل الفائدة : I**
- **عدد الدفعات: n**

ويتم تحديد قيمة الدفعة الثابتة من خلال علاقات الدفعات المتساوية لنهاية المدة:

$$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad a = V_0 \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

جدول استهلاك القرض بدفعات ثابتة:

الفترة	الدين المتبقي في بداية الفترة V	فائدة الفترة I	الدفعة الثابتة	الاستهلاك للفترة M	الدين المستهلك $\sum M$	الدين المتبقي في نهاية الفترة V- M
1	V_0	$V_0 \times i = I_1$	a	$M_1 = a - I_1$	M_1	$V_0 - M_1$
2	$V_1 = V_0 - M_1$	$V_1 \times i = I_2$	a	$M_2 = a - I_2$	$M_1 + M_2$	$V_1 - M_2$
.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	
n-1	V_{n-2}	$V_{n-2} \times i$	a	$M_{n-1} = a - I_{n-1}$	$\sum M_1 + \dots M_{n-1}$	$V_{n-2} - M_{n-1}$
n	V_{n-1}	$V_{n-1} \times i$	a	$M_n = a - I_n$	$\sum M_1 + \dots M_n$	$V_{n-1} - M_n$
$\sum$	-	$\sum I$	$\sum_1^n a = n\,a$	$\sum M$	-	

مثال:

تحصلت مؤسسة على قرض بقيمة 80000 دج، في 01 جويلية من السنة N، على ان يتم تسديده بدفعات ثابتة لمدة 4 سنوات، بداية من 01 جويلية من السنة (N+1) . بمعدل فائدة 8% .

إعداد جدول استهلاك القرض.

نقوم بحساب قيمة الدفعة:

$$a = V_0 \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 80000 \times \frac{0.08}{1-(1+0.08)^{-4}} \Rightarrow a = 24153.66 \text{ DA}$$

الفترة (السنة)	الدين المتبقي في بداية الفترة V	فائدة الفترة I	الدفعة الثابتة a	الاستهلاك للفترة M= a - I	الدين المتبقي في نهاية الفترة V- M
N+1/07/01	80000.00	6400.00	24153.66	17753.66	62246.34
N+2/07/01	62246.34	4979.71	24153.66	19173.95	43072.39
N+3/07/01	43072.39	3445.79	24153.66	20707.87	22364.52
N+4/07/01	22364.52	1789.16	24153.66	22364.52	0
∑	-	16614.66		80000.00	-

❖ **علاقة الدفعات والقرض:**

- **قيمة أصل القرض في بداية السنة الأولى للتسديد = القيمة الحالية للدفعات =** V_0

$$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

- **جملة الدفعات = جملة القرض** $= V_0 + \sum_{S=1}^{n} I \sum_{S=1}^{n} a$
- **مجموع الدفعات = أصل القرض + مجموع الفوائد** $n \times a = \sum M + \sum I$

❖ **العلاقة بين الاستهلاكات:**

من خلال جدول استهلاك القرض بدفعات ثابتة، نلاحظ بأن الاستهلاكات للفترات المتتالية، تشكل في ما بينها متتالية هندسية أساسها (1+i) ،حدها الأول M_1 ، وعدد حدودها n .

$$M_n = M_1 \times (1+i)^{n-1}$$

استهلاك الفترة
$M_2 = M_1 \times (1+i)^1$
$M_3 = M_1 \times (1+i)^2$
$M_4 = M_1 \times (1+i)^3$

$$M_x = M_k \times (1+i)^{x-k}$$

تمكننا العلاقة السابقة من حساب قيم الاستهلاك، من خلال قيمة استهلاك واحدة معلومة.

1-2- استهلاك القروض باستهلاكات ثابتة: يكون التسديد بصفة دورية، إما سنوية، أو سداسية...، وباستهلاكات ثابتة، وبدفعات متناقصة، ويحسب الاستهلاك الثابت للفترة بقسمة أصل القرض على عدد الدفعات.

من اجل إعداد جدول استهلاك القرض باستهلاكات ثابتة، نقوم بحساب قيمة استهلاك الفترة الثابتة:

$$M = \frac{V_0}{n}$$

ومبلغ الدفعة المتغير: $a=M+I$

جدول استهلاك القرض باستهلاكات ثابتة:

الفترة	الدين المتبقي في بداية الفترة V_x	فائدة الفترة I $I_{x+1} = V_x \times i$	الدفعة $a_x = M + I_x$	الاستهلاك للفترة الثابت $M = \frac{V_0}{n}$	الدين المتبقي في نهاية الفترة $V_x - M$
1 2 . . . n-1 n	V_0 $V_1 = V_0 - M_1$ . . . V_{n-2} V_{n-1}	$V_0 \times i = I_1$ $V_1 \times i = I_2$ . . . $V_{n-2} \times i$ $V_{n-1} \times i$	$M+I_1$ $M+I_2$ . . . $M+I_{n-1}$ $M+I_n$	$M = \frac{V_0}{n}$ . . . $M = \frac{V_0}{n}$	$V_0 - M$ $V_1 - M$ $V_{n-2} - M$ $V_{n-1} - M$
$\sum$	-	$\sum I$	$= n\,a \sum_1^n a$	$\sum M$	

مثال:

تحصلت مؤسسة على قرض بقيمة 80000 دج، في 01 جويلية من السنة N، على أن يتم تسديده <u>باستهلاكات ثابتة</u> لمدة 4 سنوات، بداية من 01 جويلية من السنة (N+1) . بمعدل فائدة 8% .

الفترة (السنة)	الدين المتبقي في بداية الفترة V_x	فائدة الفترة I_x	الدفعة $a_x=M+I_x$	الاستهلاك للفترة $M=\frac{V_0}{n}$	الدين المتبقي في نهاية الفترة $V_x - M$
N+1/07/01	80000.00	6400.00	26400.00	20000.00	60000.00
N+2/07/01	60000.00	4800.00	24800.00	20000.00	40000.00
N+3/07/01	40000.00	3200.00	23200.00	20000.00	20000.00
N+4/07/01	20000.00	1600.00	21600.00	20000.00	0
$\sum$	-	16000.00	96000.00	80000.00	-

تمارين الفصل السادس

التمرين الأول:

من جدول استهلاك قرض تم الحصول على التالي:

الفترة	الدين المتبقي في بداية الفترة V	فائدة الفترة I	الدفعة الثابتة a	الاستهلاك للفترة M= a - I	الدين المتبقي في نهاية الفترة V- M
1	–	–	–	61544	–
2	–	13263.11	–	–	–
3	206949.34	–	–	–	–
4	139097.13	–	–	–	–
∑	-	-		-	-

أحسب كل من:

- معدل الفائدة i
- القيمة الحالية V_0
- الدفعة الثابتة a
- عدد الدفعات n

الحل:

- حساب معدل الفائدة:

$V_2=139097.13$

$V_3=206949.34$

$V_3= V_2 - M_3 \Rightarrow M_3 = V_2 - V_3 \Rightarrow M_3 = 139097.13 - 206949.34$

$M_3 = 67852.21$

$M_3 = M_1 \times (1+i)^2 \Rightarrow (1+i)^2 = \frac{M_3}{M_1} \Rightarrow (1+i)^2 = \frac{67852.21}{61544}$

$(1+i)^2 = 1,1025 \Rightarrow i = 0.05 = 5\%.$

- حساب القيمة الحالية V_0

$M_1 = 61544$

$M_2 = M_1 \times (1+0.05) \Rightarrow M_2 = 61544 \times (1+0.05) = 64621.2$

$V_2 = V_1 - M_2 \Rightarrow V_1 = V_2 + M_2 = 139097.13 + 64621.2 \Rightarrow V_1 = 203718.33$

$V_0 = M_1 + V_1 \Rightarrow V_0 = 61544 + 228830.2 \Rightarrow V_0 = 265262.33$

- حساب الدفعة الثابتة a :

$I_1 = V_0 \times i = 265262.33 \times 0.05 \Rightarrow I_1 = 13263.11$

$a = I_1 + M_1 \Rightarrow a = 13263.11 + 61544 \Rightarrow a = 74807.11$

- عدد الدفعات n :

$a = M_1 \times (1+i)^n \Rightarrow 74807.11 = 61544 \times (1+0.05)^n$

$\frac{74807.11}{61544} = 1.05^n \Rightarrow 1.2155 = 1.05^n \Rightarrow Ln\ 1.2155 = Ln 1.05^n = n\ Ln 1.05$

$n = \frac{Ln\ 1.2155}{Ln\ 1.05} \Rightarrow n \simeq 4$ دفعات

<u>التمرين الثاني:</u>

تحصلت مؤسسة على قرض يقدر بـ 600000 دج، يسدد خلال 6 سنوات بمعدل فائدة 10% سنويا وباستهلاكات متساوية.

1-أحسب قيمة الدفعة الأولى.

2-إعداد جدول استهلاك القرض، وحساب مجموع الفائدة التي تتحملها المؤسسة المقترضة.

الحل:

$V_0 = 600000 \quad n=6 \quad i=10\%$

حساب قيمة الدفعة الأولى:

$a_1 = I_1 + M_1$

$M_1 = \frac{V_0}{n} = \frac{600000}{6} = 100000$

$I_1 = V_0 \times i = 600000 \times 0.1 = 60000$

$a_1 = 100000 + 60000 = 160000$.

جدول استهلاك القرض، وحساب مجموع الفائدة التي تتحملها المؤسسة المقترضة.

الدين المتبقي في نهاية الفترة $V_x - M$	الاستهلاك للفترة $M = \frac{V_0}{n}$	الدفعة $a_x = M + I_x$	فائدة الفترة I_x $I_{x+1} = V_x \times i$	الدين المتبقي في بداية الفترة V_x	الفترة (السنة)
500000.00	100000.00	160000.00	60000.00	600000.00	1
400000.00	100000.00	150000.00	50000.00	500000.00	2
300000.00	100000.00	140000.00	40000.00	400000.00	3
200000.00	100000.00	130000.00	30000.00	300000.00	4
100000.00	100000.00	120000.00	20000.00	200000.00	5
0	100000.00	110000.00	10000.00	100000.00	6
-	600000.00		210000.00	-	$\sum$

ويمكن حساب مجموع الفوائد أيضا عن طريق العلاقة مجموع المتتالية العددية، التي حدها الأول 60000 وحدها الأخير 10000، وأساسها 10000 وعدد حدودها 6.

$\sum I = \frac{n+1}{2}(V_0 + V_n) \quad \Rightarrow \sum I = \frac{5+1}{2}(60000 + 10000)$

$\sum I = 3 \times 70000 = 210000.00$

قائمة المراجع:

- منصور بن عوف عبد الكريم، مدخل إلى الرياضيات المالية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1996.
- ناصر دادي عدون، الرياضيات المالية:دروس نظرية، دار المحمدية العامة، الجزائر، 2010.
- عدنان كريم نجم الدين، الرياضيات المالية، دار وائل للطباعة والنشر، عمان، 2009.
- غازي فلاح المومني، الرياضيات المالية المعاصرة، دار المناهج للنشر والتوزيع، الأردن، 2006.
- Benjamin legros, mini manuel mathématiques financières, dunod, 2 éd, Paris, 2016.
- Hamini allal, mathématiques financières, tome1, O.P.U, Alger, 2006.
- Marek Capi´nski and Tomasz Zastawniak, Mathematics for Finance, U.S.A, 2003.
- P.V Johnson, introduction to financial mathematics, school of mathematics, Manchester, 2018.