Game Theory

نظرية المباراة

Introduction:

Game theory is a competitive situation among two intelligent opponents (persons or groups) have conflicting objective. Each of two opponents have number of strategies, and each opponent knows the strategies available to the other opponents, but he does not know for sure which strategy the opponent going to use of a given play of the game.

In a game conflict, two opponents, know as players. If one player wins what another player loses, the game is called a zero-sum game. A two-person game is a game having only two players. Two-person, zero-sum games, also called matrix games, will be the only type of games consider.

تشير كلمة المباراة (Games) إلى مواقف التنافس أو الصراع بين الخصوم الأذكياء (أشخاص أو جماعات) ذوي الأهداف المتعارضة. وكل لاعب يمتلك مجموعة من الإستراتيجيات المتاحة التي تكون معروفة لدى الخصم (لكلا الطرفين المتنافسين) لكن أي منهما لا يعرف بالضبط الإستراتيجية التي سوف يستخدمها اللاعب المتنافس تجاه الآخر.

إذا كسب اللاعب (Player) ما يخسره اللاعب الآخر فإن المباراة تسمى مباراة صفرية (Zero-Sum-Game) وهذا النوع من المباراة هو الأكثر شيوعا في عالم الإدارة وهذا النموذج هو الذي سوف يؤخذ بنظر الاعتبار، كما يجب العلم أن هناك بعض مواقف الصراع أو التنافس قد تتضمن كسب أو خسارة لكلا المتنافسين وفي هذه الحالة تسمى (المباراة ذات المجموع غير الصفري)، وإن الهدف من نظرية المباراة هو تحديد أفضل إستراتيجية من قبل اللاعب وعلى افتراض أن خصمه عقلاني ورشيد وذكي وسيقوم بتحركات مضادة ذكية .

وعلى العموم فإن أفضل الإستراتيجيات هي الإستراتيجية المختلطة المحددة بالتوزيع الاحتمالي لمجموعة الاستراتيجيات المطلقة، كما وإن الوصف الكامل للمباراة يعطي مصفوفة العائد (Profit) الكمية التي يكسبها لاعب الصفوف من لاعب الأعمدة في حين نمثل القيم السالبة العائد الذي يمكن أن يحققه لاعب الأعمدة إذا استخدم كل منهما استراتيجياته المطلقة. بعبارة أخرى إن القيم الموجبة في مصفوفة الدفع (Payoffs Matrix) تمثل العائد للاعب الصفوف والقيم السالبة تمثل العائد للاعب الأعمدة.

		Table 1	Player 11		
		B_1	B_2	------------	Bn
Player 1	A_1	a_{11}	a_{12}	------------	a_1n
	A_2	a_{21}	a_{22}	------------	a_2n
	⋮	⋮	⋮	------------	⋮
	A_m	an_1	an_2		amn

1- مباراة الطرفين ذات المجموع الصفري (*Two Person Zero – Sum Game*).

تتميز هذه المباراة بوجود طرفين متنافسين وإن ما يسكبه أحد اللاعبين يساوي تماما ما يخسره اللاعب الآخر وهذا النوع من المباراة يمكن حله بالجبر الاعتيادي أو جبر المصفوفات.

لو أخذنا المثال التالي :-

B Strategy / A Strategy		B's (1)	B's (2)
A's	(1)	70	-50
	(2)	80	100

في المثال أعلاه تشير الأرقام الموجبة إلى كسب اللاعب الذي يلعب الصفوف في حين تشير الأرقام السالبة إلى كسب اللاعب الذي يلعب الأعمدة، فلو ألقينا نظرة إلى المصفوفة أعلاه لتبين أن الأفضل للاعب A أن يلعب الإستراتيجية

الثانية لأنها تضمن له الكسب مهما كانت الإستراتيجية التي سوف يلعبها اللاعب B ، فإذا اختار اللاعب B الإستراتيجية الأولى (1) فإن اللاعب A سوف يكسب 80 ولو اختار اللاعب B الإستراتيجية الثانية (2) فإن اللاعب A سوف يكسب 100 . ففي هذه الحالة سيحاول اللاعب B تقليل خسائره وبالتالي سوف يختار الإستراتيجية الأولى (1)، حيث ستكون خسائره أقل ما يمكن.

2- الإستراتيجية المثلى ونقطة التوازن *Pure Strategy and Saddle Point*

لو أخذنا المثال السابق لوجدنا أن كل لاعب من اللاعبين سوف يختار إستراتيجية واحدة، يلعبها طول الوقت طالما كانت المباراة قائمة وبالتالي سوف يكون الدفع المتحقق في هذه الحالة أي عندما يلعب كل لاعب الإستراتيجية المثلى Pure Strategy أو Optimal Strategy بنقطة التوازن (Saddle Point) والتي هي عبارة عن قيمة المباراة عندما يلعب كل لاعب من اللاعبين إستراتيجيته المثلى أو الخالصة Pure Strategy والتي يمكن تحديدها بأنها أصغر قيمة عددية في صف الإستراتيجية المثلى وأكبر قيمة عددية في عمود الإستراتيجية المثلى أي أن اللاعب A سوف يحصل على دفع مساوي لأقل قيمة عددية في أي صف بينما يحصل اللاعب B على دفع مساوي لأكبر قيمة عددية في أي عمود. وعندما تكون هناك قيمة عددية واحدة تحقق هذا الشرط (نقطة التوازن)، معنى ذلك أن كلا اللاعبين يلعبان بطريقة مثلى، ولكن ليس على الدوام تكون هناك نقطة توازن في كل مباراة ولكن في حالة وجود نقطة التوازن فإن اللاعب الذي يغير إستراتيجيته المثلى وبقي اللاعب الآخر محافظا على إستراتيجيته المثلى عبر نقطة التوازن، فإن اللاعب الذي غير إستراتيجيته المثلى سوف لن يستطيع زيادة عوائده أو تقليل خسائره .

لنعد الآن من جديد إلى السؤال السابق ونحاول حل السؤال عن طريق قاعدة أعلى الأقل Maximin وأقل الأعلى Minimax وكالتالي :-

B Strategy / A Strategy		B's (1)	B's (2)	Row Min
A's	(1)	70	-50	-50
	(2)	80	100	80
Column Max		80	100	

Maximin

Minimax

أي أننا نختار أقل قيمة في كل صف ومن ثم نختار أكبر قيمة من بين القيم الأقل في الصفوف، ونختار أكبر قيمة في كل عمود من الأعمدة ومن ثم نختار أقل القيم من بين أكبر القيم في الأعمدة، وبالتالي ستكون القيمة 80 أعلى الأقل في الصف Maximin والقيمة 80 أقل الأعلى في العمود Minimax .

أي أن أعلى الأقل في الصف تساوي أقل الأعلى في العمود مما يعني أن هناك نقطة توازن وأن 80 هي قيمة المباراة Value of The Game وهذه القيمة تعتبر أقل ربح للاعب A وأقل خسارة للاعب B .

المباراة التي لا يوجد فيها نقطة توازن :

Game without a saddle point

في المثال السابق تبين أن هناك نقطة توازن والتي من خلالها يمكن تحديد الإستراتيجيات المثلى التي يجب أن يمارسها المشاركين في المباراة طوال الوقت، إلا أن هناك الكثير من المباراة التي لا يكون فيها نقطة توازن وبالتالي لا يمكن إيجاد قيمتها باستخدام المعايير السابقة، وبالتالي يتطلب استخدام إحدى الطريقتين التاليتين عندما يكون لكل لاعب إستراتيجيتان.

1- طريقة المزيج من الإستراتيجيات ***Mixed Strategies Method*** .

تعتمد هذه الطريقة على استخدام مزيج من الإستراتيجيات بدلا من تطبيق إستراتيجية واحدة طول الوقت، وفي هذه الحالة فإن كل طرف في المباراة سيحاول تطبيق كل إستراتيجياته وفقا لتشكيلة محددة من الاحتمالات التي يمكن

استخدامها، فلاعب الصفوف سوف يمنح كل صف من صفيه جزءا من الوقت وكذلك سيفعل لاعب الأعمدة. فلو أخذنا المثال التالي:-

مثال: أوجد الإستراتيجية المثلى لكل من اللاعبين A,B وقيمة المباراة طبقا لمصفوفة الدفع التالية :-

B Strategy / A Strategy		B's (1)	B's (2)	Row Min
A's	(1)	6	18	6
	(2)	15	12	12 ← Maximin
Column Max		15 ↑ Minimax	18	

يلاحظ أن قاعدة أعلى الأقل (Maximin) والتي تساوي 12 لا تساوي أقل الأعلى (Minimax) والتي تساوي 15 وفي هذه الحالة فإن كلا اللاعبين سوف يلتجئون إلى استخدام مزيج من الإستراتيجيات، فالمتنافس A سوف يلعب كل صف من صفيه جزءا من الوقت وكذلك المتنافس B سوف يلعب كل عمود من عموديه جزءا من الوقت، فلو افترضنا أن :-

P = نسبة الوقت الذي يقضيه اللاعب A للعب الصف الأول (الإستراتيجية رقم 1).

1-P = نسبة الوقت الذي يقضيه اللاعب A للعب الصف الثاني (الإستراتيجية رقم 2).

Q = نسبة الوقت الذي يقضيه اللاعب B للعب العمود الأول (الإستراتيجية رقم 1).

1-Q = نسبة الوقت الذي يقضيه اللاعب B للعب العمود الثاني (الإستراتيجية رقم 2).

	B Strategy / A Strategy	(1)	(2)
P	(1)	6	18
1-P	(2)	15	12
		Q	1-Q

وبافتراض أن اللاعب A عقلاني وذكي ومنطقي فهو هذه الحالة سوف يرغب في تقسيم وقته للصفوف (إستراتيجياته) الأولى والثانية بحيث تكون مكاسبه المتوقعة من لعب صفه الأول (إستراتيجيته الأولى) تساوي مكاسبه المتوقعة من لعب صفه الثاني (إستراتيجيته الثانية) بغض النظر عما سيلعبه اللاعب B وبالتالي سيكون كما يلي :-

$$6P + 15(1-P) = 18P + 12(1-P)$$
$$6P + 15 - 15P = 18P + 12 - 12P$$
$$-9P + 15 = 6P + 12$$
$$3 = 15P$$
$$P = 3/15 = 1/5$$

So, $1\text{-}P = 1\text{-}1/5 = 4/5$

أي أن اللاعب A سوف يلعب الصف الأول (الإستراتيجية الأولى) 1/5 الوقت في حين يلعب الصف الثاني (الإستراتيجية الثانية) 4/5 من الوقت .

وبافتراض أيضا أن اللاعب B بنفس منطق اللاعب A فإنه سيقوم بتقسيم وقته للأعمدة (إستراتيجياته الأولى والثانية) بحيث تكون خسارته المتوقعة من لعب عموده الأول (الإستراتيجية الأولى) تساوي خسارته المتوقعة من لعب عموده الثاني (الإستراتيجية الثانية) وبالتالي سيكون كما يلي:-

$$6Q + 18(1-Q) = 15Q + 12(1-Q)$$
$$6Q + 18 - 18Q = 15Q + 12 - 12Q$$
$$-12Q + 18 = 3Q + 12$$
$$6 = 15Q$$
$$Q = 6/15 = 2/5$$

So, $1\text{-}Q = 1 - 2/5 = 3/5$

اي أن اللاعب B سوف يلعب العمود الأول (الإستراتيجية الأولى) 2/5 من الوقت في حين يلعب عموده الثاني (الإستراتيجية الثانية) 3/5 من الوقت .

وعملية تقسيم الوقت للاعب الصفوف أو الأعمدة يجب أن تتم بدون نمط معين أي عشوائيا.

ولإيجاد قيمة المباراة للمثال أعلاه سيكون كما يلي :-

	B Strategy / Strategy	(1)	(2)
1/5	(1)	6	18
4/5	(2)	15	12
		2/5	3/5

إجمالي الكسب المتوقع للاعب A سيكون :-

$$2/5 \left[(6 \times 1/5) + (15 \times 4/5) \right] + 3/5 \left[(18 \times 1/5) + (12 \times 4/5) \right]$$

$$2/5 \left[66/5 \right] + 3/5 \left[66/5 \right]$$

$$132/25 + 198/25 = 330/25 = 13.2$$

أي أن اللاعب A إذا لعب إستراتيجياته بدون نمط معين فإنه يتوقع أن يكسب بالمتوسط عائد مقداره 13.2 في كل مرة يلعب فيها المباراة وبالتالي ستكون الخسارة المتوقعة للاعب B كما يلي:-

$$1/5 \left[(6 \times 2/5) + (18 \times 3/5) \right] + 4/5 \left[(15 \times 2/5) + (12 \times 3/5) \right]$$

$$1/5 \left[66/5 \right] + 4/5 \left[66/5 \right]$$

$$66/25 + 264/25 = 330/25 = 13.2$$ قيمة المباراة

ولما كانت قيمة المباراة موجبة فإن اللاعب A هو الذي يكسب المباراة ويكون كسبه بالمتوسط 13.2 في كل مرة يلعب فيها المباراة في حين تكون خسارة اللاعب B بالمتوسط (13.2) في كل مرة يلعب فيها المباراة .

هناك طريقة أخرى لإيجاد نسبة الوقت الذي يقضيه كل من اللاعبين للعب إستراتيجيتهما تسمى الطريقة الحسابية (Arithmetic Method) فلو عدنا للمثال السابق.

1- نقوم بطرح العائد الأصغر من العائد الأكبر لكل عمود ولكل صف.

2- تبادل القيم الناتجة عن عملية الطرح بين الصفين وبين العمودين .

3- إيجاد نسبة الوقت للصفوف والأعمدة .

	B Strategy / Strategy	(1)	(2)
12	(1)	6	18
3	(2)	15	12
		9	6

عملية التبادل

	B Strategy / Strategy	(1)	(2)
3	(1)	6	18
12	(2)	15	12
		6	9

	Strategy B / Strategy A	(1)	(2)
1/5=3/15	(1)	6	18
4/5=12/15	(2)	15	12
		2/5=6/15	3/5=9/15

وبنفس الطريقة السابقة نجد قيمة المباراة .

2- طريقة الاحتمالات المشتركة Joint Probability Method .

يتم استخدام طريقة الاحتمالات المشتركة بعد أن يحدد كل لاعب الوقت الذي يستغرقه في لعب كل من إستراتيجياته المتاحة وبالطريقة التي تم تناولها. فلو عدنا للمثال السابق فإننا توصلنا إلى:

أن اللاعب A سوف يلعب إستراتيجيته الأولى باحتمال 1/5 والثانية بمقدار 4/5 بينما اللاعب B سوف يلعب إستراتيجيته الأولى باحتمال 2/5 والثانية باحتمال 3/5 ، وكل من اللاعبين يلعبان بصورة مستقلة عن الآخر Independently أي أن أي منهما لا يعلم بما سيلعبه الآخر وكما يلي:-

	B Strategy / A Strategy	(1)	(2)
1/5	(1)	6	18
4/5	(2)	15	12
		2/5	3/5

الاستراتيجية	العائد	الاحتمال	القيمة الاحتمالية للعائد
الصف الأول والعمود الأول	6	2/5 × 1/5	12/25 = 2/25 × 6
الصف الأول والعمود الثاني	18	3/5 × 1/5	54/25 = 3/25 × 18
الصف الثاني والعمود الأول	15	2/5 × 4/5	120/25 = 8/25 ×15
الصف الثاني والعمود الثاني	12	3/5 × 4/5	144/25 = 12/25×12

إذا قيمة المباراة تساوي 12/25+54/25+120/25+144/25=330/25 =13.2

وهي نفس النتيجة التي توصلنا إليها باستخدام الطريقة السابقة .

المباراة من نوع (M.2) او (2.M)

وهي الحالة التي يكون فيها لأحد اللاعبين أكثر من إستراتيجيتين واللاعب الآخر إستراتيجيتين أي أن M > 2 وعندما لا تكون هناك نقطة توازن فإن الطرق السابقة

لا تصلح لحل مثل هذا النوع من المباراة، لذلك يتطلب استخدام إحدى الطرق التالية:-

1- طريقة السيطرة **Dominance Method** .

في حالة كون المباراة من نوع (M.2) أو (2.M) وعندما تكون M > 2 وعدم وجود نقطة توازن وكانت هناك إمكانية لاختزال هذه المباراة إلى مباراة من نوع (2.2) وذلك عن طريق إسقاط الإستراتيجية التي تعطي اللاعب الآخر الفرصة الوحيدة للكسب وبالتالي حلها بالطرق السابقة التي مر ذكرها .

فلو أخذنا المثال التالي والذي تمثله المصفوفة التالية :-

A Strategy \ B Strategy	(1)	(2)
(1)	-25	-15
(2)	18	10
(3)	8	20

نلاحظ من مصفوفة العائد أعلاه أن على اللاعب A أن لا يلعب الإستراتيجية الأولى لأنه في هذه الحالة سوف يعطي خصمه اللاعب B الفرصة الوحيدة للكسب. لذلك فإن اللاعب A سوف يسقط من حسابه الإستراتيجية الأولى وبالتالي يكون اللاعب A قد سيطر على الإستراتيجية الأولى Dominated وبغض النظر عن ردود فعل اللاعب B وبذلك ستكون مصفوفة العائد كما يلي:-

A Strategy \ B Strategy	(1)	(2)
(1)	18	10
(2)	8	20

ولعدم وجود نقطة توازن لذلك سيتم حلها بإحدى الطريقتين (المزيج من الإستراتيجيات) أو (طريقة الاحتمالات المشتركة) .

2- طريقة المباراة الفرعية Sub game Method .

هناك بعض المباراة من نوع (M.2) أو (2.M) لا يمكن حلها بطريقة السيطرة وذلك لعدم إمكانية اختزالها إلى مباراة من نوع (2.2) وبالتالي يصعب حلها بإحدى الطرق السالفة الذكر، بالإضافة إلى عدم وجود نقطة توازن، ففي هذه الحالة يتم اللجوء إلى المباراة الفرعية ومن ثم اختيار الأفضل من بينهما، وعملية المفاضلة تكون للاعب الذي يمتلك أكثر من إستراتيجيتين.

فلو أخذنا المثال التالي:-

B Strategy / A Strategy	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(1)	15	7	-8	6	-20
(2)	10	-25	-12	11	24

يتضح من المصفوفة أعلاه أنه لا توجد نقطة توازن ولا يمكن حلها بإحدى الطرق السالفة الذكر وبالتالي سيلتجئ اللاعب B والذي يمتلك أكثر من إستراتيجيتين إلى طريقة السيطرة وذلك بإسقاط الإستراتيجيات التي تحقق للاعب A الكسب على الدوام وهي الإستراتيجية الأولى (1) والإستراتيجية الرابعة (4) وبذلك تصبح المصفوفة كما يلي :-

B Strategy / A Strategy	(2)	(3)	(5)
(1)	7	-8	-20
(2)	-25	-12	24

المباراة أعلاه لا يوجد فيها نقطة توازن ولا يمكن اختزالها إلى مباراة من نوع (2.2) وبالتالي لا يمكن حلها بالطرق السالفة الذكر لذلك يلتجأ إلى تقسيم المباراة إلى مباراة فرعية من نوع (2.2) حيث يمكن تقسيمها إلى ثلاثة مباريات فرعية وكما يلي :-

(1)	
7	-8
-25	-12

(2)	
7	-20
-25	24

(3)	
-8	-20
-12	-24

وبالتالي يتم حل كل تشكيلة من المباراة على حده واختيار المباراة الفرعية التي تحقق للاعب B أعلى العوائد أي أعلى قيمة بالإشارة السالبة. وإذا كانت على سبيل المثال كل القيمة موجبة فإنه سيختار المباراة التي تحقق له أقل خسارة ممكنة.

أما إذا كانت المباراة من نوع M×N حيث أن M=N ولا توجد نقطة توازن ولا توجد إستراتيجية مسيطرة ولا يمكن تحويلها إلى مباراة فرعية 2×2 فعند ذلك يتطلب استخدام الطرق التالية :-

3- طريقة المعادلات الخطية *Linear Equations Method* .

نأخذ المثال التالي :-

B Strategy / A Strategy	(1)	(2)	(3)
(1)	6	4	14
(2)	10	10	6
(3)	0	14	4

يتضح من المثال أعلاه أنه لا توجد نقطة توازن ولا يمكن حلها بالطرق السابقة لذلك يتطلب حلها بطريقة المعادلات الخطية :

إذا لعب B استراتيجياته المختارة يكون الآتي

إستراتيجية B المختارة	الربح المتوقع لـــ A
(1)	$6X_1 + 10X_2 + 0 = V$
(2)	$4X_1 + 10X_2 + 14X_3 = V$
(3)	$14X_1 + 6X_2 + 4X_3 = V$

حيث أن X_1 , X_2 , X_3 يساوي نسبة الوقت الذي يقضيه اللاعب A للعب إستراتيجياته المختارة وبذلك يكون :-

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

وV = قيمة المباراة .

في المعادلات الثلاثة أعلاه هناك أربعة مجاهيل لذلك يتطلب أن نتخلص من أحد المجاهيل وليكن X_1 ، وبالتعويض عن X_1 في المعادلات أعلاه :

حيث أن:- $X_1 + X_2 + X_3 = 1$

$$X_1 = 1 - X_2 - X_3$$

$$6(1 - X_2 - X_3) + 10X_2 = V \quad \text{\_\_\_\_\_\_} \quad (1)$$
$$4(1 - X_2 - X_3) + 10X_2 + 14X_3 = V \quad \text{\_\_\_\_\_\_} \quad (2)$$
$$14(1 - X_2 - X_3) + 6X_2 + 4X_3 = V \quad \text{\_\_\_\_\_\_} \quad (3)$$

$$6 + 4X_2 - 6X_3 = V \quad \text{\_\_\_\_\_\_} \quad (1)$$
$$4 + 6X_2 + 10X_3 = V \quad \text{\_\_\_\_\_\_} \quad (2)$$
$$14 - 8X_2 - 10X_3 = V \quad \text{\_\_\_\_\_\_} \quad (3)$$

$$V - 4X_2 + 6X_3 = 6 \quad \text{\_\_\_\_\_\_} \quad (1)$$
$$V - 6X_2 - 10X_3 = 4 \quad \text{\_\_\_\_\_\_} \quad (2)$$
$$V + 8X_2 + 10X_3 = 14 \quad \text{\_\_\_\_\_\_} \quad (3)$$

والآن يجب التخلص من أحد المجاهيل مرة أخرى ، نأخذ المعادلة رقم (2) والمعادلة رقم (3) :-

$$\left.\begin{aligned} V - 6X_2 - 10X_3 &= 4 \\ V + 8X_2 + 10X_3 &= 14 \end{aligned}\right\} \text{بالجمع}$$

$$2V + 2X_2 = 18 \quad \text{\_\_\_\_\_\_} \quad (1a)$$

يجب أن تكون لدينا ثلاثة معادلات جديدة مشتقة من المعادلات الثلاثة أعلاه بدون المجهول X_3 مكونة من التشكيلة ((2)،(1)) و ((1)،(3)) و ((2)،(3)).

نأخذ المعادلة (1) ، (2)

$$\left.\begin{array}{rcl} V - 4X_2 + 6X_3 & = & 6 \\ V - 6X_2 - 10X_3 & = & 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \times 5 \\ \times 3 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 5V - 20X_2 + 30X_3 & = & 30 \\ 3V - 18X_2 - 30X_3 & = & 12 \end{array}\right\} \text{بالجمع}$$

$$8V - 38X_2 = 42 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2a)$$

نأخذ المعادلة (1) ، (3)

$$\left.\begin{array}{rcl} V - 4X_2 + 6X_3 & = & 6 \\ V + 8X_2 + 10X_3 & = & 14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \times 5 \\ \times -3 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 5V - 20X_2 + 30X_3 & = & 30 \\ -3V - 24X_2 - 30X_3 & = & -42 \end{array}\right\} \text{بالجمع}$$

$$2V - 44X_2 = -12 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3a)$$

باستخدام المعادلة (1a) والمعادلة (2a) نحصل على ما يلي :-

$$\begin{array}{rcl} 2V + 2X_2 & = & 18 \text{ ---------- } \times 4 \\ 8V - 38X_2 & = & 42 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 8V + 8X_2 & = & 72 \\ 8V - 38X_2 & = & 42 \end{array}\right\} \text{بالطرح}$$

$$46X_2 = 30$$

نسبة الوقت الذي يقضيه اللاعب A في لعب إستراتيجيته الثانية

$X_2 = 30/46 = 15/23$

وبالتعويض عن قيمة X_2 في المعادلة (1a) .

$$
\begin{aligned}
2V + 2X &= 18 \\
2V + 2\times 15/23 &= 18 \quad \text{(بضرب طرفي المعادلة} \times 23\text{)} \\
46V + 30 &= 414 \\
46V &= 414 - 30 \\
V &= 384/46 = 192/23 = 8.347 \quad \text{(قيمة المباراة)}
\end{aligned}
$$

وبالتعويض عن قيمة X_2 وقيمة V في المعادلة رقم (1) .

$$
\begin{aligned}
V - 4X_2 + 6X_3 &= 6 \\
192/23 - 4\times 15/23 + 6X_3 &= 6 \quad \text{(ويضرب طرفي المعادلة} \times 23\text{)} \\
192 - 60 + 138X_3 &= 138 \\
138X_3 &= 6
\end{aligned}
$$

نسبة الوقت الذي يقضيه اللاعب A للعب إستراتيجيته الثالثة $X_3 =$

$6/138 = 1/23$

ولما كان $X_1 + X_2 + X_3 = 1$

إذا:-

$$X_1 = 1 - X_2 - X_3$$

$$X_1 = 1 - 15/23 - 1/23$$

نسبة الوقت الذي يقضيه اللاعب A للعب إستراتيجيته الأولى

$X_1 = 7/23$

وبنفس الطريقة عندما يلعب اللاعب A إستراتيجياته المختارة يكون الآتي:-

إستراتيجية A المختارة

$$\begin{array}{ll} (1) & 6Y_1 + 4Y_2 + 14Y_3 = V \\ (2) & 10Y_1 + 10Y_2 + 6Y_3 = V \\ (3) & 14Y_2 + 4Y_3 = V \end{array}$$

وكما هو معلوم أن $Y_1 + Y_2 + Y_3 = 1$ نسبة الوقت الذي يقضيه اللاعب B للعب إستراتيجياته المختارة، وبنفس الطريقة يمكن الحصول :-

$Y_2 = 22/46$

$Y_3 = 5/46$

$Y_1 = 19/46$

$V = 192/23 = 8.347$ وهي لصالح لاعب الصفوف A

Linear Programming Application to Solve Game Problems:

استخدام البرمجة الخطيّة في حل مشاكل المباراة:

عندمـــا تفشل جميع الطرق السابقة في التوصل إلى الحل يتم اللجوء إلى استخدام البرمجة الخطية (LP) لإيجاد قيمـــة المبـــاراة وذلك للتشابه الكبير بـــين نموذج البرمجة الخطية Linear Programming Model ونموذج المباراة (Game Model) ذات المجموع الصفري. وهذا التشابه يمكن إجماله بالآتي:-

1- في نموذج المباراة (Game Model) هناك دالة هدف (Objective Function) كما في البرمجة الخطية (LP) فأحد طرفي الصراع يحاول تعظيم مكاسبه بينما الطرف الأخر يحاول تقليل خسائره .

2- في نموذج المباراة (Game Model) هناك قيود ومحددات كما هو حاصل في البرمجة الخطية (LP) فعندما يختار أحد اللاعبين أي من إستراتيجياته المختارة ستكون هناك قيمة يحصل عليها اللاعب تمثل الكسب أو الخسارة تبعا لطبيعة المباراة .

3- كل القيم في نموذج المباراة إما موجبة أو مساوية للصفر كما هو الحال في البرمجة الخطية (L.P) فإذا اختار أحد اللاعبين إستراتيجية معينة فإن الوقت الذي سوف يقضيه اللاعب للعب إستراتيجيته يساوي إلى الواحد صحيح في حين سيكون الوقت الذي يقضيه اللاعب للعب إستراتيجيته الغير مختارة مساوي إلى الصفر .

4- كما هو الحال في البرمجة الخطية (L.P) هناك علاقة أصل Primal وثنائية Dual في نموذج المباراة، فأحد طرفي اللاعبين يحاول تعظيم مكاسبه بينما الطرف الآخر يحاول تقليل خسائره.

فلو أخذنا المثال السابق لإيجاد قيمة المباراة باستخدام البرمجة الخطية (L.P) .

B Strategy / A Strategy	(1)	(2)	(3)
(1)	6	4	14
(2)	10	10	6
(3)	0	14	4

عندما يلعب A إستراتيجياته المختارة فإن اللاعب B سوف يسعى إلى تقليل خسائره المتوقعة وبالتالي تقليل قيمة المباراة .

الخسارة المتوقعة للاعب B	إستراتيجية A المختارة
$6X_1 + 4X_2 + 14X_3 \leq V$	(1)
$10X_1 + 10X_2 + 6X_3 \leq V$	(2)
$14X_2 + 4X_3 \leq V$	(3)

ولما كان هدف كلا اللاعبين هو تقسيم الوقت بين الإستراتيجيات الثلاثة بحيث يؤدي ذلك إلى تعظيم الكسب أو تقليل الخسائر.

إذا $X_1 + X_2 + X_3 = 1$ يمثل دالة الهدف ، وبالقسمة على V لدالة الهدف وقيود المشكلة نحصل على الآتي:-

$$1/V = X_1/V + X_2/V + X_3/V$$

$$6X_1/V + 4X_2/V + 14X_3/V = V/V \quad \text{..............} (1)$$
$$10X_1/V + 10X_2/V + 6X_3/V = V/V \quad \text{..............} (2)$$
$$14X_2/V + 4X_3/V = V/V \quad \text{..............} (3)$$

وبافتراض أن $X/V = \tilde{X}$

وبالتعويض عن قيمة X/V بـ $\tilde{X}$ في دالة الهدف وقيود المشكلة يكون الآتي:-

Objective Function $\quad 1/V = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \tilde{X}_3$

وقيود المشكلة **(Constraints)** كما هي أدناه:-

$$6\tilde{X}_1 + 4\tilde{X}_2 + 14\tilde{X}_3 \leq 1 \quad \text{............} (1)$$
$$10\tilde{X}_1 + 10\tilde{X}_2 + 6\tilde{X}_3 \leq 1 \quad \text{............} (2)$$
$$14\tilde{X}_2 + 4\tilde{X}_3 \leq 1 \quad \text{............} (3)$$

ولما كان اللاعب B يهدف إلى تقليل خسائره فإنه في هذه الحالة يحاول تعظيم قيمة V لأنه كلما زادت قيمة V معنى ذلك 1/V سوف تنخفض .

Max :

$$1/V = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \tilde{X}_3$$

Subject to:

$$6\tilde{X}_1 + 4\tilde{X}_2 + 14\tilde{X}_3 \leq 1 \quad \text{............} (1)$$
$$10\tilde{X}_1 + 10\tilde{X}_2 + 6\tilde{X}_3 \leq 1 \quad \text{............} (2)$$
$$14\tilde{X}_2 + 4\tilde{X}_3 \leq 1 \quad \text{............} (3)$$
$$\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3 \geq 0$$

وبالتالي يمكن حل المشكلة أعلاه بالطريقة المبسطة Simplex Method ومن ثم الحصول على قيمة المباراة والتي تساوي8.347 كما في المثال السابق .