Queueing Theory

نظريّة الصفوف

Introduction,

Queuing theory is primarily concerned with process consist in customers arriving at a service facility. If the services are congestion, then waiting in a queue in order to receive service, and then departing from the facility. For example machine needing repair, aircraft request permission to land , A typist receives work, Jobs arrive at an inspection station, A self-service gasoline station with two pups. And so on.

QUEUING CHARACTERISTIC S

Queuing systems are characterized by five components:

1- *Arrival Patterns.*
2- *Service Patterns.*
3- *System Capacity.*
4- *Queue Disciplines.*
5- *Kendall's Notation.*

تعتبر نظرية صفوف الانتظار (Queueing Theory) إحدى النماذج الرياضية لبحوث العمليات، وإن الهدف من هذا النموذج هو تصوير الواقع الموضوعي لحالة معينة وتلخيص أبعادها لكي تتم دراستها وتحليلها ومن ثم اتخاذ القرار بشأنها. ومما ساعد هذا النموذج على الانتشار الواسع هو إمكانية استخدامه في كثير من المجالات، منها مراكز التسوق حيث ينتظم المواطنون في صفوف لدفع أثمان

بضائعهم، أو في الاتصالات الهاتفية لدفع الفواتير، وكذلك في المصارف وعيادات الأطباء ومحطات تعبئة البنزين إنتظاراً للخدمة. كذلك يمكن استخدامه في المجالات التخطيطية والرقابية وكذلك القرارات ذات العلاقة بتحقيق التوازن الإنتاجي بين المراحل الإنتاجية المختلفة.

وعملية الصفوف أو الطوابير Queueing تتكون من عملاء يصلون إلى مكان الخدمة وينتظرون في صف أو عدة صفوف إذا كان مقدم الخدمة مشغولا ومن ثم يحصلون على الخدمة وأخيرا يغادرون مكان الخدمة، أي أن نظام الصفوف يتكون من العملاء المتواجدين في الطابور (Queueing) ومن مقدمي الخدمة مضافا إليه نظام الوصول (Arrival System) وطريقة تقديم الخدمة .

ونظام الصفوف (Queueing System) شبيه بعملية الموت والولادة، تحدث الولادة عندما يصل العميل إلى مركز الخدمة (Service facility) وتحدث حالة الموت عندما يحصل العميل على الخدمة ويغادر مركز الخدمة Departs From The Facility ويمثل عدد العملاء في مركز الخدمة حالة النظام (State Of The System).

ويتميز نظام الصفوف بخمسة خصائص (*Queue Characteristic*) وهي :-

1- <u>انماط الوصول ***Arrival Patterns***</u>:-

ويقصد به الزمن المستغرق بين وصول عميل وآخر لمكان الخدمة. وقد يكون هذا الوقت إما ثابت أو متغير عشوائي وهو الأكثر شيوعا، أي بتوزيع احتمالي معروف، وقد يكون نمط الوصول للعملاء بشكل إنفرادي أو على شكل مجموعات.

2- <u>انماط الخدمة ***Service Patterns***</u>:-

ويقصد به الزمن اللازم لمقدم الخدمة لتقديم خدمته لطالب الخدمة، وقد يكون هذا الزمن إما ثابتا أو متغير عشوائي (أي احتمالي معروف) وقد تقدم الخدمة بواسطة مقدم خدمة واحد أو قد يتطلب من طالب الخدمة المرور بسلسلة من مقدمي الخدمة لاكتمال الخدمة المطلوبة.

3- طاقة النظام System Capacity :-

يقصد بطاقة النظام (System Capacity) هو عدد العملاء المسموح لهم بالتواجد في صف الانتظار زائدا العملاء الذين تقدم لهم الخدمة في نفس الوقت، وقد يكون هذا العدد محدود، أي عندما يصل أحد العملاء إلى مكان الخدمة الممتلئ لا يسمح لهذا العميل بالانتظار خارج مكان الخدمة وبالتالي يضطر إلى مغادرة المكان بدون تلقي الخدمة، وقد يكون غير محدود (Infinite Capacity) أي ليس هناك حدود لعدد العملاء المسموح لهم داخل نظام الخدمة ، مثال ذلك انتظام السيارات في طابور على الطريق العام لدفع ضريبة المرور على أحد الجسور.

4- نظم الصفوف Queue Disciplines :-

يقصد بنظم الصفوف Queue Disciplines الترتيب الذي تقدم فيه الخدمة وقد تكون كالتالي:-

- من يصل أولا تقدم له الخدمة أولاً (First-In-First-Out (Lifo
- من يصل آخرا تقدم له الخدمة أولاً(Last-In-First-Out (Lifo
- على أساس عشوائي أو الأسبقية للحالات الطارئة Random Basis Or a priority Basis

5- رموز كندال Kendall's Notation :-

تستخدم هذه الرموز لتحديد خصائص الصف V/W/X/Y/Z حيث أن V تمثل نمط الوصول، وW نمط الخدمة، وX تمثل عدد مقدمي الخدمة، وY تمثل طاقة النظام، وZ تمثل نظم الصفوف. وهناك رموز Symbol متفرعة عنه تستخدم لثلاثة عناصر وإذا لم تحدد Y أو Z فيفترض أنهما غير محددين (∞) و FIFO والجدول التالي أدناه يبين خصائص الصفوف ورموزها ومعانيها .

Queue Characteristic	*Symbol*	*Meaning*
Inter arrival time	D	Deterministic
Or	M	Exponentially distributed
Service time	Ek	Erlang-type (k=1,2….) distributed
	G	Any other distribution
	FIFO	Firs in , First out
Queue discipline	LIFO	Last in, First out
	SIRO	Service in random order
	PRI	Priority ordering
	GD	Any other specialized ordering

فـإذا كـان نظـام الـصفوف مـثلا M/D/3/4/FIFO أي أن M زمـن الوصـول ذو توزيع أسي وD زمن خدمة ثابت، وثلاثة من مقدمي الخدمة، ومكان الخدمة محدد بأربعة عملاء في الوقت الواحد، وعلى أساس من يصل أولا تقدم له الخدمة أولا (FIFO). أما نظام D/D/1 فله زمن وصول ثابت وزمن خدمة ثابت ومقدم خدمة واحد وحيث أن طاقة النظام ونظم الصفوف غير محددين (∞) وFIFO

وعادة ما يتم وصف سلوك النظام لمركز خدمي معين بمجموعة من المؤشرات:-

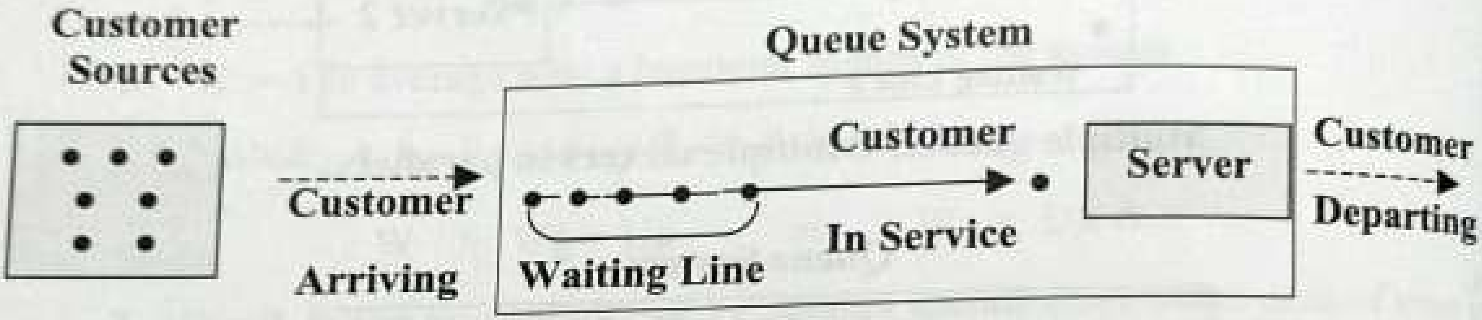
1- <u>معدل الوصول ***Arrival Average***</u>:-

هو معدل عدد العملاء (الأفراد-الألات) التي تصل إلى المركز الخدمي خلال فترة زمنية معينة-كالساعة مثلا . وهي إما ثابتة أم متغيرة ويرمز لها بالرمز λ Lambda .

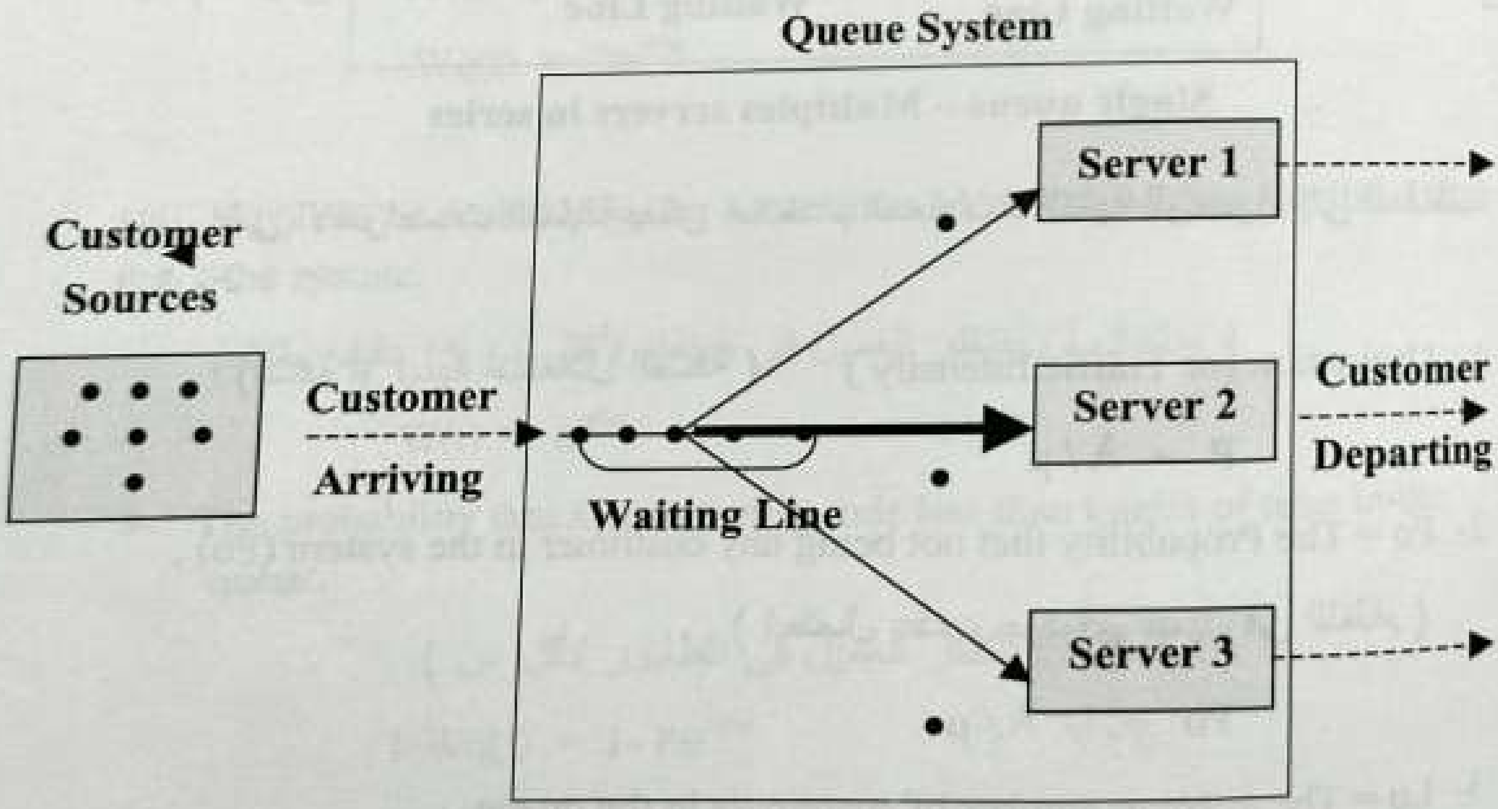
2- معدل الخدمة ***Service Average***:-

اي معدل عدد العملاء (الأفراد-الألات) التي تتلقى الخدمة خلال فترة زمنية معينة – وهي أيضا إما ثابتة أو متغيرة ويرمز لها بالرمز μ (mu).

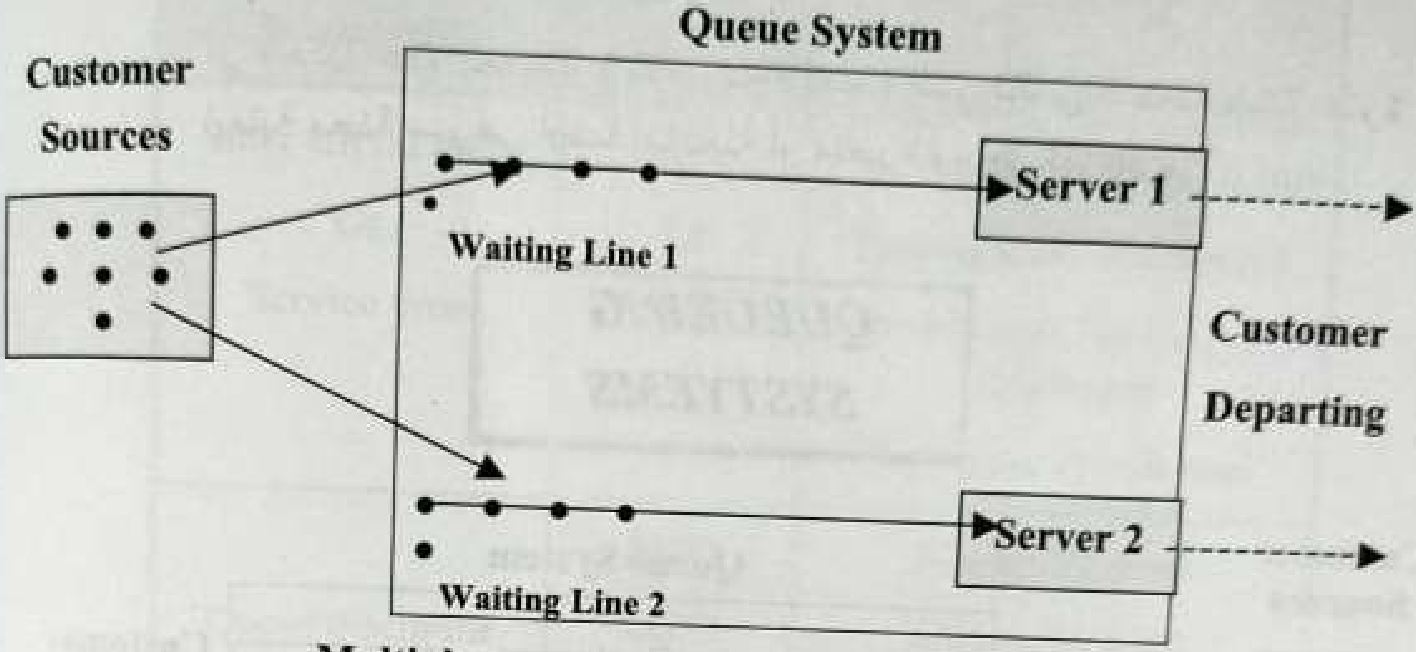
QUEUEING SYSTYEMS



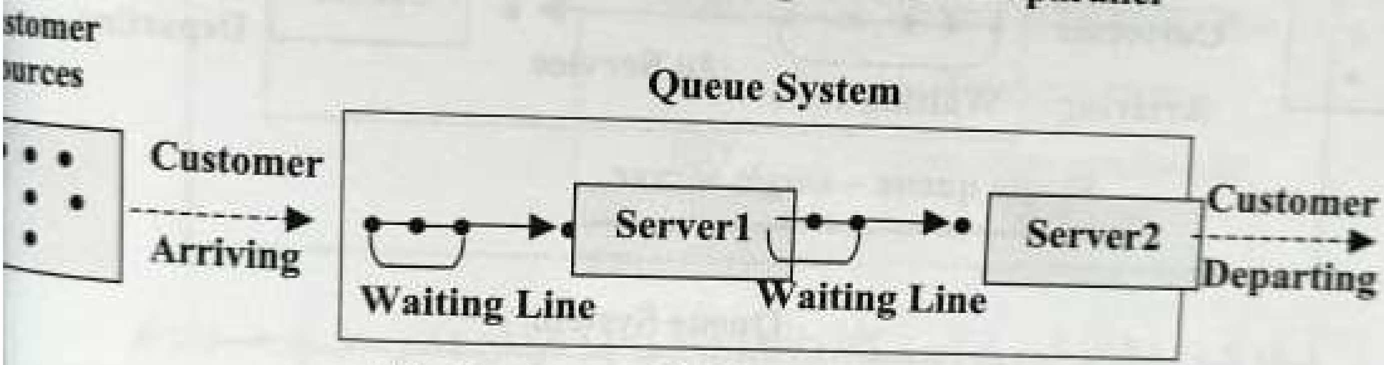
Single queue – single server



Singe queue , Multiple servers in parallel



Multiple queues, Multiple servers in parallel



Single queue – Multiples servers in series

بناء على الافتراضات السابقة يمكن استخدام المعادلات التالية للوصول إلى العلاقات التالية:-

1- Utilization (or Traffic Intensity) (كثافة أو نسبة استغلال الطاقة)

$$P = \lambda / \mu$$

2- Po = The Propability that not being any customer in the system (Po) .
(احتمال عدم وجود أي عميل في النظام)

$$Po = 1- \lambda / \mu$$

3- Lq = The average number of customers in the queue .
(متوسط عدد العملاء في الطابور)

$$Lq = \lambda^2 / \mu(\mu - \lambda) \quad \text{or} \quad Lq = P/1-P \times P$$

4- L = The average number of customers in the system.

(معدل عدد العملاء في النظام)

$$L = Lq + \lambda/\mu \quad \text{or} \quad L = P/1-P \quad \text{or} \quad L = \lambda/\mu-\lambda$$

5- Wq = The average time a customer spends (or waits) in the queue.

(متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في الطابور)

$$Wq = Lq / \lambda \quad \text{or} \quad Wq = (\lambda/\mu)(1/\mu-\lambda)$$

6- W = The average time a customer spends in the system.

(متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في النظام)

$$W = Wq + 1/\mu \quad \text{or} \quad W = 1/\mu-\lambda$$

7- Wq(t) = The probability that a customer spends more than t units of time the queue.

(احتمال أن ينتظر العميل في الطابور لأكثر من 10 دقائق مثلا)

$$Wq(t) = Pe^{-t/w} \qquad t \geq 0$$

8- W(t) = The probability that a customer spends more than t units of time the system.

(احتمال أن ينتظر العميل في النظام لأكثر من 15 دقيقة مثلا)

$$W(t) = e^{-t/w} \qquad t \geq 0$$

9- The probability that a customer spends less than t units of time in the queue.

(احتمال أن ينتظر العميل في الطابور لأقل من)

$$1-Wq(t) = 1- Pe^{-t/w} \qquad t \geq 0$$

10- The probability that a customer spends less than t units of time in the system.

(احتمال أن ينتظر العميل في النظام لأقل من)

$1\text{-}W(t) = 1- e^{-t/w} \qquad t \geq 0$

Where ē = الحاسبة البنبيري يمكن إيجادها في جداول إحصائية أو من خلال

11- The probability of being a number of customers in the system.

(احتمال أن يكون هناك عدد من العملاء في النظام)

$Pn = (\lambda/\mu)^N \times Po$

Where N = 1 , 2 , 3 ……..

مثال :-

يواجه البنك العربي مشكلة طول صف الانتظار أثناء ساعات العمل المسائية والمخصصة لعمليات الصرف والإيداع فقط، حيث تقدم عدد من عملاء البنك بشكوى إلى إدارة البنك بسبب طول فترة الإنتظار للحصول على الخدمة. تبين للبنك أن العملاء يصلون إلى شباك الصرف والإيداع الذي يشغله موظف واحد طول الفترة المسائية بنمط مماثل لتوزيع بواسون حيث قدر متوسط الوصول إلى شباك الصرف والإيداع بما يعادل 25 عميلا في الساعة، أما موظف الصرف والإيداع فقد تبين أنه يستغرق في المتوسط دقيقتان لإنهاء إجراءات الصرف أو الإيداع لكل عميل حيث وجد أن نمط وقت الخدمة يتبع التوزيع الأسي. والمطلوب :-

1- كثافة أو نسبة استغلال الطاقة.

2- احتمال عدم وجود أي عميل في النظام.

3- متوسط عدد العملاء في صف الإنتظار.

4- متوسط عدد العملاء في صف الإنتظار+ العميل الذي تقدم له الخدمة (عدد العملاء في النظام).

5- متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في الطابور.

6- متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في الطابور وحتى حصوله على الخدمة (الوقت في النظام).

7- احتمال أن ينتظر العميل الواصل إلى البنك للحصول على الخدمة.

8- احتمال وجود عميلين في النظام.

9- احتمال ان ينتظر العميل لأكثر من ستة دقائق في صف الإنتظار.

10- احتمال أن ينتظر العميل لأكثر من ثلاثة دقائق في النظام (من وصوله وانضمامه في الطابور ولحين انتهاء خدمته).

11- ما هو احتمال أن ينتظر العميل في الطابور لأقل من ستة دقائق.

12- ما هو احتمال أن ينتظر العميل لأقل من ثلاثة دقائق في النظام .

1- P $= \lambda/\mu = 25/30 = 0.83$ 83%

2- Po $= 1-\lambda/\mu = 1-0.83 = 0.17$ 17%

3- Lq $= \lambda^2/\mu(\mu-\lambda) = 625/150 = 4.16$ Customers

4- L $= Lq + \lambda/\mu = 4.16 + 0.83 = 5$ Customers

5- Wq $= Lq/\lambda = 4.16/25 = 0.166$ hour $= 0.166 \times 60 = 10$ minutes

6- W $= Wq + 1/\mu = 10 + 60/30 = 12$ minutes

7- Pw $= \lambda/\mu = 25/30 = 0.83$

8- Pn $= (\lambda/\mu)^N Po = (25/30)^2 \times 0.17 = 0.118 \simeq 12\%$

9- Wq(t) $= P e^{-t/w} = Wq(6) = 25/30\, e^{-6/12}$

$= 0.833 \times 0.606 = 0.505 = 50.5\%$

10- W(t) $= e^{-t/w}$, $W(3) = e^{-3/12} = 0.778 = 77.8\%$

11- $1\text{-}W_q(t) = 1-Pe^{-t/w} = 1-0.505 = 0.495 = 49.5\%$

12- $1\text{-}W(t) = 1-W(3) = 1-e^{-t/w}$

$= 1-0.778 = 0.222 = 22.2\%$

Multiple – Chanel Queuing Model With Poisson Arrivals and Exponential Service Times

نموذج قنوات متعدّدة لتقديم الخدمة مع توزيع بواسون (Poisson) للوصول وتوزيع اسي (Exponential) للخدمة

في أكثر الأحيان يتم توزيع الخدمة (Service) عن طريق عدد من القنوات (Channels) . في هذا النوع من النموذج إذا كان عدد العملاء (Customers) في النظام (n) أقل من عدد قنوات الخدمة (Service Channels) (S) فإن العميل الذي يصل سوف يدخل لأي قناة خدمة غير مشغولة، بعبارة أخرى فإن الطابور في هذا النموذج سوف لن يتكون إلا عندما يكون عدد العملاء في النظام أكبر من عدد قنوات الخدمة أي $S < n$، ويكون النظام في حالة التوازن عندما يكون معدل الوصول أقل من معدل مجموع تقديم الخدمة لكافة القنوات في النظام أي أن $\lambda < S\mu$.

System Assumption افتراضات هذا النظام

1- طاقة النظام غير نهائية System Capacity is Infinite .

2- عدد طالبي الخدمة غير نهائي The Number of Customers are Infinite .

3- الوصول يتبع توزيع بواسون (Poisson Distribution) .

4- وقت الخدمة يتبع التوزيع الأسي (Exponential Distribution).

5- تقدم الخدمة للعملاء بطريقة الوارد أولا تقدم له الخدمة أولاً FIFO .

Customers are served on a first-come, first-severed basis .

6- معدل تقديم الخدمة أكبر من معدل الوصول للقناة الواحدة (أي أن تقديم الخدمة مضروبا في عدد القنوات أكبر من معدل الوصول $n < S\mu$.

The average service rate multiply by number of channels is greater than the average arrival rate.

7- هناك أكثر من قناة لتقديم الخدمة .

More than channel offer service to the customers.

8- الوصول إلى الطابور وعدم الانضمام إليه ثم مغادرته قبل الحصول على الخدمة غير مسموح به .

ولإيجاد حالة التوازن في النظام يمكن استخدام المعادلة التالية :-

-1

$$Po = \left[\sum_{n=0}^{S-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{S!\,(1-\lambda/\mu)} \right]$$

2- احتمال وجود عدد $n < S$ من العناصر في النظام (عدد القنوات أكبر من عدد العناصر في النظام) .

$$P = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \times Po \quad \text{عندما تكون } n \leq s$$

$$Pn = \frac{(\lambda/\mu)^n}{S!\,S^{n-s}} \times Po \quad \text{عندما تكون } n \geq s$$

3- متوسط عدد العملاء أو العناصر في الطابور (Lq) .

$$Lq = \frac{Po(\lambda/\mu)^S P}{S!\,(1-P)^2}$$

4- متوسط عدد العملاء أو العناصر في النظام (L).

$$L = Lq + \lambda/\mu$$

5- متوسط الوقت الذي يقضيه العميل أو العنصر في الطابور (Wq) .

$$Wq = \frac{Lq}{\mu}$$

6- متوسط الوقت الذي يقضيه العميل أو العنصر في النظام (W) .

$$W = Lq + 1/\mu$$

مثال:

إذا كان معدل الوصول إلى إحدى محطات الوقود يتبع توزيع بواسون (Poisson) وبمتوسط قدره 18 سيارة في الساعة وإن وقت تقديم الخدمة يتبع التوزيع الأسي (Exponential) وبمتوسط قدره 10 دقائق للسيارة الواحدة وإن هنالك أربعة مضخات للوقود.

والمطلوب :-

1- احتمال حالات التوازن .

λ = 20 سيارة

القناة الواحدة μ سيارات = 60/10 = 6

أي أن $18 < 4 \times 6 \leftarrow \lambda < \mu s$

ومن الجداول الإحصائية ذات العلاقة بإيجاد (Po) عندما تكون هناك أكثر من قناة نلاحظ أن قيمة (Po) المقابلة لقيمة λ / $s\mu$ أي 0.75=18/24 والمقابلة في نفس الوقت لعدد القنوات البالغة أربعة تساوي 0.0377 .

احتمال وجود عدد القنوات أكبر من عدد العملاء في النظام أي (n<s) .

في هذه الحالة حالات التوازن تكون كما يلي :-

$$P_n = \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} \times P_o$$

$$P_1 = \frac{(18/6)^1}{1!} \times 0.0377 = 0.1131$$

$$P_2 = \frac{(18/6)^2}{2!} \times 0.0377 = 0.16965$$

$$P_3 = \frac{(18/6)^3}{3!} \times 0.0377 =$$

في حالة عدد القنوات أقل من عدد العملاء في النظام فإن حالات التوازن في النظام تكون كما يلي:-

$$P_n = \frac{(\lambda / \mu)^n}{S!\, S^{n-s}} \times P_o$$

$$P_4 = \frac{(18/6)^4}{4!\,(4)^0} \times 0.0377 = 0.127$$

$$P_5 = \frac{(18/6)^5}{5!\,(4)^1} \times 0.0377 = 0.019$$

$$P_6 = \frac{(18/6)^6}{6!\,(4)^2} \times 0.0377 = 0.038$$

متوسط عدد السيارات في الطابور (Lq) :-

$$Lq = \frac{0.0377\,(18/6)^4\,(18/24)}{4!\,(1-18/24)^2} \quad 1.527$$ سيارة

Constant Service Time Model:

نموذج ثبات وقت تقديم الخدمة:

هناك بعض الأنظمة التي يكون فيها تقديم الخدمة ثابتا (Constant) بدلا من التوزيع الأسي (Exponential Distribution) ومثال ذلك خطوط الإنتاج في المشروبات وصناعة الأدوية وكذلك غسيل السيارات بالطريقة الأوتوماتيكية، وفي هذه الحالة فإن L، Lq، W، Wq تكون أقل مما هي في النماذج الأخرى التي تكلمنا عنها سابقا وفي الحقيقة فإن متوسط طول خط الإنتظار Average Queue Length وكذلك متوسط وقت الإنتظار Average Waiting Time في الطابور قد تنخفض إلى النصف في حالة ثبات وقت تقديم الخدمة (Constant Service Time).

والمعادلات المستخدمة في هذا النموذج هي كما يلي:-

Equations for the Constant Service Time Model

1. Average Length of the queue. (متوسط طول الطابور)

$$Lq = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu-\lambda)}$$

2- Average Waiting Time in the queue . (متوسط وقت الإنتظار في الطابور)

$$Wq = \frac{\lambda}{2\mu (\mu - \lambda)}$$

3- Average number of customers in the system. (متوسط عدد العملاء(العناصر) في النظام

$$L = Lq + \lambda/\mu$$

4- Average time in the system. (متوسط وقت الإنتظار في النظام)

$$W = Wq + 1/\mu$$

مثال :-

يحتاج مصنع الإسمنت في الفحيص للمادة الترابية الحمراء في إنتاجه وهو يمتلك عدد من سيارات الشحن لهذا الغرض، والتي تصل معبأة إلى المصنع بتلك المادة ، تنتظر هذه السيارات (سيارات الشحن) بمعدل 20 دقيقة قبل البدء بعملية إفراغها. وإن تكاليف انتظار السائق وكلفة الوقت الضائع (وقت الإنتظار) يكلف 90 دينار في الساعة. وقد قررت الشركة أن تستخدم أجهزة أوتوماتيكية جديدة في عمليات التفريغ لتخفيض وقت الإنتظار، حيث تستطيع من تفريغ 15 سيارة شحن في الساعة أي بمعدل 4 دقائق لكل سيارات شحن. سيارات الشحن تصل بتوزيع Poisson Distribution وبمعدل 10 سيارة شحن في الساعة. علما بأن كلفة استهلاك هذا النظام الجديد هو 5 دنانير لكل سيارة شحن.

والمطلوب:

هل تقترح أن يستخدم المصنع هذه الأجهزة الأوتوماتيكية الجديدة؟ أم لا؟

الحل :-

كلفة الإنتظار للدقيقة الواحدة للنظام الحالي 90/60 = 1.5 دينار .

كلفة الإنتظار لسيارة الشحن الواحدة = 20 × 1.5 = 30 دينار في النظام الجديد (New System) .

Average Waiting time in queue (متوسط وقت الإنتظار في الطابور للنظام الجديد)

$$Wq = \frac{\lambda}{2\mu(\mu-\lambda)} = \frac{10}{2(15)(15-10)} = \frac{10}{150} = \frac{1}{15} \text{ Hour} = 4 \text{ minutes}$$

كلفة الإنتظار لسيارة الشحن في النظام الجديد = 4 × 1.5 = 6 دينار.

مقدار التخفيض = 30 – 6 = 24 دينار .

24 – 5 كلفة استخدام النظام الجديد لسيارة الشحن = 19 دينار صافي مقدار التخفيض.

إذاً يفضل استخدام النظام الجديد لأنه أقل كلفة .

Finite Population Model:

نماذج محدودية العناصر / العملاء:

في كثير من الأحيان هناك عدد محدود من العناصر التي تطلب الخدمة ــ مثلا مقدم خدمة مسؤول عن تصليح خمسة مكائن في مصنع ما . أو إحدى الردهات في أحد المستشفيات ذات 15 سرير. والاختلاف في هذا النموذج هو أن هناك علاقة غير مستقلة بين طول الطابور ومعدل الوصول. فمثلا إذا كانت الأسرة في المستشفى ممتلئة معنى ذلك أن معدل الوصول سوف ينخفض إلى الصفر.

System Assumption افتراضات هذا النظام

1- There is only one server مقدم خدمة واحد .

2- The population of units seeking service is finite العناصر التي تطلب الخدمة محدودة .

3- Arrival follow a Poisson distribution, While service times are Exponentially distribution.

(الوصول يتبع بواسون والخدمة تتبع التوزيع الأسي)

4- Customer are served on first-come, first-served-basis.

(تقدم الخدمة للعملاء(العناصر) الوارد أولا يخدم أولا)

Equations for the finite population model.

1- Probability that the system is empty .

$$Po = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!}\left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^{n}}$$ **Where N= Size of the population**

2- Average length of the queue (متوسط طول الطابور) .

$$Lq = N - \left[\frac{\lambda + \mu}{\lambda}\right](1 - Po)$$

3- Average number of customers (units) in the system (متوسط عدد العملاء في النظام).

$$L = Lq + (1 - Po)$$

4- Average waiting time in the queue (الصف)متوسط الوقت في الطابور.

$$Wq = \frac{Lq}{(N-L)\lambda}$$

5- Average time in the system (متوسط الوقت في النظام).

$$W = Wq + \frac{1}{\mu}$$

6- Probability of (n) units in the system.

(احتمال وجود عدد من العناصر في النظام ولتكن 2 أو 3 .....)

$$Pn = \frac{N!}{(N-n)!}\left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^{n} Po \quad \text{For } n = 0,1,\ldots..N$$