محاضرة الخامسة(5)

4.1.تعظيم دالة المنفعة :

إن المستهلك الرشيد هو الذي يحاول الحصول على الكميات من السلع **X وY التي** تمكنه من الحصول على أكبر إشباع ممكن . فالمشكلة التي يحاول حلها تتمثل في تعظيم دالة منفعته . فهو لا يستطيع أن يشتري كمية أكبر من X وY،أكثر مما يسمح له دخله ، أي الكميات التي يشتريها ،تكون محدودة في إطار دخله . ليكن **R** هو دخل المستهلك و P_x **عبارة عن سعر السلعة X و P_y سعر السلعة Y.و إذا** افترضنا بأن كلا من الدخل و أسعار السلع ثابتة و أن هذا المستهلك ينفق كل دخله R في شراء السلعتين **X وY** فإن قيد الميزانية يكون: $R = X.P_x + Y.P_y$ ، و منه فإن المستهلك يحاول أن يبحث عن التوليفة أو التركيبة من السلعتين **X وY و التي تجعل دالة المنفعة** $U= f(x , y)$ أعظم ما يمكن و يحقق في آن واحد قيد الميزانية .

1.4.1.طريقة التعويض :

يمكن تعظيم دالة المنفعة بالنسبة للمستهلك عندما يحصل هذا الأخير على تلك التوليفات التي تجعل دالة المنفعة $U= f(x , y)$ أعظمية و تحقق في نفس الوقت معادلة الميزانية : $R = X.P_x + Y.P_y$ و من معادلة الميزانية يمكن الحصول على قيمة **Y**:

$$Y = \frac{R-X.Px}{Py}$$

$$Y=R-PX^{x}/P_{Y}$$

تعوض Y بقيمتها في دالة المنفعة أي : $U= f\left(x , \frac{R-X.Px}{Py} \right)$

دالة المنفعة في هذه الحالة تشتمل على متغير مستقل واحد فقط و هو **X** و يكفي تعظيم هذه الدالة بالنسبة لـ **X**.

و للشرط الأول (اللازم)لأجل أن يكون للمنحنى نقطة عظمى هو: $U'_x = 0$ **أما للشرط الثاني (الكافي)** هو : $U''_x < 0$

مثال :لنفرض أن دالة المنفعة: $U= f(x , y)= 5 X. Y$ **وأن** $P_y =2$ **و** $P_y =1$ **و** = R 20

المطلوب : تعظيم دالة المنفعة بإتباع طريقة التعويض .

الحل :تكتب معادلة الميزانية بالشكل التالي :

$$R = X.P_x + Y.P_y = 20 = X + 2Y$$

و منه فإن : $Y = \frac{20-X}{2}$

نقوم بالتعويض عن قيمة Y **في تابع المنفعة** : $U = 5X.\left(\frac{20-X}{2}\right) = 50X - 2.5X^2$

الشرط اللازم لتعظيم هذه الدالة يجب أن تكون المشتقة الأولى معدومة :

$$U'_X = 50 - 5X = 0$$

ومنه $X = 10$

و بالتالي فإن : $Y = \frac{20-10}{2} = 5$ **.الشرط الكافي** : $U''_X = -5 > 0$

2.4.1.طريقة مضاعف لقرانج (Lagrange):

لنضع الدالة التالية التي تسمى بدالة لقرانج و هي

$$L = f(x, y, \lambda) = U(x, y) + \lambda\,(R - X.P_x - Y.P_y)$$

حيث تمثل λ المتغير الإضافي الذي يسمى مضاعف لقرانج .

إذا أردنا تعظيم دالة المنفعة $U = f(x, y)$ يجب تحقيق الشرط اللازم و الشرط **الكافي** .

G **الشرط اللازم :**

يتمثل في مساواة المشتقات الجزئية لدالة لقرانج بالنسبة ل λ، X، Y **بالصفر أي أن** :

$$1)\ \frac{\delta L}{\delta x} = 0 \quad \rightarrow U'_X - \lambda.P_x = 0$$

$$2)\ \frac{\delta L}{\delta y} = 0 \quad \rightarrow U'_y - \lambda.P_y = 0$$

$$3)\ \frac{\delta L}{\delta \lambda} = 0 \quad \rightarrow R - X.P_x - Y.P_y = 0$$

و بحل هذه المعادلات الثلاث نحصل على قيمة كل من : λ، X، Y و بالتعويض في الدالة $U= f(x , y)$ نحصل على قيمة U **المنفعة العظمى . و لمعرفة ما إذا** كانت هذه القيمة هي العظمى يجب أن يتحقق الشرط الكافي .

ملاحظة هامة :

من المعادلتين 1 **و** 2 يمكن **أن** نكتب: $UMx/_{Px} = UMy/_{Py}$ أو :$UMx/_{UMy} =$ $Px/_{Py}$

شرط تعظيم المنفعة أو الإشباع وتسمى $UMx/_{Px}$ المنفعة الحدية للنقود بالنسبة **للسلعة** X و$UMy/_{Py}$ المنفعة الحدية للنقود بالنسبة للسلعة Y. وإذا كانت متساوية هو

هب نفسها مضاعف لاغرانج λ ونكتب : $\lambda = UMx/_{Px} = UMy/_{Py}$

يجب أن تكون متساوية بالنسبة لجميع السلع ، إذا كان المستهلك يريد الحصول **على أقصى إشباع ممكن** . أي أن المستهلك العقلاني سيوزع دخله بالشكل الذي تتساوى فيه نسبة المنفعة الحدية إلى السعر بالنسبة لكل سلعة و بذلك تكون منفعته الكلية في حدها الأقصى .

أما $UMx/_{UMy} = Px/_{Py}$ تعني ان النسبة بين المنافع الحدية للسلع عند النهاية العظمى لدالة المنفعة يجب أن تكون مساوية للنسبة بين اسعارها .

G **الشرط الكافي :**

للتأكد من أن القيم التوازنية السابقة تمثل فعلا نهاية عظمى لدالة المنفعة و ليس نهاية صغرى . نختبرها عن طريق الشرط الكافي و مؤداه أن يكون **المحدد الهيسي** الذي يرمز له بالرمز Δ أكبر من الصفر .و بفك قيمة المحدد نجد أن:

$$\Delta = \begin{matrix} Lxx & Lxy & Lx\lambda \\ Lyx & Lyy & Ly\lambda \\ L\lambda & L\lambda & L\lambda \end{matrix} > 0$$

مثل:

لتكن دالة المنفعة التالية: $U= f(x , y)= 5 X. Y$ **وأن** $P_y =2$ **و** $P_y =1$ **و** $20 = R$

المطلوب : تعظيم دالة المنفعة .

الحل : لتعظيم دالة المنفعة نستعمل مضاعف لقرانج أي أن :

$$L = f(x, y, \lambda) = U(x, y) + \lambda(R - X.P_x - Y.P_y)$$

$$= 5X.Y + (20 - X - 2Y)\lambda$$

☒ **الشرط اللازم :**

و يتمثل في مساواة المشتقات الجزئية بالصفر أي أن :

1) $\frac{\delta L}{\delta x} = 0 \rightarrow U'_X - \lambda.P_x = 0 \rightarrow 5y - \lambda = 0$

2) $\frac{\delta L}{\delta y} = 0 \rightarrow U'y - \lambda.P_y = 0 \rightarrow 5xy - 2\lambda = 0$

3) $\frac{\delta L}{\delta \lambda} = 0 \rightarrow R - X.P_x - Y.P_y = 0 \rightarrow 20 - x - 2y = 0$

من (1) **و**(2) **نجد** : $Y = \frac{\lambda}{5}$ و $X = \frac{2\lambda}{5}$

$$Y = \frac{20-10}{2}$$

بتعويض **X وY في** (3) **نحصل على** : $\lambda = 25$ $\leftarrow$ $20 - \frac{2\lambda}{5} - 2\frac{\lambda}{5} = 0$ $\leftarrow$ $20 - x - 2y = 0$

ومنه نجد: $X = \frac{2(25)}{5} = 10$ و $Y = \frac{25}{5} = 5$ و $U = 250$

وحتى تكون هذه القيم هي التي تحقق للمستهلك أكبر منفعة يجب **أن** يتحقق الشرط الثاني و هو الشرط الكافي .

☒ **الشرط الكافي :**

حتى يتحقق هذا الشرط يجب أن تكون قيمة المحدد أكبر من الصفر .

$$\Delta = \begin{vmatrix} Lxx & Lxy & Lx\lambda \\ Lyx & Lyy & Ly\lambda \\ L\lambda & L\lambda & L\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

و بفك قيمة المحدد نجد أن :$\Delta = 20 > 0$

و بذلك نستطيع أن نقول بأن :

$X= 10$ ، $Y=5$