# الفصل الأول

# مدخل إلى بحوث العمليات
# ومراحل التحليل الكمي

إن علم بحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة التي شاع استخدامها في المجالات المتعددة وخاصة في إدارة الأعمال، لهذا نحاول من خلال هذا الفصل إعطاء فكرة عن طبيعة ومفهوم بحوث العمليات، وتطورها ومجالات تطبيقها والعوامل التي ساعدت على تطور بحوث العمليات.

**I- مفهوم بحوث العمليات:**

اختلفت وجهات النظر وتباينت الآراء في إيجاد تعريف محدد لبحوث العمليات، فقد عرف دانتزيج (Dantzig) بحوث العمليات " **بأنها علم الادراة أي علم اتخاذ القرارات وتطبيقاتها** "[1]، ويعد هذا التعريف تعريفا شاملا ولا يقدم مفهوما واضحا لبحوث العمليات يميزها من غيرها من المصطلحات، فبحوث العمليات ليست علم اتخاذ القرارات وتطبيقها وإنما هي أدوات تستعمل مع غيرها من الأدوات الأخرى للمساعدة في اتخاذ القرارات.

إن الخاصية التي يتميز بها هذا العلم هو إعداد نموذج علمي وعملي لنظام معين يتضمن تحديد العوامل المؤثرة و التنبؤ ومقارنة النتائج لمساعدة الإدارة في قياس دقة النظام المستخدم وبالتالي اتخاذ القرارات المناسبة والسليمة[2].

أما مورس وكمبال (Morse and Kimblall) فقد عرفا بحوث العمليات " **بأنها تطبيق الطريقة العلمية بتوفير الأساس الكمي الذي يمكن الإدارة من اتخاذ القرارات** "، ومن هذا التعريف يمكن تحديد العناصر الرئيسة لبحوث العمليات على النحو الأتي[3]:

- استعمال الطريقة العلمية؛
- الاعتماد على الأساس الكمي، وذلك باستعمال أدوات بحوث العمليات وأساليبها؛
- يمكن الإدارة من اتخاذ قرارات أكثر موضوعية.

وعلى هذا الأساس يمكننا وضع تعريف محدد لبحوث العمليات على أنها تطبيق الطريقة العلمية بتوفير الأساس الكمي وباستعمال أدوات بحوث العمليات وأساليبها كالبرمجة الخطية والبرمجة العددية، والبرمجة غير الخطية والتحليل الشبكي،..... وذلك لتمكين الإدارة من اتخاذ قرارات أكثر موضوعية.

وهناك بعض التعريفات الأخرى الذي قدمها كبار المتخصصين بهذا العلم لتحديد مفهومه[4]:

---

[1]. حامد سعد نور الشمرتي: " **بحوث العمليات مفهوما وتطبيقا**"، مكتبة الذاكرة، بغداد، 2010، ص 02.

[2]. فتحي خليل حمدان، رشيق رفيق مرعي، " **مقدمة في بحوث العمليات**"، دار وائل للنشر، ط 4، الأردن، 2004، ص 15.

[3] . حامد سعد نور الشمرتي: مرجع سابق، ص 02.

[4] . صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد:" **تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة**"، إثراء للنشر والتوزيع، الأردن، ط1، 2009. ص 14.

- تعريف (Wagner): " **بحوث العمليات هي المدخل العلمي الذي تستخدمه الإدارة التنفيذية لحل المشاكل** "؛
- تعريف جمعية بحوث العمليات البريطانية: " **تطبيق الطرق العملية لحل مشاكل معقدة في إدارة نظم كبيرة تشتمل على أفراد والآلات ومواد و رأس مال في الصناعة والأعمال والحكومة والدفاع**"؛
- تعريف جمعية بحوث العمليات الأمريكية: " **أساليب تتعلق بكيفية اتخاذ قرار عملي لتصميم وتشغيل نظم (العاملين، الآلات) والتي عادة ما تتطلب تخصيص الموارد النادرة** "؛
- تعريف حمدي طه: " **حقل علمي جديد لصناعة القرار يتصف باستخدام المعرفة العلمية من خلال جهود فرق عمل تضم في عضويتها متخصصين بمختلف المعارف بغرض الاستخدام الأفضل للموارد المحدودة** "؛

خلاصة القول بعد استعراض هذه التعريفات المختلفة، فإننا نرى أنها جميعا تتمحور حول فكرة معينة يمكن أن تصاغ بالآتي كتعريف إجرائي لبحوث العمليات: " **أساليب كمية رياضية يعتمدها متخذو القرارات من المدراء على اختلاف مستوياتهم الإدارية لغرض حل المشاكل الإدارية المختلفة في المؤسسات والشركات بكافة أنواعها الصناعية والتجارية والزراعية والخدمات عن طريق تقييم للبدائل المختلفة بصيغة علمية وطريقة منهجية منظمة ومن ثم التوصل إلى حلول مثلى** ".

## II- التطور التاريخي لبحوث العمليات:

نشأت بحوث العمليات خلال الحرب العالمية الثانية واستخدمت للمرة الأولى أثناء الحرب العالمية الثانية في عام 1940 في المملكة المتحدة حيث عهدت الإدارة العسكرية في بريطانيا إلى فريق من العلماء والباحثين وذوي اختصاصات مختلفة مهمة دراسة العمليات المرتبطة بالدفاع الجوي والبري ودراسة المشاكل الإستراتيجية والتعرف على أفضل استخدام ممكن للمعدات الحربية المتاحة[1] .

فقد عمل فريق من العلماء المتخصصين في بحوث العمليات في استغلال الموارد المتاحة من القوى العاملة والمعدات للقوات البريطانية ضد العدوان ، ثم طورت هذه العلوم وطبقتها للاستفادة منها في بقية قطاعات الحياة المختلفة مما أدى بها إلى جني ثمار ما توصلت إليه من نتائج جيدة في كل قطاعات الحياة الاقتصادية " الصناعية والزراعية

[1]. دلال صادق الجواد ، حميد ناصر الفتال:" **بحوث العمليات**"، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، الأردن ، 2008 ، ص 16 .

والخدمية "، مما حمل ببقية الدول الأخرى على الاهتمام بهذا العلم ومنها الولايات المتحدة الأمريكية التي هي الأخرى استفادت من تطبيقاته في قطاعات الحياة الأخرى بعد أن أسهمت في تطوير بقية الغازه ومواصلة اكتشافها [1].

وفي هذه الفترة أيضا ظهر الاهتمام بشكل جدي بدارسة النمو الاقتصادي لتلك البلدان وبذلك استخدمت " البرامج الخطية " التي تعد إحدى أساليب بحوث العمليات في تخصيص موارد أو طاقات محدودة للحصول على أهداف معينة، وفي الحقيقة لقد تم تطوير الأساليب الرياضية لتشمل ميادين واسعة من المتغيرات المؤثرة في المشاكل المدروسة. وبذلك ساعدت هذه الأساليب على حسن استخدام هذه الموارد للحصول على نتائج أفضل مما لو أضيفت موارد جديدة. ومما ساعد على حل المشاكل المعقدة تطور علوم الحاسب وظهور الحاسب الإلكتروني وتطوره السريع وتطور نظم تخزين المعلومات واستخدام الحاسبات على نطاق واسع إلى سرعة تطوير أساليب بحوث العمليات حيث أن النماذج الرياضية قد تكون نماذج معقدة غالبا وتتضمن عمليات حسابية كثيرة مما يعتذر حلها يدويا وبدون تطور هذه العلوم واستخدام الحاسبات ما أمكن تطبيق أساليب بحوث العمليات وتطويرها في شكلها الحالي حيث ساعدت الحاسبة في حل النماذج المعقدة في وقت قصير وبدقة.

وتهتم بحوث العمليات بدارسة مشاكل الأمثلية (optimization problems) التي تهدف إلى تعظيم أو تدنية دالة الهدف التي تمثل عدد محدد من المتغيرات (أو الدوال) بحيث تكون هذه المتغيرات مستقلة عن بعضها البعض أو مرتبطة ببعضها من خلال أحد أو مجموعة من القيود، لقد عرفت أساليب الأمثلية منذ 150 عام سبقت وطبقت في كثير من المجالات سواء الاقتصادية منها أو الهندسية أو الفيزياء. وقد أعطت النظرية الكلاسيكية في تحديد الأمثلية نتائج رائعة في مجال النظرية الكلاسيكية للإنتاج والاستهلاك. إلا أنه في الآونة الأخيرة ظهرت حالات مهمة في مجال تحديد الأمثلية في المجال الاقتصادي والعسكري والمالية العامة والتصنيع يصعب حلها في الأسلوب الكلاسيكي لتحديد الأمثلية مما أدى إلى تطوير هذه الأساليب ضمن ما يعرف في مشاكل البرمجة الرياضية التي تعد إحدى أساليب بحوث العمليات فظلا عن الأساليب الاحتمالية. وبذلك فهي تدور حول استخدام التحليل الكمي لمساعدة الإدارة على اتخاذ القرارات مستخدمة الأساليب الرياضية المتقدمة والأدوات العلمية

[1]. حامد سعد نور الشمرتي ، مرجع سابق. ص 01 .

لحل تلك المشاكل التي تتعلق بالعمليات الخاصة بأي نظام يهدف تقديم الحل الأمثل لهذه المشاكل[1].

**III- أسباب ظهور بحوث العمليات ووظائفها:**

يمكن إجمال أسباب ظهور وتطور أساليب بحوث العمليات واستخدامها على نطاق واسع اليوم بالآتي[2]:

- إن المدراء في عالم اليوم يحتاجون إلى وسائل تساعدهم في اتخاذ قرارات أكثر رشدا وعقلانية بعد أن تعقدت المشاكل وتضخمت وأصبحت متداخلة ومتشعبة، إن أسلوب الارتجال والحكم الشخصي لوحده لا يكفيان للتصدي لهذه المشاكل وحلها بطريقة فعالة، وأساليب بحوث العمليات تمثل أداة فاعلة في أيدي هؤلاء المدراء؛
- إن الرغبة في الوصول إلى حلول مثلى سواء كانت تعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف يقتضي اعتماد أساليب علمية دقيقة، فليس بالإمكان اعتماد التجربة والخطأ في مجال الإنتاج والتوزيع وغيرها من العمليات حيث أن عالم اليوم لم يعد فيه متسع لاتخاذ قرارات غير صائبة ومن ثم تعديلها بدون تكاليف عالية، بعبارة أخرى يجب أن يكون القرار صائبا من أول مرة؛
- النجاح الباهر الذي تحقق في العمليات العسكرية أثناء الحرب العالمية الثانية وغيرها من الحروب في مجال اختيار الأسلحة المناسبة أو توزيع القطعات العسكرية والقيام بأعمال الدفاع المدني أثناء الحروب وكذا تطوير الأسلحة الجديدة، كل هذا شجع على تطبيق نفس الأساليب في الأعمال المدنية التي أعطت بدورها نتائج ممتازة؛
- التوسع الكبير في استخدام أجهزة الحاسوب التي تتسم بالسرعة العالية والدقة الأمر الذي أدى إلى حل النماذج التي تحتوي على معادلات معقدة وكثيرة المتغيرات، مما ساعد في توسع وازدياد التطبيقات لبحوث العمليات في حل المشاكل الإدارية. كذلك فإن تطوير البرمجيات الكثيرة التي تسهل كثيرا حل المشاكل المختلفة قد ساهم في تطوير المناهج المختلفة في هذا العلم ووفر وسيلة مساعدة للطلاب و الباحثين؛
- حاجة العلوم المختلفة الأخرى لأساليب بحوث العمليات فلا يوجد تخصص تقريبا إلا وتجد أن بعض هذه الأساليب على الأقل موجودة في مناهجه فالحاسوب والهندسة بكل

---

[1]. محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني: " **بحوث العمليات**"، دار وائل للنشر، ط2، الأردن، 2011، ص 12.

[2]. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق. ص 16.

فروعها وإدارة الأعمال والرياضيات والإحصاء وغيرها من العلوم تعتبر بحوث العمليات واحدة من أهم موادها الدراسية؛

- التقدم التكنولوجي المتسارع؛
- تطور المنشآت الصغيرة وزيادة المنظمات الصناعية والزراعية والتجارية والإدارية والإجتماعية والحيوية الأخرى التي استخدمت التحليل الكمي لمعالجة الكثير من المشكلات التي واجهتها[1]؛
- إستمرار كثير من الباحثين في بحوثهم، وقد أدى ذلك إلى إبتكار الكثير من أساليب بحوث العمليات حيث إبتكر جورج دانتزج ( Dantzig Gearge) طريقة السمبليكس لحل نموذج البرمجة الخطية في عام 1947 نتيجة استمراره في البحث.

يمكن أن نجمل الوظائف الرئيسية لأساليب بحوث العمليات في ميدان الأعمال كالآتي[2]:

- تسهيل عملية اتخاذ القرار ومساعدة المدراء ولكن ليس إحلال الحلول محلهم؛
- توفير حلول لمختلف المشاكل الإدارية؛
- تعتبر أداة فعالة في مجال البحث العلمي في ميادين الأعمال؛
- تساعد في تخصيص الموارد بشكل فاعل على الاحتياجات الكثيرة؛
- المساعدة في اختيار الاستراتيجيات المختلفة في الإنتاج والتسويق والتمويل؛
- المساعدة في تخفيض التكاليف في كثير من القرارات الإدارية؛
- يوفر أداة مهمة لدراسة ردود الفعل وتحليل الحساسية للكثير من القرارات المتخذة.

## IV- شروط تطبيق بحوث العمليات:

إن اساليب بحوث العمليات كافة يمكن أن تطبق في مختلف المؤسسات الإنتاجية منها والخدمية، بشرط توفر على النحو الآتي[3]:

- **محدودية الموارد:**

وتعني أن الموارد التي تستعملها المؤسسة سواء كان ذلك في العملية الإنتاجية أم التجارية وما شابه ذلك تتصف بكونها محدودة الكمية من حيث توفرها وسهولة الحصول عليها، بمعنى أخر أن الموارد المتوفرة تحت تصرف المؤسسة لا يوجد منها كميات كبيرة إلى درجة بحيث يمكن الحصول عليها في أية لحظة ومن دون عناء وكلفة ، وينطبق هذا الشرط على: الموارد

---

[1]. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري: " **بحوث العمليات والأساليب الكمية نظرية وتطبيق**"، دار جليس الزمان، عمان، 2008. ص 15.

[2]. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق. ص 17.

[3]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص ص: 04-05.

المالية، الموارد البشرية ذات الكفاءة العالية، الموارد الأولية، مساحات الأراضي ذات الموصفات النادرة ( يتواجد فيها النفط أو مناجم و الذهب ..).

- **تعدد البدائل:**

يقصد بهذا الشرط أن هناك أكثر من بديل أو طريقة يتم بموجبها استغلال المورد المتوفر، فعند الحديث عن المستلزمات الأساسية لعملية الإنتاج وبالتحديد عن المواد الأولية الداخلة في صنع المنتج، يعني هذا الشرط أن هناك أكثر من طريقة لاستغلال هذه المواد الأولية، ومن الجدير بالذكر هنا إن اختيار البديل الأفضل أو الأمثل يخضع لمعايير متعددة أهمها أن يحقق البديل أعلى الفوائد والمنافع أو اقل التكاليف والخسائر وهو ما يعرف بالبديل الأمثل.

**V- المجالات التطبيقية لبحوث العمليات:**

يوجد العديد من المجالات التطبيقية لبحوث العمليات في الكثير من النواحي الإقتصادية والصناعية والزراعية والتجارية ومن أهمها[1]:

- **الإدارة الصناعية:**

حين تتعامل المصانع مع الإنتاج فهناك مشكلتان تظهران وهما إما تعظيم الأرباح أو تقليل التكلفة ولحل هاتان المشكلتان نستخدم الأساليب الكمية في الحل ويتم تطبيق بحوث العمليات أيضا في تحديد كمية الإنتاج وزيادة الطاقة الإنتاجية والسيطرة على المخزون.

- **الإدارة العسكرية:**

تستخدم بحوث العمليات في هذه الناحية بحيث تحدد أفضل الطرق للنقل بأقل الخسائر الممكنة وأيضا وضع التكتيك الدفاعي الذي يعتمد على أسلوب البرمجة الخطية.

- **الإدارة الزراعية:**

تستخدم في التوزيع الأمثل للمياه على الأراضي الزراعية ومساعدة البلدان التي تقل فيها الموارد المائية في السيطرة على المخزون المائي وتوزيعه بشكل أفضل على السكان والزراعة والصناعة.

- **إدارة الخدمات:**

تستخدم بحوث العمليات في النواحي الخدمية مثل المستشفيات ووسائل النقل وبعض الدوائر الحكومية في صفوف الانتظار، وأيضا في تنظيم وصول القطارات والطائرات.

[1] . فتحي خليل حمدان:" **بحوث العمليات مع تطبيقات باستخدام الحاسوب**"، دار وائل للنشر، ط1، الأردن، 2010. ص ص: 18-19.

- **إدارة التسويق:**

تستخدم بحوث العمليات في التسويق بحيث نستطيع التنبؤ بالطلب عند مستويات المخزون المتدنية واختيار المنتج الذي يحقق أعلى عائد وفي تحديد الأساليب التسويقية للمنتجات.

- **الإدارة المالية:**

تطبق بحوث العمليات في الإدارة المالية لمساعدة المالي في نواحي عديدة منها التخطيط لزيادة أرباح المنظمة والتخطيط للمشروع وزيادة رأس المال بالإضافة إلى تحليل التدفق النقدي.

VI- **مراحل التحليل الكمي:**

تقوم المنهجية العلمية لبحوث العمليات في عملية اتخاذ القرارات على الخطوات التالية[1]:

- **تعريف المشكلة قيد البحث:**

أي أن يتم تعريف المشكلة الذي سيتخذ القرار فيها لأن ذلك يقود إلى الهدف الذي تسعى الإدارة لتحقيقه. فلو كانت المشكلة إنتاجية تتعلق بخط إنتاجي معين فإن الهدف هو تحديد أفضل كمية إنتاجية ستنجم عن تشغيل هذا الخط بحيث تحقق الشركة أهدافها في الحصول على أعلى ربح ممكن أو تكلفة ممكنة. فتحديد وتشخيص المشكلة من المهام الأولى في عملية اتخاذ القرار الإداري.

- **بناء النموذج الرياضي:**

بعد الانتهاء من تحديد المشكلة موضوع القرار وبيان العلاقات المتداخلة فيها يتم وضع المشكلة بصيغة نماذج رياضية تمثل مكونات المشكلة المراد حلها، وتشتمل على متباينة الهدف المطلوب تحقيقه ومتباينات القيود الملازمة للمشكلة التي تحكم الإدارة في اتخاذ القرار.

- **حل النموذج:**

بعد صياغة النموذج الرياضي يتم حله لاستخراج النتائج الأولية وتحديد كونه أمثلا أم لا، فإذا لم يكن كذلك فالأمر يتطلب تطويره حتى الوصول إلى الحل الأمثل لأنه المحقق للأهداف المقترحة.

- **تطبيق وإعتماد النتائج:**

بعد الوصول إلى الحل الأمثل نظريا يتم تطبيق الحل الأمثل عمليا من خلال مجموعة الإجراءات والتعليمات الذي يقدمها متخذ القرار للعاملين للتقيد بها مراعيا توفر المهارات والمستلزمات الضرورية التي يتطلبها التنفيذ، ثم متابعة التنفيذ للتأكد من أن القرار المتخذ كان فعلا هو العلاج للمشكلة.

وبناء على ماسبق تحتاج المرحلة الأولى من مراحل الدراسة إلى تعريف واضح للمشكلة والتي تتحدد بثلاث خطوات رئيسية وعلى النحو الأتي[2]:

[1]. أكرم محمد عرفان المهتدي: " **الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية بحوث العمليات**"، دار صفاء للنشر والتوزيع، ط1، عمان، 2004، ص ص: 14-15.

[2]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص ص: 07-08.

- تحديد واضح للأهداف المراد تحقيقها من خلال الدراسة؛
- تحديد واضح للبدائل المتعلقة باتخاذ القرار؛
- تحديد واضح للمحددات أو المتطلبات اللازمة لتحقيق الأهداف.

أما المرحلة الثانية فتتطلب تحديد شكل النموذج المطلوب فإذا كان النموذج المقدر صياغته هو من صيغ النماذج الرياضية فيمكن اللجوء إلى موضوع البرمجة الخطية لدراسة المشكلة بينما إذا كانت الدراسة معقدة وكبيرة فمن الممكن اللجوء إلى نماذج المحاكاة التي تعد في هذه الحالة أكثر ملائمة.

أما المرحلة الثالثة والمتعلقة بإيجاد حل للنموذج المقترح (الحل هنا يعني إيجاد قيم المتغيرات للقرار) وهنا الحل يمثل النتيجة المثلى (Optimal) باستعمال نماذج الحل الأمثل.

أما المرحلة الرابعة فإنها تتعلق باختبار النتائج و يتم ذلك مثلا بمقارنة النتائج مع سلسلة زمنية سابقة لمتغيرات القرار التي يشملها النموذج أو بعض النتائج التاريخية، وبعدها يتم تطبيق النتائج التي تم التوصل إليها في الحياة العملية وتأخذ شكل التوجيهات أو التعليمات إلى الإدارات المختلفة للوصول إلى النتائج التي رسمت في المرحلة الأولى.

# الفصل الثاني

# البرمجة الخطية وطريقة الحل البياني

تعتبر البرمجة الخطية من المواضيع الأساسية والمهمة في بحوث العمليات وتكمن أهميتها في كونها وسيلة لدارسة سلوك عدد كبير من الأنظمة، يقدم نموذج البرمجة الخطية طريقة كفؤءة لتحديد القرار الأمثل (أو الاستراتيجية المثلى) من بين عدد كبير من البدائل، التي يخضع كل منها إلى مجموعة من المحددات والقيود، وبشكل يساهم بتحقيق أهداف الإدارة. وهي أداة بيانية ورياضية تهتم ببناء النماذج الرياضية لمشكلة من المشاكل بإحدى الطرق الآتية: طريقة البيانية، الطريقة المبسطة، طريقة النقل، طريقة التعين والتخصيص ....الخ.

**I- مفهوم البرمجة الخطية:**

تعد البرمجة الخطية إحدى الوسائل المهمة في حل كثير من المشاكل الإدارية والإقتصادية والعسكرية، وقد ازداد تطبيقها في الآونة الأخيرة نظرا للتقدم التكنولوجي الذي ساعد على تطوير الحسابات الالكترونية المستخدمة في حل مشاكل البرمجة. تم تطويرها وإستخدامها بصورة فعلية في سنة 1947 على يد العالم الرياضي جورج دانتزنغ (George Dantzing)، لحل بعض مشكلات التخطيط في السلاح الجو الأمريكي، في حين أن العالم الرياضي الفرنسي جين بابتستي فورير (Jean Baptise Fourier) قد تنبه لمساهماتها المحتملة في عام 1923. وقد كان أول استخدام أو تطبيق للبرمجة الخطية من قبل الإقتصادي جورج ستلجر(George Stigler) وذلك في بداية الأربعينات، حيث هدف إلى تحديد مكونات الغذاء اليومي (Diet) والتي ستزود الجسم بالحد الأدنى من احتياجاته من الفيتامينات والحديد والمواد الأخرى، وبأقل تكلفة ممكنة[1].

ويمكن تعريف البرمجة الخطية بأنها أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد والإمكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة، أي يكون توزيعها مثاليا[2].

إن تعبير **البرمجة** يعني وضع خطوات لحل مسألة أو موضوع ما لبلوغ وتحقيق هدف معين، أما تعبير **خطية** فيعني افتراض تغير الظاهرة التي نقوم بدراستها بصورة خطية (على شكل خط مستقيم) وكثيرا ما يستخدم هذا الافتراض لتقريب الواقع إلى صياغة رياضية سهلة.

ومما تجدر الإشارة إليه هو أن الغاية من تطبيق أسلوب البرمجة الخطية هي الوصول إلى حل نموذج البرمجة الخطية (ونموذج البرمجة الخطية هو عبارة عن مجموعة من المعادلات والمتباينات بالإضافة إلى دالة الهدف)[3]، ولا تنسى أن لكل مجموعة من المعادلات حلا، وعادة ما تكون للمعادلات

---

[1]. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 25.

[2]. عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي: " **المدخل لبحوث العمليات**"، دار وائل للنشر، الأردن، 2001، ص 21.

[3] - Gérald Baillargeon ,"**Programmation linéaire appliquée** ", les édition SMG ,Québec , Canada,1996 .p 05 .

الآنية حلول أي إيجاد قيم المتغيرات، وفي حالة حل نموذج البرمجة الخطية دائما نسعى إلى إيجاد الحل الأمثل وتكون الحلول على ثلاث أنواع [1]:

- **الحل:** وهو حل ممكن الوصول إليه في أية مجموعة من المعادلات.
- **الحل الممكن:** وهو الحل الذي يمكن إيجاده بعد التوصل إلى الحل في الحالة الأولى وهذا الحل يحقق القيود كافة بشكل عام.
- **الحل الأمثل:** وهو الحل الذي يمكن إيجاده بعد التوصل إلى الحل الممكن، وهذا الحل يحقق القيود كافة بوجود دالة الهدف.

وبهذا الصدد يجب التأكد من أن الحل الممكن لا يتحقق بعد وجود الحل، ولا يمكن تحقيق الحل الأمثل إلا بعد أن يتحقق الحل الممكن.

**II- متطلبات وفروض نموذج البرمجة الخطية:**

**II-1- متطلبات استخدام البرمجة الخطية:**

تتطلب مشكلة البرمجة الخطية خمس خصائص أساسية هي[2]:

- **تحديد الهدف:** أي ما تسعى لتحقيقه وهو إما زيادة الأرباح أو تقليل الكلفة، معبر عنه بصيغة رياضية يطلق عليها دالة الهدف وتصاغ دالة الهدف بالشكل التالي:

**حالة تعظيم** : $Max\ (Z) = 2x + 3y$

**حالة تدنئة** : $Min\ (Z) = 2x + 3y$

- **توفير عدد من البدائل:** تستخدم البرمجة الخطية عندما تكون لدينا بدائل لحل المشكلة فإذا كان هناك بديل واحد لحل المشكلة إذاً لا داعي لاستخدام البرمجة الخطية؛
- **محدودية الموارد:** نحتاج لاستخدام البرمجة الخطية عندما تكون الموارد محددة (نادرة) كالموارد البشرية، أو المواد، أو ساعات اشتغال الآلات.وهي بمثابة شروط لتحقيق الهدف، فإذا كان لدينا 300 ساعة في القسم الأول وكنا نحتاج لساعتين لإنتاج المنتوج الأول وثلاثة ساعات لإنتاج المنتوج الثاني فيعبر عن المشكلة كآلاتي:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 300$$

---

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 10.

[2]. محمد دباس الحميد، محمد العزاوي: " **الأساليب الكمية في العلوم الإدارية**"، دار اليازوري، الأردن، 2013. ص ص: 09-10.

- **وجود علاقة خطية:** الخطية في البرمجة يجب أن تتوفر في دالة الهدف وفي القيود (الموارد)، بحيث أن أي تغير في كميات الإنتاج يؤدي إلى زيادة الأرباح أو تقليل التكليف بشكل خطي (طردي) مع زيادة كمية الإنتاج، وكذلك الموارد تستنفذ بشكل خطي مع زيادة كمية الإنتاج؛
- **القيود غير السالبة:** إن هذا الشرط يلبي إحدى فرضيات البرمجة الخطية وهو شرط عدم السلبية. ولذلك لا يمكن أن يكون أحد القيود ينتج متغيرات سالبة كما يلي:

$$2x_1 + 3x_2 \leq -300$$

**II-2- فروض نموذج البرمجة الخطية:**

تمثل الافتراضات، الشروط العلمية الواجب توفرها في المشكلة حتى نستطيع حلها بواسطة البرمجة الخطية، أو هي المتطلبات الفنية لمشكلة البرمجة الخطية وهي[1]:

- يفترض النموذج إمكانية النسبة و التناسب في كل مكوناته (دالة الهدف والقيود الفنية)؛
- تحقيق خاصية الجمع التي تعني أن القيمة الكلية لأي مؤشر ما هي إلا حاصل جمع قيمه الجزئية؛
- يعالج نموذج البرمجة الخطية الحالات المتصفة بالتأكد التام، وهذا يعني أن القيم التي تأخذها مؤشرات النموذج هي كلها قيم محددة ومعروفة ولا يطرأ عليها تغيير خلال فترة الدراسة.

وهناك فروض أخرى منها ما يلي[2]:

- **الخطية:** يشترط ان تكون العلاقة في دالة الهدف والقيود علاقة خطية؛
- **المحدودية:** محدودية الموارد والأنشطة، أي أن هناك ندرة فيها وأنه لا يوجد عدد نهائي من الأنشطة البديلة والموارد المتاحة؛
- **عدم السلبية:** عدم إمكانية أن يكون حجم النشاط سالبا؛
- **الاستقلالية:** أن اختيار أي نشاط لا يستلزم بالضرورة اختيار نشاط آخر، أي استقلالية عناصر الإنتاج؛

**III- مجالات استخدام البرمجة الخطية:**

تستخدم البرمجة الخطية في كل المسائل الإقتصادية التي تهدف إلى البحث عن قيم المتغيرات الإقتصادية بهدف إيجاد أمثلية الاستخدام في وجود مجموعة من القيود المالية أو التقنية أو هما معا.

---

[1] . مكيد علي: " **بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية دروس ومسائل محلولة**"، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015. ص 10.

[2] . محمد دباس الحميد، محمد العزاوي، مرجع سابق، ص ص: 08-09 .

ومن المواضيع التي تستخدم فيها البرمجة الخطية هي مجالات العلوم الإقتصادية والمالية والتجارية وعلوم التسيير عامة كما يلي[1]:

- **في حالة التعظيم:**
  - ✓ تعظيم الأرباح؛
  - ✓ تعظيم الإنتاج؛
  - ✓ تعظيم طاقات التخزين؛
  - ✓ تعظيم إستخدام رؤوس الأموال؛
  - ✓ تعظيم إستخدام اليد العاملة.

وغير ذلك من المسائل الواقعية التي يكون هدفها التعظيم.

- **في حالة التدنئة:**
  - ✓ تدنئة التكاليف؛
  - ✓ تدنئة الخسائر؛
  - ✓ تدنئة عدد الموظفين؛
  - ✓ تدنئة الأجور الإجمالية.

كما تستخدم في الكثير من مجالات الإدارة وغير ذلك من المسائل الهادفة إلى عقلنة استخدام الموارد.

وللبرمجة الخطية تطبيقات عديدة ظهرت وما تزال تظهر كل يوم لحل الكثير من المشكلات في عالم الأعمال منها[2]:

- **التطبيقات التسويقية:** مثل اختيار وسائط الإعلانات، وبحوث التسويق؛
- **التطبيقات المالية:** مثل التخطيط المالي، تحليل الأوراق والأسهم المالية، أو اختيار المحفظة الاستثمارية؛
- **تطبيقات إدارة الإنتاج:** مثل الإنتاج المختلط ( المزيج الإنتاجي)، تخطيط الإنتاج، النقل والتخصيص، أو قرار الشراء أو الصنع.
- **مشاكل المزج؛**
- **مشاكل تخطيط المشروعات.**

وغيرها من التطبيقات التي كان للبرمجة الخطية فيها دوراً بارزاً في مساندة صانعي القرارات في منظمات الأعمال من أجل حل المشكلات التي يواجهونها في المنظمة.

---

[1] . راتول محمد: " **بحوث العمليات** "، ديوان المطبوعات الجامعية، ط2، الجزائر، 2006.

[2] . جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 27.

## IV- صياغة أو بناء نموذج البرمجة الخطية:

إن صياغة مشكلة إدارية معينة بشكل مسألة برمجة خطية تقتضي كما أشرنا سابقا تطوير نموذج رياضي يمثل الحالة أو المشكلة الإدارية، وبهذا فإنه يجب فهم الموقف الإداري أو المشكلة فهما دقيقاً وهي الخطوة الأولى لحلها، إن صياغة نموذج البرمجة الخطية يمكن أن تجمل خطواته بالآتي:

- ✓ الفهم الكامل والدقيق للمشكلة الإدارية التي يواجهها المدير ؛
- ✓ تشخيص دالة الهدف والقيود المحددة؛
- ✓ تحديد متغيرات القرار ؛
- ✓ استخدام متغيرات القرار في كتابة العبرات الرياضية لكل من دالة الهدف والقيود.

### IV-1- صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية:

من اجل صياغة نموذج البرمجة الخطية يجب توفر ثلاث مجموعات من العناصر الأساسية وهي:

- **تحديد الهدف بصورة كمية:**

ويعبر عنه بدالة الهدف وهي عبارة عند الدالة المطلوب تعظيمها أو تدنيتها وهي عادة ما تكون في صورة نقدية أو طبيعية ويتوقف ذلك على طبيعة المشكلة المطلوبة تحليلها ويجب أن يكون بالإمكان التعبير عن الهدف كمياً كأن يكون الهدف تحقيق اكبر ما يمكن من الربح أو تأمين اصغر ما يمكن من الكلفة أو توفير أعظم ما يمكن من الوقت والجهد؛

- **تحديد القيود:**

يجب أن تكون الموارد المتاحة محددة، كما يجب أن تكون تلك الموارد قابلة للقياس ويتم التعبير عنها بصيغة رياضية على شكل متراجحات أو معادلات، أو خليط منها وتسمى يالقيود الهيكلية؛

- **شرط عدم السلبية:**

إذ يجب أن تكون المتغيرات القرارية في المشكلة قيد الدراسة متغيرات موجبة أو صفرية وغير سالبة.

ويمكن وضع الصيغة العامة للبرمجة الخطية كالآتي[1]:

$$Max\_or\_Min(z)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$Subject\_to$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j (\leq,=,\geq) b_i \qquad (i=1,2,\ldots\ldots\ldots,m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,2,\ldots\ldots\ldots,n)$$

إذ أن: $a_{ij}, b_i, c_j$ ثوابت تحدد من سياق المشكلة؛

[1] . محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص 20.

Z : تمثل دالة الهدف؛

$X_j$: المتغيرات المطلوب اتخاذ القرار بحقها؛

$b_i$: تمثل الموارد المحددة؛

$a_{ij}$: كمية الموارد المحددة من النوع i واللازم تخصيصها لكل وحدة واحدة من النشاط أو الفعالية j.

$C_j$: تمثل الربح أو الكلفة نتيجة تخصيص المورد i لإنتاج وحدة واحدة من النشاط أو الفعالية j.

### IV-2- تركيب نموذج البرمجة الخطية:

وتعد مرحلة تركيب النموذج من أهم مراحل البرمجة الخطية إذ تعد مرحلة عملية أكثر منها فنية وتعتمد على خبرة الباحث ومقدرته على صياغة المشاكل بشكل نموذج برمجة خطية، ولتوضيح هذه المرحلة سنورد المثال الآتي:

**مثال رقم (01):** تنتج إحدى الشركات نوعين من السلع، نوع A ونوع B، تصنع كل سلعة على ثلاث مراحل كل مرحلة في احد الأقسام الثلاثة الموجودة في الشركة، فإذا كان تصنيع السلعة A يحتاج إلى ساعتين عمل في القسم الأول وساعة عمل في القسم الثاني وأربع ساعات عمل في القسم الثالث ويحتاج تصنيع السلعة B إلى ساعتين عمل في كل قسم كما أن عدد ساعات العمل المتاحة في القسم الأول هي 160 ساعة عمل أسبوعيا وفي القسم الثاني 120 ساعة عمل أسبوعيا وفي القسم الثالث 280 ساعة عمل أسبوعيا وإذا كان ربح الوحدة الواحدة من السلعة A هو 2 دينار ومن السلعة B هو 3 دينار.

**المطلوب:** نموذج برمجة خطية لتحديد حجم الإنتاج الأمثل من السلعتين إذا كان هدف الشركة هو الحصول على أكبر ربح ممكن.

**الحل:** لتسهيل فهم المشكلة نضعها على شكل جدول (هذه الخطوة في التمارين الأولى لتعلم الحل بسهولة).

| السلعة | الوقت اللازم للتصنيع | | | ربح الوحدة بالدينار |
|---|---|---|---|---|
| | القسم الأول | القسم الثاني | القسم الثالث | |
| **A** | 2 | 1 | 4 | **2** |
| **B** | 2 | 2 | 2 | **3** |
| **ساعات العمل المتاحة** | **160** | **120** | **280** | |

**تكوين النموذج:**

- ✓ تحديد المتغيرات المجهولة والتعبير عنها برموز جبرية، ولذلك:

  نفرض عدد الوحدات المنتجة من السلعة A هو $X_1$.

  نفرض عدد الوحدات المنتجة من السلعة B هو $X_2$.

- ✓ تحديد القيود والتعبير عنها بمعادلات أو متراجحات أو خليط منها:

والقيود هنا هي أن الوقت اللازم للتصنيع في كل قسم محدود ويجب أن نتجنب تجاوز هذا الحد، لاحظ أن الوقت اللازم للتصنيع يتوقف على الكمية المنتجة من السلعة A و السلعة B.

بالنسبة للقسم الأول: الوقت اللازم للتصنيع (المتاح) = (عدد الوحدات المنتجة من السلعة A)* (الوقت اللازم لتصنيع الوحدة الواحدة من السلعة A)+ (عدد الوحدات المنتجة من السلعةB)* (الوقت اللازم لتصنيع الوحدة الواحدة من السلعة B)، ويجب أن لا يتجاوز عدد الساعات العمل المتاحة في القسم الأول وكما في المتراجحة الآتية:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 160$$

وبنفس الطريقة بالنسبة للقسمين الثاني والثالث أيضا وكما في المتراجحات الآتية:

بالنسبة للقسم الثاني:

$$x_1 + 2x_2 \leq 120$$

بالنسبة للقسم الثالث:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 280$$

ولأن عدد الوحدات المنتجة لا يمكن أن يكون سالبا، وعلى النحو الآتي:

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

✓ تحديد دالة الهدف:

$$z = 2x_1 + 3x_2$$

وتهدف إلى انتاج الكميات المثلى من $x_1, x_2$ التي تجعل دالة الهدف Z اكبر ما يمكن Maximize ودائما تختصر بـ Max

**البرنامج الخطي:**

$$Max(z) = 2x_1 + 3x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 160 \\ x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 280 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

**مثال رقم (02):** تنتج إحدى الشركات ثلاث أنواع من عصير الفواكه في مصنعيين A و B وإن كميات الإنتاج في اليوم تقدر كالآتي:

| نوع العصير | المنتج A (لتر) | المنتج B (لتر) |
|---|---|---|
| 1 | 1500 | 1500 |
| 2 | 3000 | 1000 |
| 3 | 2000 | 5000 |

وقد أظهرت دراسة للسوق أن من المتوقع أن يكون هناك طلب في شهر جويلية يقدر بـ 20000 لتر من النوع الأول و 40000 من النوع الثاني و 44000 من النوع الثالث، وكذلك فإن كلفة تشغيل المصنع A هي 600 وحدة نقدية في اليوم و400 وحدة نقدية للمصنع B.

**المطلوب:** تحديد عدد الأيام التي يشتغلها كلا من المصنعين للوفاء بطلب السوق المتوقع في شهر جويلية مع تدنية التكاليف إلى أدنى حد ممكن (صياغة المسألة)، وكتابة البرنامج الخطي بالشكل المصفوفي.

**الحل:**

القرار هو تحديد عدد الأيام التي يشتغلها كل من المصنعين في شهر جويلية.

نفترض أن عدد الأيام التي يشتغلها المصنع $X_1$=A

نفترض أن عدد الأيام التي يشتغلها المصنع $X_2$=B

ومنه البرنامج الخطي هو :

$$Min(z) = 600x_1 + 400x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 1500x_1 + 1500x_2 \leq 20000 \\ 3000x_1 + 1000x_2 \leq 40000 \\ 2000x_1 + 5000x_2 \leq 44000 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

أما الشكل المصفوفي يكتب كما يلي:

$$Min(z) = \begin{pmatrix} 600 & 400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$s/c$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1500 & 1500 \\ 3000 & 1000 \\ 2000 & 5000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 20000 \\ 40000 \\ 44000 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**IV-3− تمارين محلولة:**

**التمرين الأول:** تتعهد إحدى الشركات بتقديم 100 كغم من مادة غذائية تتكون من مزيج ثلاث مواد: A، B،C بشرط أن يحتوي هذا المزيج على:

- ✓ 0,08% على الأقل وليس أكثر من 1,2% من الكالسيوم.
- ✓ 22% بروتين على الأقل.
- ✓ 50% ألياف في أكثر الحدود.

فإذا كانت محتويات المواد الثلاثة من العناصر الغذائية وكلفة كل منها كالأتي:

| المواد | الكمية الموجودة في كل كغم | | | الكلفة/كغم |
|---|---|---|---|---|
| | كالسيوم | بروتين | ألياف | |
| A | 0,380 | − | − | 0,0164 |
| B | 0,001 | 0,09 | 0,02 | 0,0463 |
| C | 0,002 | 0,50 | 0,08 | 0,1250 |

**المطلوب:** صياغة الحالة في شكل برمجة خطية بحيث يتم تلبية المتطلبات الغذائية وتدنية الكلفة إلى أدنى حد ممكن.

**حل التمرين الأول:** القرار هنا هو تحديد المزيج الأمثل من المواد الثلاث.

نفترض أن كمية $X_1$= A ، وكمية $X_2$ = B، وكمية $X_2$= C .

ومنه البرنامج الخطي للمسألة كالتالي:

$$Min(z) = 0{,}0164x_1 + 0{,}0463x_2 + 0{,}1250x_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ 0{,}380x_1 + 0{,}001x_2 + 0{,}002x_3 \le 0{,}012 \\ 0{,}380x_1 + 0{,}001x_2 + 0{,}002x_3 \ge 0{,}008 \\ 0{,}09x_2 + 0{,}50x_3 \ge 0{,}22 \\ 0{,}02x_2 + 0{,}08x_3 \le 0{,}50 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0$$

**التمرين الثاني:** ترغب إحدى شركات الطباعة في شراء نوعين من المطابع هما A و نوع B ، والنوع A يشغل مساحة مقدارها 40 متر مربع وتبلغ كلفة الوحدة الواحدة 2000 دينار وتحتاج إلى ثلاثة عمال يعملون لمدة 8 ساعات، أما النوع B فيشغل مساحة مقدارها 60 متر مربع وتبلغ كلفة الوحدة 6000 دينار وتحتاج إلى 4 عمال يعملون لمدة 8 ساعات . فإذا كانت المساحة المتاحة لدى الشركة هي 720 متر مربع والميزانية المخصصة لشراء المطابع هي 60000 دينار، علما بأن لدى الشركة 48 عاملا، ويمكن للمطبعة A أن تعمل بمعدل 100 ورقة في الدقيقة والمطبعة B يمكنها أن تعمل بمعدل 300 ورقة في الدقيقة.

**المطلوب** : كون نموذج برمجة خطية لتحديد العدد اللازم شراؤه من النوعين من المطابع A و B لكي تتمكن الشركة من تحقيق أكبر إنتاج.

**حل التمرين الثاني:**

$X_1$ = عدد المطابع المفترض شراؤها من قبل الشركة ومن النوع A.

$X_2$ = عدد المطابع المفترض شراؤها من قبل الشركة ومن النوع B .

ومنه البرنامج الخطي يكون كالآتي:

$$Max(z) = 48000x_1 + 144000x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 40x_1 + 60x_2 \le 720 \\ 2000x_1 + 6000x_2 \le 60000 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 48 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$$

**التمرين الثالث:** يتم فحص المنتجات الصناعية في إحدى المنشأة من قبل نوعين من المفتشين A و B (التصنيف على أساس الكفاءة في الفحص)، يتوقع أن يتم فحص ما لا يقل عن 1500 وحدة من المنتج يومياً ( 8 ساعات عمل/ يوم). فإذا علمت بأن المفتش A يستطيع فحص 20 قطعة في الساعة وبدقة 96% في حين أن المفتش B يستطيع فحص 14 قطعة وبدقة 92%، إن الأجور المدفوعة لكلا النوعين من المفتشين هي 5 وحدات نقدية في الساعة للمفتش A و 4 للمفتش B كذلك فإن عدد المفتشين الموجودين في المؤسسة هو 10 من النوع A و15 من النوع B.

**المطلوب:** تخصيص العدد الأمثل من المفتشين لإنجاز هدف المهمة وذلك بصياغة المسألة في شكل برمجة خطية.

**حل التمرين الثالث:** إن القرار هنا هو تحديد العدد الأمثل من المفتشين من كلا النوعين A وB .

نفترض أن عدد المفتشين المطلوب من النوع $X_1$=A

نفترض أن عدد المفتشين المطلوب من النوع $X_2$=B

إن الهدف سيكون تقليل الكلفة الكلية للمفتشين، علما بأن الكلفة المرتبطة بكل نوع منهم ستكون كالآتي:

كلفة الساعة الواحدة للمفتش من النوع A هي : $5 + (3 * 0,04 * 20) = 7,40$ وحدة نقدية .

كلفة الساعة الواحدة للمفتش من النوع B هي : $4 + (3 * 0,08 * 14) = 7,36$ وحدة نقدية.

دالة الهدف : $8(7,40X_1+7,36X_2) = 59,20X_1+58,88X_2$

القيد الثالث: $20*8X_1 + 14*8X_2 \geq 1500$

ومنه البرنامج الخطي يكون كالتالي:

$$Min(z) = 59,20x_1 + 58,88x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 10 \\ x_2 \leq 15 \\ 160x_1 + 112x_2 \geq 1500 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

**IV-4- تمارين مقترحة:**

**التمرين الأول:** مؤسسة إقتصادية بها 3 ورشات لإنتاج 3 أنواع من المنتوجات هي: خزائن حديدية، مكاتب إدارية، كراسي. بحيث أن كل منتوج يمر عبر الثلاث ورشات على النحو التالي:

الورشة رقم01: تجري بها عملية صناعة الهياكل، طاقة العمل القصوى بها هي: 32 ساعة عمل يوميا، ( أي 4 عمال كل عامل يشتغل 8 ساعات يوميا).

الورشة رقم 02: تجري بها عملية تركيب الملحقات، طاقة العمل القصوى بها هي: 24 ساعة عمل يوميا.
الورشة رقم 03: تجري بها عملية الإنهاء (طلاء ، تزيين ، تغليف)، طاقة العمل القصوى بها هي: 16 ساعة عمل يوميا.

هذه المؤسسة تسعى لتحقيق أكبر ربح ممكن، ولأجل ذلك بينت لها الدراسة التقنية التي قامت بها أن الوحدة الواحدة من المنتوج الأول تتطلب 4 ساعات عمل في (الورشة رقم01) و 2 ساعة عمل في (الور02) و 2 ساعة عمل في (الور03)، بينما الوحدة الواحدة من المنتوج 2 تتطلب 4 ساعات عمل في (الور01) و 4 ساعات عمل في (الور02) و 2 ساعة عمل في (الور03)، وأخيرا الوحدة الواحدة من المنتوج 3 تتطلب 5 ساعات عمل في (الور01) و 3 ساعات عمل (الور02) و 1 ساعة عمل في (الور03) .كما أن الربح الصافي للوحدة الواحدة من كل منتوج هو: المنتوج الأول: 200 دج، المنتوج الثاني: 150 دج، المنتوج الثالث: 120 دج.

**المطلوب:** أوجد الصيغة الرياضية لهذه المسألة والتي من شأنها إيجاد الكميات الواجب إنتاجها من كل منتوج لأجل تعظيم ربح هذه المؤسسة مع شكل المصفوفي.

**التمرين الثاني:** يمكن لشركة استخدام ثلاث عمليات إنتاجية (أ)، (ب)، (ج) في مصنعها لإنتاج أحد المنتوجات، للحصول على كل وحدة من المنتوج تحتاج العملية (أ) إلى 2 ساعة عمالة و 1 ساعة آلات، بينما تحتاج العملية (ب) إلى 1,5 ساعة عمالة و 1,5 ساعة آلات ، أما العملية (ج) فتحتاج إلى 1,1 ساعة عمالة و 2,2 ساعة آلات. ويجب على الشركة دفع 300 وحدة نقدية لكل ساعة عمالة و 200 ون لكل ساعة آلات لكنها لا تستطيع استخدام أكثر من 1200 ساعة آلات شهريا حيث أن ذلك هو أكبر قدر متاح في مدى القصير. إذا رغبت الشركة في إنتاج 1000 وحدة شهريا. فما هو البرنامج الخطي الذي يسمح بتحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها باستخدام العملية (أ)،(ب)،(ج)؟

**التمرين الثالث:** تصنع مؤسسة نوعين من المعاطف، معاطف للرجال معاطف للنساء، سعر بيع كل معطف رجالي 7500 دج و 8200 دج لكل معطف نسائي. وحسب متطلبات السوق لا يجب أن يتعدى إنتاج النوعين 6000 وحدة و 3000 وحدة على التوالي أسبوعيا. يتوافر لدى المؤسسة 50 عامل ويشتغل كل عامل 10 ساعات يوميا و5 أيام أسبوعيا. مدة صنع معطف النساء ضعف مدة صنع معطف الرجال وإذا أرادت المؤسسة صنع المعاطف الرجالية فقط فيمكن أن تصنع 1600 معطف في اليوم.

**المطلوب:** ما هو البرنامج الخطي الذي يسمح بمعرفة عدد المعاطف الواجبة الصنع في الأسبوع من كل نوع.

**التمرين الرابع:** السيد: " س " يعمل كمسير في مستشفى و يجب عليه توفير المكونات الغذائية الأساسية لغذاء مرضى قسم الجراحة العامة، الطبيب المكلف بالقسم أعطى له التوصيات التالية للمكونات التي يجب أن تحتوي عليها وجبة المريض وهي:

- على الأقل 50 وحدة من البروتين.
- على الأقل 15 وحدة من الفيتامينات.
- على الأقل 1200 حريرة.
- على الأكثر 100 وحدة من الدسم.

السيد: " س " لجأ إلى المختصين في التغذية للمستشفى، والذين أعطوا له الكميات التي جرت العادة شراءها من الأغذية وهي في الجدول التالي:

وسعر الأغذية في السوق كان ما يلي: حوت 45 دج للكلغ، دجاج 18 دج للكلغ، جبن 35 دج للكلغ، جزر 6 دج للكلغ ، بطاطا 5 دج للكلغ ، عجائن 8 دج للكلغ .

| المحتويات / الغذاء | حوت (100غ) | دجاج (100غ ) | جبن (100غ ) | جزر (كلغ) | عجائن (كلغ) | بطاطا (كلغ) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **البروتين** | 40 | 50 | 30 | 20 | 22 | 15 |
| **الفيتامين** | 25 | 10 | 20 | 30 | 15 | 25 |
| **الدسم** | 10 | 20 | 30 | 50 | 100 | 80 |
| **الحريرات** | 300 | 500 | 600 | 1400 | 2000 | 1800 |

**المطلوب:** إعداد البرنامج الذي يسمح بتحديد مكونات الوجبة بأقل سعر مع الحفاظ على صحة المريض.

**V- حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة الحل البياني:**

يمكن حل النموذج الرياضي بطريقة الرسم البياني عندما يكون النموذج الرياضي متكون من متغيرتين فقط ويسمى أحياناً بالطريقة الهندسية، أما استخدام هذه الطريقة في الحياة العملية معدومة لأن عدد المتغيرات التي تؤثر في اتخاذ القرارات كثيرة جداً، ولكن استخدام هذه الطريقة تعتبر مدخلاً لفهم واستيعاب طريقة الحل، حيث تعطي تصوراً عن صورة احتمالات الحل الأمثل للنموذج الرياضي، وكما ذكرنا فإن هذه الطريقة تستخدم فقط في حالة احتواء النموذج الرياضي على متغيرتين فقط لأن مجال الرسم يعتمد أساساً على الإحداثيات المتعامدة $(X_1,X_2)$[1].

وتعتبر هذه الطريقة من الطرق البسيطة والتي تعطي نتائج دقيقة إلا أنها طريقة غير كفوءة في معالجة مشكلات البرمجة الخطية في الحياة العملية.

**V-1- خطوات إيجاد الحل الأمثل:**

وتتكون عملية الحل بطريقة الحل البياني من عدد من الخطوات التي لابد من مراعاة تسلسلها للوصول إلى الحل النهائي:

- ✓ تحويل كل متراجحات القيود إلى معادلات، وعملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة معادلة خطية يمكن تمثيلها بخط مستقيم؛
- ✓ تحديد نقاط تقاطع كل قيد مع المحورين والتوصيل بين هاتين النقطتين بخط مستقيم لكل قيد، وتسمى المنطقة التي تشترك فيها جميع القيود المتعلقة بالمشكلة بمنطقة الحلول الممكنة؛
- ✓ إذا كانت متراجحات القيود من نوع أصغر أو يساوي، وهي في الغالب مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية التي يكون هدفها التعظيم، نشطب المناطق التي لاتحقق القيود وهي توجد إلى يمين المستقيم، فإن منطقة الحل الممكنة يجب أن تكون محدودة من اليمن وباتجاه نقطة الأصل وبالتالي فهي تأخذ شكل المضلع، والحل الأمثل يقع على أحد رؤوس المضلع الأبعد عن نقطة الأصل؛
- ✓ إذا كانت متراجحات القيود من نوع أكبر أو يساوي، وهي في الغالب مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية التي يكون هدفها التدنئة، نشطب المناطق التي لا تحقق القيود وهي توجد إلى يسار المستقيم، فإن منطقة الحل الممكنة تكون خارج المضلع بدلاً من أن تقع داخله أي أن منطقة الحل الأمثل تكون غير محددة من اليمين ونقطة الحل الأمثل هي الأقرب عن نقطة الأصل؛
- ✓ إذا كانت متراجحات القيود في المشكلة خليط من ($\geq$ ، $\leq$) معاً، فإنها تكون مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية بنوعيها التعظيم والتدنئة، ولهذه الحالة منطقة حل ممكنة على شكل مضلع؛

---

[1] . سهيلة عبد الله سعيد: " **الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات**"، دار الحامد، ط1، الأردن، 2007. ص 38.

- ✓ إيجاد إحداثيات كل نقطة من النقاط المضلع بمنطقة الحل الكلية، أي نجد قيم $X_1$ و $X_2$ عند كل نقطة؛
- ✓ نجد قيمة (Z) التي تمثل قيمة دالة الهدف عند كل نقطة من النقاط المضلع عن طريق تعويض إحداثيات النقطة رؤوس المضلع في دالة الهدف؛
- ✓ نحدد نقطة الحل الأمثل، وهي النقطة التي قيمة (z) عندها أكبر ما يمكن في حال كانت دالة الهدف التعظيم (Maximization)، أو النقطة التي قيم (z) عندها أقل ما يمكن في حالة كانت دالة الهدف تخفيض (Minimization).
- ✓ ويمكن إيجاد الحل الأمثل بطريقة مباشرة عندما يكون منطقة الحل عبارة عن مضلع متعدد الرؤوس، وذلك بجعل دالة الهدف معدومة معدومة، أي نساويها إلى الصفر، ونرسم مستقيمها على نفس المعلم، يمر هذا المستقيم من نقطة المبدأ، نسمي هذا المستقيم ( $\Delta$ )، نحرك المستقيم ( $\Delta$ ) بصفة متوازية اتجاه رؤوس المضلع المحصل عليه من المستقيمات، وتكون النقطة التي تحقق أكبر قيمة للدالة الإقتصادية (دالة الهدف) هي آخر نقطة يصل إليها المستقيم ( $\Delta$ ) عند سحبه إلى الأعلى بشكل موازي لأصله، وهي نقطة حاصلة من التقاطع عدة مستقيمات مولدة وعكس في حالة التدنئة[1].

وفيما يلي توضيح لتطبيق هذه الخطوات على نموذج البرمجة الخطية:

**مثال رقم (01):** أوجد قيم $X_1$ و $X_2$ المثلى التي تجعل دالة الهدف اكبر ما يمكن للبرنامج التالي بإستخدام الطريقة البيانية:

$$
\begin{aligned}
&Max(z) = 4x_1 + 3x_2 \\
&s/c \\
&\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 21 \end{cases} \\
&x_1 \geq 0; x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

**الحل:** لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

- ✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتراجحات إلى معدلات كما يلي:

$$
\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 = 21 \end{cases}
$$

- ✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

---

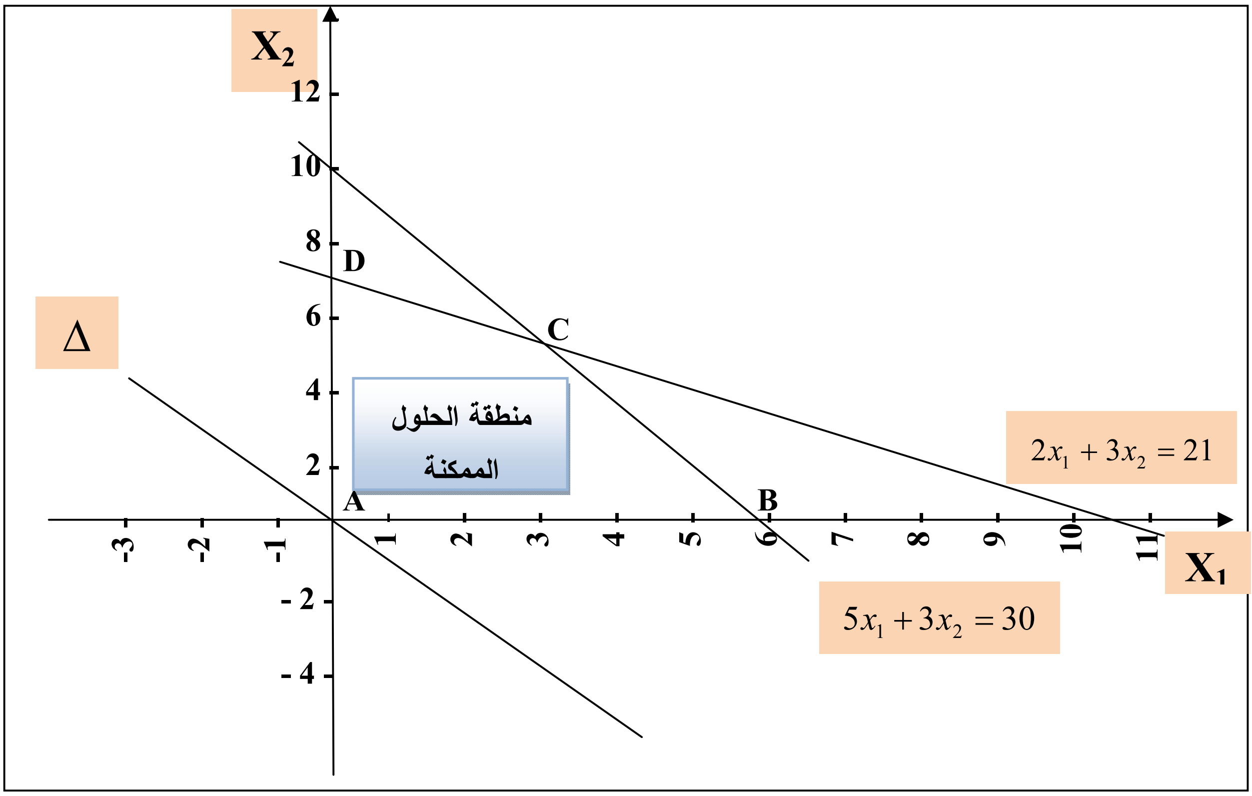
[1]. محمد راتول، مرجع سابق، ص 26.

| $2x_1+3x_2=21$ | |
|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ |
| 0 | 7 |
| 10,5 | 0 |

| $5x_1+3x_2=30$ | |
|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ |
| 0 | 10 |
| 6 | 0 |

على نفس المعلم نرسم المستقيم ($\Delta$) وهو المستقيم المحصل عليه عند وضع الدالة الإقتصادية في أدنى قيمة لها وهي: Z=0 أي: المستقيم ($\Delta$) يمر من النقطتين:

| $4x_1+3x_2=0$ | |
|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ |
| 3 | $-4$ |
| $-2{,}25$ | 3 |




بعد هذا تحدد منطقة الحلول الممكنة وحسب ما هو مطلوب من القيود وهي المنطقة التي تحقق جميع القيود في وقت واحد، وهي كما مبين في الشكل المقابل (A,B,C,D).

أي نقطة توجد إلى يمين المستقيمين لا تحقق القيود، كما أن قيد عدم السلبية يجعل كل المناطق التي هي أدنى من المحور الأفقي وكل المناطق التي هي على يسار المحور العمودي مرفوضة وبالتالي فإنه لا توجد سوى منطقة واحدة هي التي تحقق جميع القيود آنيا وتشمل جميع النقاط الموجودة داخل

المنطقة (A,B,C,D) أي المنطقة غير المشطبة وتسمى هذه المنطقة بمنطقة الحلول الممكنة أو منطقة الحلول المقبولة.

عند تحريك المستقيم ( $\Delta$ ) إلى الأعلى نجد أن آخر نقطة يصلها في منطقة الحلول المقبولة هي النقط (C) وبالتالي تشكل لنا هذه النقطة الحل الأمثل للمسألة وهي نقطة تقاطع المستقيمين (1) و(2)، إذ نجد قيمة المتغيرتين وذلك إما هندسيا بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنجد قيمة قيمة المتغيرتين وذلك إما هندسيا بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنجد قيمة $X_1$ وإمداد مستقيم موازي للمحور الأفقي من النقطة ( $\Delta$ ) فنجد قيمة $X_2$ عند نقطة تقاطعه مع المحور العمودي، وإما أن نجد قيمة المتغيرين بحل معادلتي المستقيمين حلا مشتركا كما يلي:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30........(1) \\ 2x_1 + 3x_2 = 21........(2) \end{cases}$$

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نجد:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 = 21 \end{cases}$$

$$3x_1 = 9 \Rightarrow x_1 = 3$$

بالتعويض في إحدى المعادلات نجد: $x_2 = 5$

وبالتالي فإن قيمتي المتغيرين اللذين يحققان أعلى قيمة للدالة الإقتصادية هما: $C:(x_1 = 3, x_2 = 5)$

يمكن التحقق من أن هذه النتيجة تحقق جميع القيود:

القيد الأول: قيد محقق تماما $5\times3+3\times5=30$

القيد الثاني: قيد محقق تماما $2\times3+3\times5=21$

ومنه لا توجد طاقة غير مستعملة ، ولمعرفة القيمة العظمى للدالة الاقتصادية يكفي أن نعوض القيمتين المحصل عليهما في هذه الدالة فنحصل على ما يلي:

$$Z_C = 4x_1 + 3x_2 = 4\times3+3\times5 = 27$$

وهي أعلى قيمة للدالة الاقتصادية، ولا يمكن أن توجد أية قيم أخرى للمتغيرتين تعطيان أعلى من هذه القيمة وتحقق في نفس الوقت جميع القيود، والجدول يوضح ذلك:

| نقاط | أحداثي نقاط | قيمة دالة الهدف |
|---|---|---|
| A | $A:(x_1=0, x_2=0)$ | $Z_A = 0$ |
| B | $B:(x_1=6, x_2=0)$ | $Z_B = 24$ |
| **C** | $C:(x_1=3, x_2=5)$ | $Z_C = 27$ |
| D | $D:(x_1=0, x_2=7)$ | $Z_D = 21$ |

**ملاحظة:** إذا وجد حل أمثل لبرنامج خطي ذي متغيرتين، فإن هذا الحل يوجد عند أحد رؤوس مضلع منطقة الحل الممكن.

**مثال رقم (02):** أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$Min(z) = 0{,}75x_1 + 0{,}85x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \geq 100 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 70 \\ 2x_1 + 8x_2 \geq 90 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتراجحات إلى معدلات كما يلي:

$$8x_1 + 4x_2 = 100$$

$$2x_1 + 4x_2 = 70$$

$$2x_1 + 8x_2 = 90$$

✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

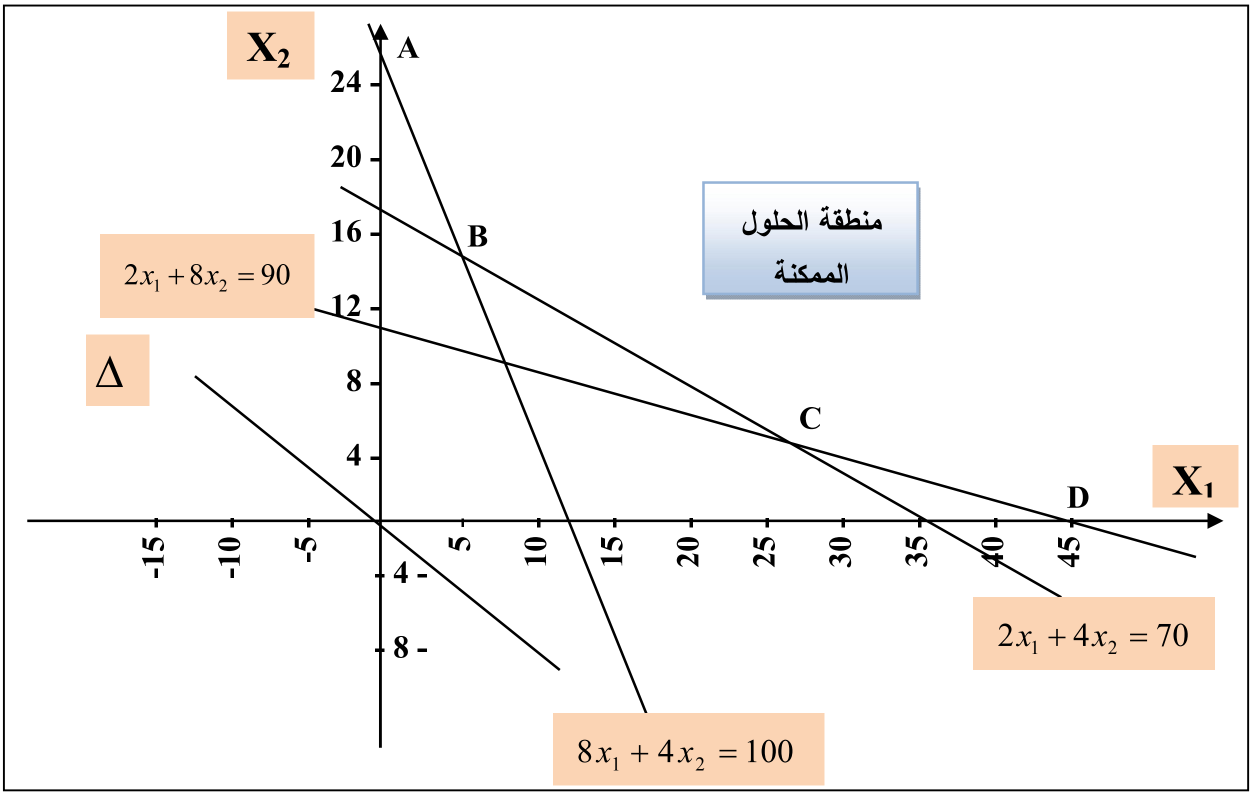
| $8x_1 + 4x_2 = 100$ | |
|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ |
| 0 | 25 |
| 12,5 | 0 |

| $2x_1 + 4x_2 = 70$ | |
|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ |
| 0 | 17,5 |
| 35 | 0 |

| $2x_1 + 8x_2 = 90$ | |
|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ |
| 0 | 11,25 |
| 45 | 0 |

على نفس المعلم نرسم المستقيم ($\Delta$) وهو المستقيم المحصل عليه عند وضع الدالة الإقتصادية في أدنى قيمة لها وهي: Z=0 أي: المستقيم ($\Delta$) يمر من النقطتين:

| $0{,}75x_1 + 0{,}85x_2 = 0$ | |
|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ |
| 3 | $-2{,}64$ |
| $-3{,}4$ | 3 |




نلاحظ أن منطقة الحل الممكن قد تحددت بالمنطقة البعيدة عن نقطة الأصل وذلك لأن المتراجحات في هذه المشكلة من النوع أكبر أو يساوي وبالتالي فإن الحل الأمثل يقع على الحدود الداخلية لهذه المنطقة والتي يمكن تحديدها بالنقاط (ABCD).

حيث إحداثيات النقطة A هي: (25; 0) والنقطة D هي: (45;0)

أما النقاط B و C فلا يمكن تحديد إحداثياتهم مباشرة من الرسم الأمر الذي يتطلب استخراجهم من خلال حل المعادلات كما يلي:

النقطة C متولد من تقاطع مستقيم القيد الثاني والثالث:

$$2x_1+4x_2=70$$
$$2x_1+8x_2=90$$

وبعد القيام بالحل الجبري لهما، سنجد أن: $C:(x_1=25, x_2=5)$

النقطة B متولدة من تقاطع مستقيم القيد الأول والثاني:

$$8x_1 + 4x_2 = 100$$
$$2x_1 + 4x_2 = 70$$

وبعد القيام بالحل الجبري لهما، سنجد أن: $B:(x_1 = 5, x_2 = 15)$

وبتعويض قيم إحداثيات الزوايا الأربعة (A,B,C,D) في دالة الهدف، نتوصل إلى الحل الأمثل والذي سيتحقق عند النقطة (B) لأنها أقل تكاليف كما يظهر في الجدول التالي:

| نقاط | أحداثي نقاط | قيمة دالة الهدف |
|---|---|---|
| A | $A:(x_1 = 0, x_2 = 25)$ | $Z_A = 21{,}25$ |
| B | $B:(x_1 = 5, x_2 = 15)$ | $Z_B = 16{,}50$ |
| **C** | $C:(x_1 = 25, x_2 = 5)$ | $Z_C = 23$ |
| D | $D:(x_1 = 45, x_2 = 0)$ | $Z_D = 33{,}75$ |

ولتأكيد النتيجة عند تحريك المستقيم ($\Delta$) إلى الأعلى نجد أن النقطة الأولى التي يصلها في منطقة الحلول المقبولة هي النقط (B) وبالتالي تشكل لنا هذه النقطة الحل الأمثل للمسألة.

وبالتالي فإن قيمتي المتغيرين اللذين يحققان أعلى قيمة للدالة الإقتصادية هما: $B:(x_1 = 5, x_2 = 15)$

يمكن التحقق من أن هذه النتيجة تحقق جميع القيود:

القيد الأول: قيد محقق تماما $8\times 5 + 4\times 15 = 100$

القيد الثاني: قيد محقق تماما $2\times 5 + 4\times 15 = 70$

القيد الأول: قيد محقق $2\times 5 + 8\times 15 = 130 \succ 90$

القيمة العظمى للدالة الاقتصادية يكفي أن نعوض القيمتين المحصل عليهما في هذه الدالة فنحصل على مايلي:

$$Z_B = 0{,}75x_1 + 0{,}85x_2 = 0{,}75\times 5 + 0{,}85\times 15 = 16{,}50$$

**V-2- حالات خاصة في الحل البياني:**

أن مشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة يمكن تطبيقها في مجالات واسعة وبنجاح، إلا أن هناك حالات خاصة يجب مراعاتها، ومن هذه الحالات هي:

- **تعدد الحلول المثلى:**

ونحصل على هذا النوع من الحلول عندما تكون هناك أكثر من نقطة واحدة في منطقة الحلول الممكنة تعطي القيمة نفسها لدالة الهدف التي تكون أعلى القيم في حالة كون دالة الهدف من نوع التعظيم أو تكون أقل القيم حين تكون دالة الهدف من نوع تدنئة.

**مثال رقم (03):** أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$Max(z) = x_1 + 2x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_2 \le 4 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$$

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

- ✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتراجحات إلى معدلات كما يلي:

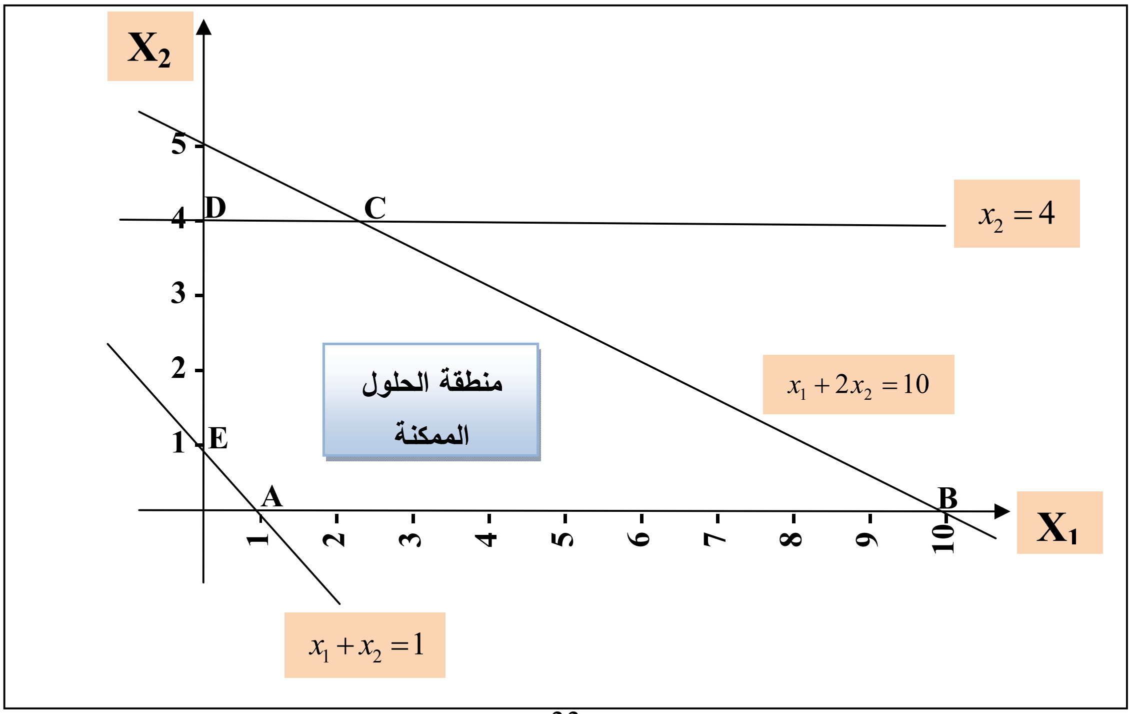
$$x_1 + 2x_2 = 10$$
$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_2 = 4$$

- ✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

$x_2 = 4$ هو خط مستقيم موازي للمحور الأفقي .

| $x_1 + x_2 = 1$ | |
|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ |
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| $x_1 + 2x_2 = 10$ | |
|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ |
| 0 | 5 |
| 10 | 0 |



نلاحظ أن منطقة الحل الممكن قد تحددت بالنقاط (ABCDE)، حيث إحداثيات النقطة A هي: (0; 1) والنقطة B هي: (0; 10) أما النقطة D هي: (4; 0) و E هي: (1; 0).

أما النقطة C متولد من تقاطع مستقيم القيد الأول والثاني:

$$x_1 + 2x_2 = 10$$
$$x_1 + x_2 = 1$$

وبعد القيام بالحل الجبري لهما، سنجد أن:

$$C:(x_1 = 2, x_2 = 4)$$

وبتعويض قيم إحداثيات الزوايا الخمس في دالة الهدف، نتوصل إلى الحل الأمثل والذي يحقق لنا أكبر عائد كما يظهر في الجدول التالي:

| نقاط | أحداثي نقاط | قيمة دالة الهدف |
|---|---|---|
| A | $A:(x_1 = 1, x_2 = 0)$ | $Z_A = 1$ |
| **B** | $B:(x_1 = 10, x_2 = 0)$ | $Z_B = 10$ |
| **C** | $C:(x_1 = 2, x_2 = 4)$ | $Z_C = 10$ |
| D | $D:(x_1 = 0, x_2 = 4)$ | $Z_D = 8$ |
| E | $E:(x_1 = 0, x_2 = 1)$ | $Z_E = 2$ |

من الجدول نجد أن النقطتين C و B تحقق لدالة الهدف قيمة عظمى مساوية إلى 10، يتضح من ذلك أن للمشكلة أكثر من حل واحد ويعود السبب في ذلك هو أن دالة الهدف تكون موازية لأحد القيود الهيكلية، أي عند رسم دالة الهدف وتحريك الرسم ينطبق الرسم في إحدى أوضاعه على أحد المستقيمات المرسومة وهنا يقال أن للمشكلة مجموعة من الحلول المثلى ( تعدد الحلول المثلى).

- **عدم وجود حلول:**

هنا يحصل هذا النوع من الحلول عندما لا يمكن تعيين منطقة الحلول الممكنة ولا يوجد هنا حل أساسي ابتدائي مقبول، أي قيود لا تتقاطع في منطقة حل واحدة ، بحيث تكون منطقة تقاطع القيود عبارة عن مجموعة خالية[1] وكما يلي:

[1] - Gérald Baillargeon ,op-cit , P 55 .

**مثال رقم (04)**: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$Min(z) = 20x_1 + 15x_2$$

$$s/c$$

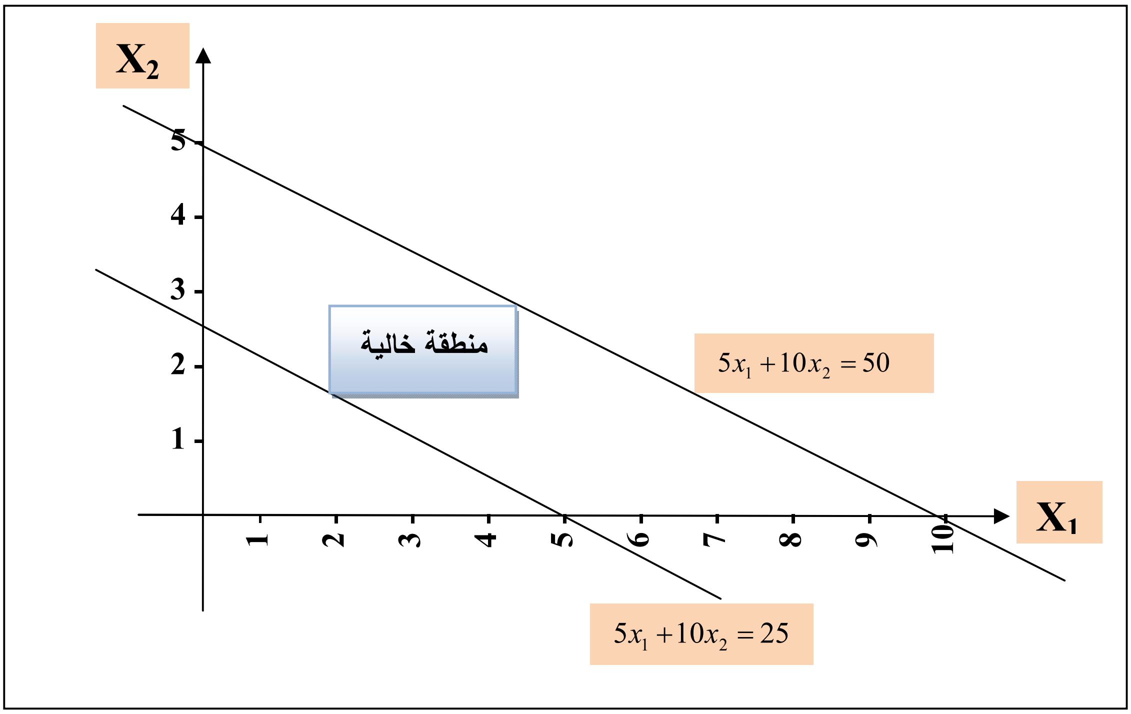
$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leq 25 \\ 5x_1 + 10x_2 \geq 50 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

| $5x_1 + 10x_2 = 50$ | |
|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ |
| 0 | 5 |
| 10 | 0 |

| $5x_1 + 10x_2 = 25$ | |
|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ |
| 0 | 2,5 |
| 5 | 0 |




من خلال الشكل نلاحظ أن القيدين متعاكسان ولا يتقاطعان نهائياً، وبذلك لا نستطيع الحصول على حل مقبول لهذه المشكلة.

- **منطقة الحل الممكن غير محدودة:**

ويعني ذلك عدم إمكانية تحديد نقطة حل أمثل وهذا يعني زيادة متغير أو أكثر من متغيرات المشكلة ومن ثم الربح دون مخالفة لأي قيد من القيود المشكلة وتعتبر هذه الحالة نظرية وبعيدة عن الواقع وبالنسبة لطريقة الرسم البياني فإن هذا يعني بأن منطقة الحل مفتوحة وبدون نهاية علماً بأن هذه الحالة تنطبق فقط على نموذج البرمجة الخطية الذي دالة الهدف له تعظيم[1].

ويمكن اعتبار هذه الحالة تقع أيضا عندما تكون المشكلة بدالة هدف تعظيم ويكون هناك تناقض بين دالة الهدف والقيود فتكون هذه الأخيرة أكبر أو تساوي وتعكس الشكل القانوني( القيود أقل أو تساوي).

**مثال رقم (05):** افترض أن لدينا مشكلة البرمجة الخطية التالية:

**المطلوب:** أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

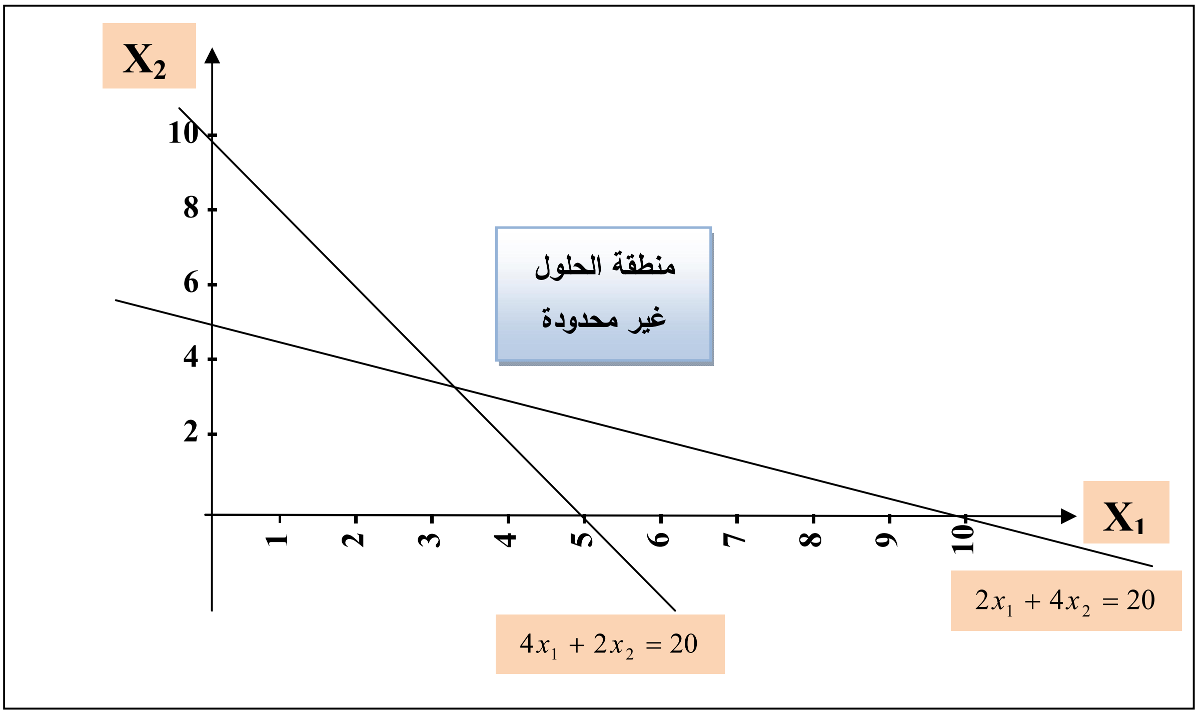
$$Max(z) = 3x_1 + 5x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 20 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

ويوضح الشكل أدناه الرسم البياني لهذه المشكلة:




إن منطقة الحل الممكن مفتوحة من النهاية وهي غير محدودة، فأية قيمة في المنطقة تحقق دالة الهدف وبالتالي نقول أن دالة الهدف لانهائية.

---

[1] . جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 52.

- **حالة حياد أحد القيود:**

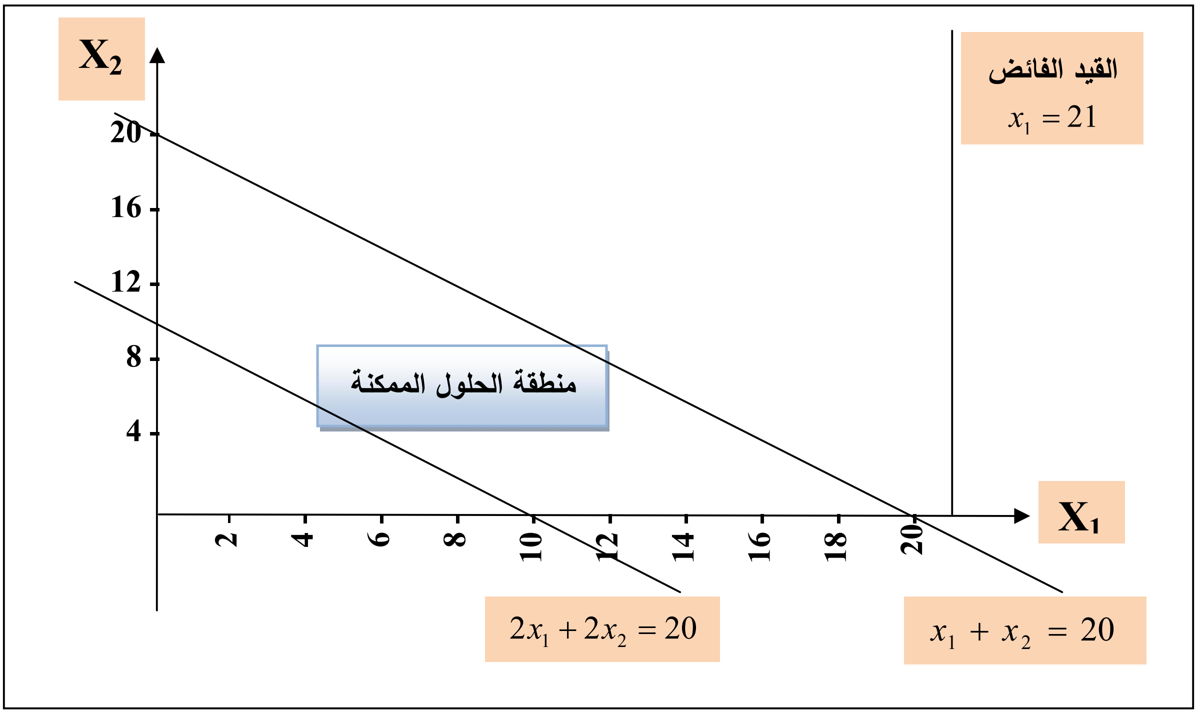
وهي من المشاكل الشائعة في مشاكل البرمجة الخطية الكبيرة التي تحتوي على عدد كبير من القيود، مما ينتج عنها قيد فائض لا حاجة له وليس له أي تأثير على الحل، وهذا يعني وجود قيود لها أهمية أكثر من غيرها، لذلك فإن استخدام الأهم يغني عن استخدام الأقل أهمية.

**مثال رقم (06):** افترض أن لديك نموذج البرمجة الخطية التالية:

**المطلوب:** أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$Max(z) = 5x_1 + 5x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 20 \\ x_1 \leq 21 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

ويوضح الشكل أدناه الرسم البياني لهذه المشكلة:




نلاحظ من خلال الشكل وجود حالة القيد الفائض متمثلة بالقيد الثالث أبطلا مفعول هذا القيد ذلك أنهما أكثر تقييداً وتحديداً وهما اللذان حددا منطقة الحل الممكن.

**V-3– تمارين مقترحة:** باستخدام الطريقة البيانية أوجد الحل الأمثل لبرامج الخطية التالية

| | |
|---|---|
| $1.Max(z)=15x_1+12x_2$<br>$s/c$<br>$\begin{cases}3x_1+6x_2\le 54\\6x_1+3x_2\le 48\\9x_1+9x_2\le 90\end{cases}$<br>$x_1\ge 0; x_2\ge 0$ | $2.Min(z)=80x_1+60x_2$<br>$s/c$<br>$\begin{cases}18x_1+12x_2\ge 180\\6x_1+9x_2\le 162\\5x_1+10x_2\ge 110\end{cases}$<br>$x_1\ge 0; x_2\ge 0$ |
| $3.Max(z)=2x_1+4x_2$<br>$s/c$<br>$\begin{cases}x_1\ge 7\\x_2\le 11\end{cases}$<br>$x_1\ge 0; x_2\ge 0$ | $4.Max(z)=3x_1+6x_2$<br>$s/c$<br>$\begin{cases}x_1+x_2\ge 12\\3x_1+4x_2\le 24\end{cases}$<br>$x_1\ge 0; x_2\ge 0$ |
| $5.Max(z)=9x_1+2x_2$<br>$s/c$<br>$\begin{cases}x_1+x_2\le 10\\2x_1+x_2\le 12\\x_1\le 14\end{cases}$<br>$x_1\ge 0; x_2\ge 0$ | $6.Max(z)=x_1+2x_2$<br>$s/c$<br>$\begin{cases}1{,}5x_1+3x_2\le 15\\x_1\le 7\\x_2\le 3\end{cases}$<br>$x_1\ge 0; x_2\ge 0$ |

# الفصل الثالث

# البرمجة الخطية وطريقة السمبليكس (Simplex)

تعرفنا في الفصل السابق إلى كيفية الوصول إلى الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية ذات المتغيرين باستخدام طريقة الحل البياني، إلا أن واقع حال المشاكل التي تواجهها المؤسسات تتصف بالتعقيد والتشابك مما يجعلها بحاجة إلى عدد كبير من القيود والمتغيرات التي يجب أن تؤخذ بعين الاعتبار عند عملية صنع القرار.لذلك لا بد من استخدام طريقة أخرى أشمل وأسهل من طريقة الحل البياني.

طريقة السمبليكس وسيلة رياضية ذات كفاءة عالية في استخراج الحلول المثلى لمشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة، وتستخدم هذه الطريقة لحل النماذج الرياضية للبرمجة الخطية جبرياً مهما كان عدد المتغيرات وهي الأكثر استخداماً لحل النماذج الرياضية[1].

تعمل هذه الطريقة بشكل مشابه تماماً للطريقة البيانية في كيفية الوصول للحل الأمثل، حيث تقوم هذه الطريقة بفحص ذروات منطقة الإمكانات بشكل متسلسل وباستخدام مفاهيم رياضية بسيطة، ويتم بشكل متكرر، وهذا يعني إعادة نفس الإجراءات مرة تلو الأخرى ولحين الوصول للحل الأمثل.

**I– آلية عمل طريقة السمبليكس:**

في حالة وجود أكثر من ثلاث متغيرات في مشكلة فإنه لا يمكن استخدام الطريقة البيانية وإنما علينا استخدام طرقة أخرى المسماة بالسمبليكس التي ابتكرها دانزاك (Geroge Dantzig) عام 1947 وهي عبارة عن أسلوب اختياري تكراري لتحليل مشاكل البرمجة الخطية ويعتمد هذا الأسلوب على اختيار المتغيرات ذات التأثير الأساسي على كل من دالة الهدف والقيود ويهمل المتغيرات الأخرى التي لا تؤثر على دالة الهدف والقيود[2].

**I-1- تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة الأولية إلى الصيغة النموذجية ( القياسية):**

قبل الحل بطريقة النموذج بطريقة السمبليكس، وتحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة الأولية إلى الصيغة النموذجية، علينا أولاً معرفة أنواع الصيغ التي يمكن كتابة البرنامج الخطي على أساسها.

[1]. سهيلة عبد الله سعيد، مرجع سابق، ص 53.

[2]. محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص 45.

### I-1-1-الصيغة القانونية والمختلطة للبرنامج الخطي[1]:

- **الصيغة القانونية:**

هناك نوعان من صيغ البرامج الخطية وهي حسب الحالة كما يلي:

أ. **حالة التعظيم:** في هذه الحالة تكون الصيغة القانونية للبرنامج الخطي على النحو التالي:

- دالة الهدف تكون في حالة تعظيم؛
- التشكيلة الخطية لجميع القيود تكون في حالة أصغر أو تساوي عددا ثابتا موجبا؛
- جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

أي أن الصيغة القانونية تكتب كما يلي[2]:

$$Max(z) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots\dots\dots\dots C_nx_n$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots\dots a_{in}x_n \le b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$
$$x_1; x_2; \dots\dots\dots\dots\dots; x_n \ge 0$$

أما الصيغة القانونية بالشكل المصفوفي تكون كما يلي:

$$Max(z) = C'X$$
$$s/c$$
$$\{AX \le B$$
$$X \ge 0$$

حيث: $C'$ يعبر عن سطر معاملات دالة الهدف، $A$ تعبر عن مصفوفة القيود، أما $B$ فتعبر عن شعاع الثوابت .

---

[1]. راتول محمد، مرجع سابق، ص 41.

[2]- J.M.Boussard, J. J.Daudin ," **la programmation linéaire dans les modèles de production**",Masson , Paris, 1998 . P 27 .

ب. **حالة التدنئة:** فحتى يأخذ البرنامج الخطي شكل الصيغة القانونية يجب أن يتميز بما يلي:

- دالة الهدف تكون في حالة تدنئة ؛
- التشكيلة الخطية لجميع القيود تكون في حالة أكبر أو تساوي عددا ثابتا موجبا؛
- جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

أي أن الصيغة القانونية تكتب كما يلي:

$$Min(z) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots\dots\dots C_nx_n$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots a_{in}x_n \geq b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases}$$
$$x_1; x_2; \dots\dots\dots; x_n \geq 0$$

أما الصيغة القانونية بالشكل المصفوفي تكون كما يلي:

$$Min(z) = C'X$$
$$s/c$$
$$\{AX \geq B$$
$$X \geq 0$$

- **الصيغة المختلطة:** وشروط هذه الصيغة:
  - أن تكون دالة الهدف مكتوبة على شكل تعظيم أو تدنئة؛
  - أن تكون القيود مكتوبة بإشارة أقل أو يساوي أو أكبر أو يساوي أو هيأة معادلة أي مساواة؛
  - جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

أي أن الصيغة المختلطة تكتب كما يلي:[1]

[1]- Mustapha Nabil ," **recherche opérationnelle et *Mathématiques appliqués* a la gestion des entreprises**",Dunod, France,1985 , p 31 .

$$Min\_or\_Max(z) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots\dots\dots C_nx_n$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots a_{1n}x_n \geq,=,\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots a_{2n}x_n \geq,=,\leq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots a_{in}x_n \geq,=,\leq b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots a_{mn}x_n \geq,=,\leq b_m \end{cases}$$
$$x_1; x_2; \dots\dots\dots; x_n \geq 0$$

### I-1- 2– الصيغة النموذجية للبرنامج الخطي:

وفيها تكون كل القيود على شكل معادلات، أما دالة الهدف فتكون إما في صيغة تعظيم أو صيغة تدنئة، تعتبر الصيغة النموذجية ضرورية لإيجاد الحل الأساسي للبرنامج بطريقة السمبليكس، إذ يجري تحويل أية صيغة مهما كان شكلها إلى الصيغة النموذجية، بإعتبار ذلك أول خطوة في إتجاه الحل.

تتطلب الخطوة الأولى في الطريقة السمبليكس تحويل القيود من صيغة متراجحات إلى صيغة معادلات كالأتي[1]:

- إذا كانت إشارة القيد أقل من أو يساوي يتم إضافة متغير مكمل إلى الجانب الأيسر للقيد ويسمى " **متغير الفجوة** " أو المتغير الزائد أو المتغير الراكد ويرمز له بالرمز ($S_i$ ;i=1,2,……m) ويظهر هذا المتغير بمعامل صفر في دالة الهدف، ويمثل المتغير الفجوة موارد غير مستخدمة مثل الوقت المستغرق على الآلة، ساعات العمل، الأموال، ساحات المحزن، أو أي من الموارد في المشكلات التي تواجهها المؤسسات. إذا كان القيد مثلا كما يلي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots a_{1n}x_n \leq b_1$$

يصبح القيد:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots a_{1n}x_n + S_1 = b_1$$

- إذا كانت إشارة القيد أكبر من أو يساوي يتم طرح متغير فائض من الجانب الأيسر للقيد ويسمى " **متغير الفجوة** " ويرمز له بالرمز ($S_i$ ;i=1,2,……m) ثم نضيف متغير وهمي أو اصطناعي

[1] جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 70 .

(Artificielle) إلى الجانب الأيسر للقيد ويرمز له بالرمز ( Ai)، ويظهر المتغير الفجوة بمعامل صفر في دالة الهدف، أما **المتغير الاصطناعي** فيظهر بمعامل (M) في دالة الهدف والتي ترمز إلى معامل رقمي كبير جداً، أما إشارتها في دالة الهدف فتكون موجبة(+M)عندما تكون دالة الهدف تخفيض أو تقليل، أما إذا كانت دالة الهدف تعظيم فإن إشارتها تكون سالبة (−M). فمثلا إذا القيد على الشكل التالي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .........a_{1n}x_n \geq b_1$$

يصبح القيد:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .........a_{1n}x_n - S_1 + A_1 = b_1$$

تضاف المتغيرات الاصطناعية إلى المتراجحات الخطية التي تفصل بين طرفيها علامة من نوع أكبر أو يساوي أو المساواة وذلك بهدف الحصول على الحل الأساسي الممكن، وبعد أن يتم الحصول على هذا الحل ( الحل الممكن) يجب أن يتم التخلص من هذه المتغيرات وأبعادها عن النموذج ( كما سيأتي شرحه في حالة طريقة M الكبيرة أو Big−M)[1].

- إذا كانت إشارة القيد يساوي (=) يتم إضافة متغير وهمي أو اصطناعي إلى الجانب الأيسر للقيد ويرمز له بالرمز ( Ai)، والجدول التالي يبين القواعد السابقة:

| إشارة القيد | الإجراء على القيد | دالة الهدف تدنئة (Min) | دالة الهدف تعظيم (Max) |
|---|---|---|---|
| اقل من أو يساوي | $+1S_i$ | $+0S_i$ | $+0S_i$ |
| أكبر من أو يساوي | $-1S_i+1A_i$ | $1S_i+MA_i$ | $1S_i-MA_i$ |
| يساوي | $+1A_i$ | $+MA_i$ | $-MA_i$ |

**مثال رقم (01):** أوجد الصيغة النموذجية للبرنامج الخطي الأتي:

$$Max(z) = x_1 + 2x_2 - x_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 + x_3 \leq 5 \end{cases}$$
$$x_1; x_2; x_3 \geq 0$$

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص54 .

**الحل:** القيد الأول عبارة عن قيد مساواة إذن:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + A_1 = 10$$

القيد الثاني يحمل إشارة أكبر من أو يساوي إذن:

$$x_2 + x_3 \geq 4 \Rightarrow x_2 + x_3 - S_1 + A_2 = 4$$

القيد الثالث حمل إشارة أصغر من أو يساوي ومنه:

$$x_1 + x_3 \leq 5 \Rightarrow x_1 + x_3 + S_2 = 5$$

أما دالة الهدف تصبح على النحو التالي:

$$Max(z) = x_1 + 2x_2 - x_3 + 0S_1 + 0S_2 - MA_1 - MA_2$$

**I-2- إعداد جدول الحل الأولي:**

تبدأ الطريقة السمبليكس بحل الأولي ممكن حيث تكون قيم جميع المتغيرات الحقيقية (مثل) مساوية لـ(0)، ينتج عن هذا الحل الإعتيادي ربحاً مقداره (0)، وتبدأ الطريقة المبسطة عند هذه النقطة ومن ثم سنتحرك نحو بقية النقاط عند الأركان الأخرى إلى أن نصل إلى الحل الأمثل[1] .

تكوين جدول الحل الأولي (الأساسي) للحصول على حل أولي ممكن والذي يناظر الحل الأولي عند نقطة الأصل في طريقة الحل البياني، ويكون تنظيم بيانات الشكل الصيغة النموذجية من حالة دالة التعظيم  في جدول الحل الأولي كما هو مبين في الجدول التالي:

[1] -P.Chrétienne, Y.Pesyuex, G.Raudjean ," **Algorithmes et pratique de programmation linéaire**", édition telmic, Paris, 1980. P 17 .

| $T_1$ | $C_J$ | $C_1$ | $C_2$ | ................ | $C_n$ | 0 | 0 | ................ | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | ................ | $X_n$ | $S_1$ | $S_2$ | ................ | $S_m$ | B |
| 0 | $S_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | ................ | $a_{1n}$ | 1 | 0 | ................ | 0 | $b_1$ |
| 0 | $S_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | ................ | $a_{2n}$ | 0 | 1 | ................ | 0 | $b_2$ |
| : | : | : | : | ................ | : | : | : | ................ | : | : |
| 0 | $S_i$ | $a_{i1}$ | $a_{i2}$ | ................ | $a_{in}$ | 0 | 0 | ................ | 0 | $b_i$ |
| : | : | : | : | ................ | : | : | : | ................ | : | : |
| 0 | $S_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | ................ | $a_{mn}$ | 0 | 0 | ................ | 1 | $b_m$ |
| $Z_J$ | | 0 | 0 | ................ | 0 | 0 | 0 | ................ | 0 | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | $C_1$ | $C_2$ | ................ | $C_n$ | 0 | 0 | ................ | 0 | Z=0 |

حيث:

$$Z_J = CB'X_J S_J$$

$$Z = CB'B$$

نلاحظ أن متغيرات الأساس الموضوعة في العمود الثاني من الجدول هي نفسها المقابلة للقيمة (1) من أعمدة المصفوفة الأحادية، وتكون في الجدول الحل الأساسي الأول إما متغيرات فجوة أو متغيرات لإصطناعية أو هم معا، وفي المراحل اللاحقة تزيحها الخوارزمية، وتحل محلها متغيرات أخرى.

وفي هذا الجدول تكون قيم المتغيرات داخل الأساس هي القيم المقابلة لها في العمود الأخير( عمود الثوابت)، أي : $\left(S_1 = b_1 ; S_2 = b_2 ; \ldots\ldots\ldots \; \ldots\ldots\ldots \; S_m = b_m\right)$

أما قيمة الدالة الإقتصادية فهي معدومة، أما بقية عناصر السطر الأخير فتعبر عن تغير معاملات دالة الهدف طيلة مراحل الحل.

**مثال رقم (02):** أوجد الصيغة النموذجية والجدول الحل الأساسي الأول للبرنامج الخطي التالي:

$$Max(z) = 7x_1 + 5x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 240 \end{cases}$$

$$x_1 ; x_2 \geq 0$$

✓ الصيغة النموذجية:

تصبح القيود أعلاه كما يأتي:

القيد الأول: $2x_1 + x_2 + S_1 = 100$

القيد الثاني: $4x_1 + 3x_2 + S_2 = 240$

وهذا يعني بأن عدد ساعات المستخدمة كانت أقل من 100 ساعة بالنسبة للقيد الأول و240 ساعة بالنسبة للقيد الثاني.

إن المتغيرات الفجوة لا تحقق أي ربح، فإنه سيتم إضافتها إلى دالة الهدف الأصلية وبمعامل (0)، وعليه تصبح معادلة دالة الهدف:

$$Max(z) = 7x_1 + 5x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

✓ جدول الحل الأساسي الأول للبرنامج:

المتغيرات الغير الأساسية

| $T_1$ | $C_J$ | 7 | 5 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | B |
| 0 | $S_1$ | 2 | 1 | 1 | 0 | 100 |
| 0 | $S_2$ | 4 | 3 | 0 | 1 | 240 |
| $Z_J$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 7 | 5 | 0 | 0 | Z=0 |

المتغيرات الأساسية

يطلق على الحل الإبتدائي مصطلح " الحل الممكن الأساسي " ويوصف بالصيغة الآتية:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 240 \end{pmatrix}$$ هذا هو الحل الممكن الأساسي بصيغة الأعمدة.

المتغيرات التي يطلق عليها **بالمتغيرات الأساسية** في البرمجة الخطية هي $(S_1,S_2)$، أما المتغيرات التي لا يضمها مزيج الحل أو غير الأساسية $(X_1,X_2)$ في مثالنا يطلق عليها **المتغيرات غير الأساسية**.

**I-3- إجراءات الحل بطريقة السمبليكس:**

إنطلاقا من الجدول الأول نحضر لإعداد جدول الحل الأساسي الثاني " الجدول الثاني" وذلك بإختيار المتغيرة التي تدخل الأساس والمتغيرة التي تخرج من الأساس وكذلك **عنصر الإرتكاز**.

سندرج فيما يأتي الخطوات ثم نشرحها بدقة ونطبقها لإستكمال الجدول الثاني والثالث للحل[1]:

- **الخطوة (01):** تحديد المتغير الذي سيدخل مزيج الحل لاحقاً، و إحدى الطرق للقيام بذلك هو عن طريق تحديد العمود، ويتم على أساس قيم صف تقيم الحل $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ فإذا كانت دالة الهدف تعظيم (Max) نختار المتغير صاحب أعلى قيمة موجب في صف $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ ويسمى العمود الذي يقع فيه بالعمود المحوري أو **بعمود عنصر الإرتكاز** (Pivot Column)، ومن ثم المتغير أكبر قيمة موجبة في صف $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ في الجدول السابق، هذا يعني أننا سننتج الآن بعض المنتجات التي ستسهم في تحقيق أعظم ربح إضافي للوحدة الواحدة. من جدول الحل الأولي للمثال السابق رقم (02) نجد أن قيمة المتغير $(X_1)$ في الصف $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ تساوي (7) وهي أعلى قيمة موجبة وهذا يعني أن إضافة وحدة واحدة من $(X_1)$ لمزيج الحل سيساهم بزيادة الربح بمقدار (7) دينار، أما المتغيرة $(X_2)$ فإن القيمة المقابلة له في الصف $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ كانت (5) دينار فقط، أما المتغيرتين $(S_1 ;S_2)$ فكانت قيمها المقابلة في صف $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ صفر لكل منهما، وهذا يعني أن دخولهما مزيج الحل سوف لن يضيف أي شيء للربح المتوقع، وعليه سنختار المتغير $(X_1)$ ليكن المتغير الداخل، وعليه سيكون العمود الذي يحتويه هو عمود الإرتكاز؛
- **الخطوة (02):** نحدد المتغير الذي سيتم استبداله ( المتغير الخارج)، لإننا إخترنا متغير جديد سيدخل مزيج الحل، ينبغي أن نحدد أي من المتغيرات الأساسية الحالية ينبغي أن يخرج ويتم إنجاز هذه الخطوة عن طريق قسمة قيم عمود الكميات (B) على قيم عمود المحور الإتكاز (القيم فقط الموجبة والغير معدومة) الذي تم إختياره في الخطورة (01)، الصف الذي يحقق أقل قيمة موجبة سيتم إستبداله في الجدول اللاحق( هذا الرقم الأقل قيمة موجبة بالمناسبة يعطي أكبر رقم من الوحدات للمتغير الذي سيحل محله في الحل)، ويشار إلى هذا الصف بـ الصف المحور أو **صف الإرتكاز** (Pivot Row)، الرقم الذي يقع ضمن نقطة تقاطع صف الإرتكاز مع عمود الإرتكاز يشار له بـ العنصر المحوري أو **عنصر الإرتكاز** (Pivot Number)، طالما أن المتغير $(X_1)$ سيدخل مزيج الحل، ينبغي أن نحدد المتغير الذي سيتم إستبداله سيكون هناك عددا من المتغيرات الأساسية بقدر عدد القيود في مشكلة البرمجة الخطية، وعليه فإما $(S_1)$ أو $(S_2)$

---

[1]. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق، ص ص : 153-157.

سيخرج من جدول الحل ليحل محله المتغير الداخل $(X_1)$ كمتغير أساسي ولتحديد صف الإرتكاز، فإننا سنقسم الكمية الموجودة في عمود (B) على القيمة المقابلة له في عمود الإرتكاز وعليه:

$$Min\left\{\frac{100}{2}=50\,,\frac{240}{4}=60\right\}=Min\,\{50\,,60\}=50$$

الرقم الموجب الأصغر يشير إلى أعظم رقم من الوحدات من $(X_1)$ يمكن إنتاجها دون أن ينتهك أي من القيود الأصلية، إنها أيضا تشير إلى أن الصف الإرتكاز سيكون الصف الأول الذي يقابل النسبة (50)، هذا يعني أن بأن $(S_1)$ سيكون المتغير الذي سيتم استبداله في هذه الخطوة، أما عنصر الإرتكاز هو الرقم الذي يقع عند تقاطع صف الإرتكاز مع عمود الإرتكاز وهو يقع في الصف الأول والعمود الأول وهو (2).

ولتوضيح ما سبق في الخطوة رقم (01) و (02) في الجدول الأولي السابق كالآتي:

عنصر الإرتكاز

| $T_1$ | $C_J$ | 7 | 5 | 0 | 0 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | B | $\frac{B}{X_1}$ |
| 0 | $S_1$ | 2 | 1 | 1 | 0 | 100 | 50 |
| 0 | $S_2$ | 4 | 3 | 0 | 1 | 240 | 60 |
| $Z_J$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| $\Delta Z=C_J-Z_J$ | | 7 | 5 | 0 | 0 | Z=0 | |

صف الإرتكاز

عمود الإرتكاز

- **الخطوة (03):** يتم تعديل جدول الأولي بتكوين جدول جديد عن طريق إجراء بعض التعديلات على مصفوفة المعاملات في جدول الحل الأولي، حيث يرتبط الجدول الجديد بجدول الحل الأولي باعتبار الجدول الجديد مرحلة لاحقة لجدول الحل الأولي، وتتلخص إجراءات تكوين الجدول الجديد بما يلي:

- تحتسب قيم صف المتغير الداخل إلى الحل عن طريق قسمة قيم عناصر الصف الإرتكاز على عنصر الإرتكاز، ويسمى الصف الناتج بصف العمل (Working Row)

من المثال السابق لدينا القيم الجديدة لصف الإرتكاز كما يلي:

$$X_1 = \left(\frac{2}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{0}{2};\frac{100}{2}\right) = \left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2};0;50\right)$$

ستظهر القيم الجديدة لصف الإرتكاز بأكمله في الجدول الجديد، ونلاحظ بأن $(X_1)$ سيظهر في مزيج الحل وأنه سيتم إنتاج (50) وحدة من $(X_1)$، وهذا سيحقق حتماً ربحاً أكبر من (0) كما هو الحال في جدول الحل الأولي.

| $T_2$ | $C_J$ | 7 | 5 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | B |
| 7 | $X_1$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 50 |

الصف الأول الجديد

- تحتسب قيم الصفوف الأخرى باستخدام القواعد التالية:

قيم الصف الجديدة = القيم الحالية (القديمة) للصف – ( الرقم المناظر للرقم الإرتكاز X الرقم المقابل في صف العمل). أما الرقم المناظر للرقم الإرتكاز هو الرقم الذي يقع أسفل أو أعلى الرقم الإرتكاز.

قيم الصف الثاني الجديدة =

$$S_2 = (4;3;0;1;240) - 4\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2};0;50\right) = (0;1;-2;1;40)$$

| $T_2$ | $C_J$ | 7 | 5 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | B |
| 0 | $S_2$ | 0 | 1 | -2 | 1 | 40 |

الصف الثاني الجديد

- **الخطوة (04):** وبعد الإنتهاء من عملية الحساب قيم الصفوف تتم عملية اختبار أمثلية الحل، لكن لابد من إجراء الخطوة الأخيرة لإكمال الجدول الثاني واختبار الحل هو إستخراج تأثير دالة الهدف وتتضمن هذه الخطوة حساب قيم كلا من صف $(Z_J)$ و $(\Delta Z = C_J - Z_J)$، ونكرر بأن دخول $(Z_J)$ في عمود الكميات يعطينا إجمالي الربح الذي يتحقق من الحل الحالي، أما بقية

قيم $(Z_J)$، فإنها تمثل إجمالي الربح المتحقق من إضافة وحدة واحدة من كل متغير إلى الحل الجديد وتحتسب قيم $(Z_J)$ كما يأتي:

$$Z_J = CB'X_J S_J$$

$$Z_J = (7 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

أما قيمة دالة الهدف هي:

$$Z = CB'B = (7 \quad 0)\begin{pmatrix} 50 \\ 40 \end{pmatrix} = 350$$

وسيتم وضع قيم $(Z_J)$ و $(\Delta Z)$، في الجدول الحل الثاني وكما مبين في الجدول التالي:

| $T_2$ | $C_J$ | 7 | 5 | 0 | 0 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **CB** | **XB** | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | **B** | $\frac{B}{X_2}$ |
| 7 | $X_1$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 50 | 100 |
| 0 | $S_2$ | 0 | 1 | −2 | 1 | 40 | 40 |
| $Z_J$ | | 7 | $\frac{7}{2}$ | $\frac{7}{2}$ | 0 | **Z=350** | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | **0** | $\frac{3}{2}$ | $\frac{-7}{2}$ | **0** | | |

إن الحل الحالي يشير إلى أن الشركة حتى الآن ستقوم بإنتاج 50 وحدة من $(X_1)$، و(0) وحدة من $(X_2)$، لتحقق ربحاً مقداره 350 دينار، $(X_1)$ هو متغير أساسي، أما $(X_2)$ فهو متغير غير أساسي، أما المتغيرة الفجوة $(S_2)$ تبين كمية الوقت غير المستخدم، وهو أحد المتغيرات الأساسية وقيمته هي 40، وهذا يعني أن 40 ساعة لا تزال موجودة، أما المتغيرة الفجوة $(S_1)$ فهو متغير غير أساسي لذا فإن عدد الساعات يساوي (0).

أن الصف $(\Delta Z)$ مهماً بالنسبة لنا لسببين: الأول إنه يشير إذا ما كان الحل الحالي هو **الحل الأمثل** أم لا ؟ فعندما لا تكون هناك قيم موجبة في الصف، فهذا يعني الوصول للحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية، وفي مثالنا ومن خلال القيم الموجودة في الصف $(\Delta Z)$ في الجدول نجد بأن قيم $(X_1)$

و$(S_1)$ و$(S_2)$ سالبة أو صفرية، أما قيمة $(X_2)$ فهي $(\frac{3}{2})$ وهذا يعني بأن صافي الربح يمكن أن يزيد بمقدار $(\frac{3}{2})$ لكل وحدة مضافة على الحل الحالي.

ولأن قيمة $(X_1)$ في صف $(\Delta Z)$ تساوي الصفر، فهذا يعني أن إضافة وحدة واحدة من $(X_1)$ سوف لن يضيف شيئاً إلى الربح، لذا فإنه سيبقى دون تغيير.

طالما أنه لم تكن جميع القيم في الصف $(\Delta Z)$ في الجدول الأخير سالبة أو معدومة، لذا فإن هذا الجدول لا يمثل جدول الحل الأمثل، وينبغي أن نعيد خطوات السمبليكس السابقة الذكر.

سيدخل المتغير $(X_2)$ الحل اللاحق لأنه يحمل أكبر قيمة موجبة في الصف $(\Delta Z)$ بل إنه القيمة الوحيدة في الصف، هذا يعني أنه سيكون عمود $(X_2)$ هو عمود الإرتكاز، تتضمن الخطوة الموالية تحديد صف الإرتكاز وستقسم قيم عمود الكميات المتاحة على عمود الإرتكاز القيمة الأصغر هي لـ$(S_2)$، وعليه سيغادر عمود المتغيرات الأساسية ليحل محله المتغير $(X_2)$، وقيمة عنصر الإرتكاز هي $(01)$ كما هي موضحة في الجدول السابق.

- **الخطوة (05):** تطوير جدول الحل الثالث ويتم استبدال صف الإرتكاز من خلال قسمة كل رقم فيه على العنصر الإرتكاز هو (1)، ولأن القسمة على (1) لذا سوف لن تتغير القيم، وعليه ستكون قيم المتغير الداخل في جدول الحل الجديد لذي سيحل محل المتغير الخارج $(S_2)$.

| $T_3$ | $C_J$ | 7 | 5 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | B |
| 5 | $X_2$ | 0 | 1 | −2 | 1 | 40 |

القيم الجديدة لصف $(X_1)$ يمكن حسابها الآن كما يأتي:

$$X_1 = \left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2};0;50\right) - \frac{1}{2}\left(0;1;-2;1;40\right) = \left(1;0;\frac{3}{2};\frac{-1}{2};30\right)$$

وهكذا ستكون قيم صف $(X_1)$ والتي ستظهر في الجدول الحل الثالث مبينة بالآتي:

| $T_3$ | $C_J$ | 7 | 5 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | B |
| 7 | $X_1$ | 1 | 0 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{-1}{2}$ | 30 |

وأخيراً صفي تحسب في الجدول الثالث كما يأتي:

$$Z_J = CB'X_J S_J$$

$$Z_J = (7 \quad 5)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \left(7 \quad 5 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2}\right)$$

أما قيمة دالة الهدف هي:

$$Z = CB'B = (7 \quad 5)\begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} = 410$$

ومنه جدول الحل الثالث هو كالآتي:

| **$T_3$** | **$C_J$** | **7** | **5** | **0** | **0** | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **CB** | **XB** | **$X_1$** | **$X_2$** | **$S_1$** | **$S_2$** | **B** |
| **7** | **$X_1$** | 1 | 0 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{-1}{2}$ | 30 |
| **5** | **$X_2$** | 0 | 1 | $-2$ | 1 | 40 |
| $Z_J$ | | 7 | 5 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | **Z=410** |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | **0** | **0** | $\frac{-1}{2}$ | $\frac{-3}{2}$ | |

**جدول الحل الأمثل لأن:** $\Delta Z \le 0$

بما أن ( $\Delta Z$ ) في الجدول الحل الثالث سالبة أو معدومة، ذلك يعني أنه تم الوصول للحل الأمثل والحلول هي كما يلي:

$$X_1 = 30; X_2 = 40; S_1 = 0; S_2 = 0; Z = 410$$

وعادة يحتمل أن تكون هناك أخطاء رياضية عند المرور بخطوات السمبليكس المتعددة وعليه ستكون فكرة جيدة التحقق من الحل النهائي الذي توصلت إليه، ويمكن أن يتم ذلك في جزء عن طريق النظر إلى القيود ودالة الهدف .

القيد الأول: محقق تماما

$$2x_1 + x_2 \le 100 \Rightarrow 2(30) + 40 = 100$$

القيد الثاني: محقق تماماً

$$4x_1 + 3x_2 \le 240 \Rightarrow 4(30) + 3(40) = 240$$

دالة الهدف: الربح

$$Max(z) = 7x_1 + 5x_2 = 7(30) + 5(40) = 410$$

## II- تطبيق طريقة السمبليكس على مشكلة التدنئة أو التقليل:

في حالة التدنئة تكون القيود من النوع أكبر أو تساوي فتطرح متغيرات الفجوة من الطرف الأيسر وذلك للايفاء بشرط الصيغة النموذجية، ولهذا السبب يستعان بمتغيرات أخرى تسمى بالمتغيرات الإصطناعية تضاف إلى النموذج بعد طرح المتغيرات الفجوة وذلك لإمكانية الحصول على الحل الممكن وكذلك عندما تكون القيود من نوع مساواة تضاف المتغيرات الإصطناعية لنفس السبب، ولقد سبق لنا في هذا الفصل شرح كيف يتم معاملات المتغيرات الاصطناعية لإيجاد الصيغة النموذجية.

وبعد الحصول على الحل الممكن، يجب التخلص من هذه المتغيرات ( الإصطناعية) وإبعادها عن جداول السمبليكس، لأن بقاءها في مراحل حل السمبليكس هو علامة غير صحيحة للحصول على الحل الأمثل أو بصيغة أخرى عند بقائها لا يمكن الحصول على الحل الأمثل[1].

تشبه مشكلات التقليل إلى حد بعيد مشكلات التعظيم التي تناولناها أيضا في هذا الفصل، الفرق بينهما يكمن في صف $(\Delta Z)$ طالما أن هدفنا الآن هو تقليل التكاليف، فإن المتغير الجديدة الذي سيدخل إلى جدول الحل ( عمود الإرتكاز) سيكون المتغير الذي يمثل **أكبر قيمة بإشارة سالبة** في الصف $(\Delta Z)$، وهكذا فإننا سنختار المتغير الذي يقلل التكاليف بأكبر قدر ممكن، ويتم الوصول للحل الأمثل في مشكلات التقليل عندما تكون جميع القيم في صف $(\Delta Z)$ **موجبة أو معدومة** تماماً عكس ما هو عليه في حالات التعظيم، جميع خطوات السمبليكس الأخرى كما سنراها لاحقاً ستبقى كما في حالات التعظيم.

وهناك طريقتان للتخلص من المتغيرات الاصطناعية:

- ✓ طريقة (M ) الكبيرة (Big–M)؛
- ✓ طريقة المرحلتين (Two–Phase).

### II-1- طريقة ( M) الكبيرة (Big–M):

المثال التالي يوضح أهم الفوارق في تطبيق الطريقة السمبليكس بأسلوب (M ) الكبيرة على مشكلة التقليل، والذي يهدف إلى إيجاد أقل التكاليف عند إنتاج نوعين من السلع[2].

**مثال رقم (03):** تنتج مؤسسة لصناعة الإلكترونيات نوعين من المنتجات هما : A وB ، يتطلب إنتاج كل منتج المرور في مرحلتين، ويوجد لدى الشركة على الأقل (6) ساعات يومياً لأعمال المرحلة الأولى، ولا يقل عن (4) ساعات في اليوم الواحد مخصصة لأعمال المرحلة الثانية، والجدول التالي يبين الوقت الذي تحتاجه الوحدة الواحدة من كلا المنتجين، بالإضافة إلى تكلفة إنتاج كل منتج.

---

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 67 .

[2]- Gérald Baillargeon ,op-cit, P 157 .

| المنتج | المرحلة الأولى | المرحلة الثانية | التكلفة |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 1 | 3 |
| B | 3 | 1 | 4 |

**المطلوب:** نفترض أن الشركة ترغب في تخفيض تكاليفها الكلية، ما هي الكميات التي تنتجها من كل نوع.

**الحل:** يتم أولاً بناء نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة، وعلى النحو الآتي:

$X_1$: تمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج A.

$X_2$: تمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج B.

$$Min(z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$$

$$x_1 ; x_2 \geq 0$$

أولاً: نحول القيود إلى الصيغة النموذجية:

القيد الأول: $x_1 + 3x_2 - S_1 + A_1 = 6$

القيد الثاني: $x_1 + x_2 - S_2 + A_2 = 4$

إن المتغيرات الفجوة لا تحقق أي ربح، فإنه سيتم إضافتها إلى دالة الهدف الأصلية وبمعامل (0)، والمتغيرات الاصطناعية تضاف في حالة (Min) وبمعامل (M) وهو عدد كبير جداً، وتطرح في حالة (Max)، وعليه تصبح معادلة دالة الهدف:

$$Min(z) = 3x_1 + 4x_2 + 0S_1 + MA_1 + 0S_2 + MA_2$$

ثانياً: تكوين جدول الحل الأساسي الأول وبنفس القواعد المشار إليها سابقا:

متغيرات الاصطناعية

متغيرات الفجوة

متغيرات القرار

| $T_1$ | $C_J$ | 3 | 4 | 0 | M | 0 | M | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ | B | $\frac{B}{X_2}$ |
| M | $A_1$ | 1 | 3 | −1 | 1 | 0 | 0 | 6 | 2 |
| M | $A_2$ | 1 | 1 | 0 | 0 | −1 | 1 | 4 | 4 |
| $Z_J$ | | 2M | 4M | −M | M | −M | M | | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 3−2M | 4−4M | M | 0 | M | 0 | Z=10M | |

يلاحظ من جدول الحل الأولي أن المتغيرات الأساسية هي المتغيرات الإصطناعية، نختبر أمثلية الحل من خلال صف ($\Delta Z$) في جدول الحل الأولي حيث نلاحظ وجود قيم سالبة وهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل، حيث أن الوصول إلى الحل الأمثل في مشاكل التدنئة مشروط بأن تكون جميع ($\Delta Z \geq 0$)، نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سوف يدخل إلى الحل الأساسي، وتحديد المتغير الذي سيغادر الحل الأساسي، العمود الأمثل الذي يعطي المتغير الذي سيدخل إلى الحل فهو المقابل لأكبر قيمة سالبة في ($\Delta Z$) وفي حالة وجود (M) الكبرى في معاملات فإننا نقارن بين معاملات (M) وفي حالة عدم وجود (M) الكبرى في المعاملات نقارن مقارنة عادية بين الأعداد وفي هذه الحالة المتغير ($X_2$) الذي قيمته في السطر الأخير المقابلة له تساوي (4−4M) وهي أعلى قيمة بإشارة سالبة في الصف ($\Delta Z$) وبالتالي فإن ($X_2$) هو المتغير الداخل وعموده هو العمود الإرتكاز كما مبين في الجدول أعلاه.

ينبغي أن نحدد المتغير الذي سيغادر الحل سنقسم الكمية الموجودة في عمود (B) على القيمة المقابلة له في عمود الإرتكاز وعليه:

$$Min\left\{\frac{6}{3}=2,\frac{4}{1}=4\right\}=Min\{2,4\}=2$$

ونختار أقل نسبة موجبة وهي (2) وبذلك فإن ($A_1$) هو المتغير الخارج من الحل الأساسي وصفه وهو الصف الإرتكاز، وأن الرقم (3) هو العنصر الإرتكاز.

نقوم بإجراء التعديل الأول عن طريق تكوين جدول جديد نحصل بموجبه على حل أفضل من الحل الأولي وذلك بعد إجراء الحسابات الآتية:

تحتسب قيم صف المتغير الداخل إلى الحل عن طريق قسمة قيم عناصر الصف الإرتكاز على عنصر الإرتكاز، لدينا القيم الجديدة لصف الإرتكاز كما يلي:

$$X_1 = \left(\frac{1}{3};\frac{3}{3};\frac{-1}{3};\frac{1}{3};\frac{0}{3};\frac{0}{3};\frac{6}{3}\right) = \left(\frac{1}{3};1;\frac{-1}{3};\frac{1}{3};0;0;2\right)$$

تكوين قيم الصف الثاني ($A_2$):

قيم الصف الثاني الجديدة =

$$A_2 = (1;1;0;0;-1;1;4) - 1\left(\frac{1}{3};1;\frac{-1}{3};\frac{1}{3};0;0;2\right) = \left(\frac{2}{3};0;\frac{1}{3};\frac{-1}{3};-1;1;2\right)$$

يتم احتساب قيم صف $(Z_J)$ كما يلتي:

$$Z_J = CB'X_J S_J A_J$$

$$Z_J = (4 \quad M)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & -1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{4}{3}+\frac{2M}{3} \quad 4 \quad \frac{-4}{3}+\frac{M}{3} \quad \frac{4}{3}-\frac{M}{3} \quad -M \quad M\right)$$

أما قيمة دالة الهدف هي:

$$Z = CB'B = (4 \quad M)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 8 + 2M$$

وبموجب الحسابات السابقة نحصل على الجدول التالي:

| $T_2$ | $C_J$ | 3 | 4 | 0 | M | 0 | M | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ | B | $\frac{B}{X_1}$ |
| 4 | $X_2$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{-1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | 2 | 6 |
| M | $A_2$ | $\frac{2}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{-1}{3}$ | −1 | 1 | 2 | 3 |
| $Z_J$ | | $\frac{4}{3}+\frac{2M}{3}$ | 4 | $\frac{-4}{3}+\frac{M}{3}$ | $\frac{4}{3}-\frac{M}{3}$ | −M | M | | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | $\frac{5}{3}-\frac{2M}{3}$ | 0 | $\frac{4}{3}-\frac{M}{3}$ | $\frac{-4}{3}+\frac{4M}{3}$ | M | 0 | Z=8+2M | |

نختبر أمثلية الحل في جدول الثاني فنلاحظ وجود قيم سالبة، فنختار أعلى قيمة بإشارة سالبة، وتقع تحت المتغير ($X_1$)، ويكون المتغير الداخل ($X_1$)، وعموده هو عمود الإرتكاز ثم نحدد المتغيرة الخارج من الحل الأساسي كما مر سابقاً فيكون ($A_2$) وصفه هو صف الإرتكاز، ويكون الرقم ($\frac{2}{3}$) هو عنصر الإرتكاز، وبناء على هذا تتم عملية إعادة بناء الجدول الجديد ويكون على الشكل التالي:

| $T_3$ | $C_J$ | 3 | 4 | 0 | M | 0 | M | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ | B |
| 4 | $X_2$ | 0 | 1 | $-0{,}5$ | 0,5 | 0,5 | $-0{,}5$ | **1** |
| 3 | $X_1$ | 1 | 0 | 0,5 | $-0{,}5$ | $\frac{-3}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | **3** |
| $Z_J$ | | $\frac{4}{3}+\frac{2M}{3}$ | 4 | $-0{,}5$ | 0,5 | $-2{,}5$ | 2,5 | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | **0** | **0** | **0,5** | **M−0,5** | **2,5** | **M−2,5** | **Z=13** |

**جدول الحل الأمثل لأن:** $\Delta Z \geq 0$

نقوم بتقييم الحل من خلال ( $\Delta Z$ )، حيث نلاحظ بأن جميع القيم أكبر من أو تساوي صفر وهذا يدل على أن الحل الحالي يمثل حل الأمثل، ويتلخص الحل الأمثل فيما يلي:

$$X_1 = 3; X_2 = 1; S_1 = 0; S_2 = 0; Z = 13$$

**ملاحظة هامة:**

- ✓ إذا خرجت متغيرة الإصطناعية من الأساس فيمكننا الاستغناء عن حساب عناصر عمود المتغيرة الإصطناعية التي خرجت لأنها لا يمكن أن تدخل إلى أساس مرة أخرى[1]؛
- ✓ تعطى الأولية الخروج من الأساس في حالة الانحلال ( تعدد البدائل) لمتغيرة الإصطناعية.

**II-2- طريقة المرحلتين (Two−Phase):**

بعد أن لاحظنا تعقد العمليات الحسابية بعض الشيء في طريقة (M) الكبيرة وخاصة عندما تكون العمليات الحسابية يدوية، هناك طريقة أخرى أقل صعوبة مما في الطريقة السابقة وهي طريقة المرحلتين، يستعمل هذا الطريقة عندما تستعمل المتغيرات الإصطناعية في نماذج البرمجة الخطية بغية الحصول على الحل الممكن لهذه النماذج.

وتستخدم هذه الطريقة لإستبعاد أثر المتغيرات الإصطناعية في نماذج البرمجة الخطية والحصول على الحل الأمثل، وتكون هذه الطريقة على مرحلتين[2]:

---

[1]. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 85 .

[2]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 10.

- **المرحلة الأولى: (Phase I)** وهنا تظهر دالة الهدف فقط بالمتغيرات الإصطناعية وبمعامل واحد وتستبعد المتغيرات الأخرى كافة من دالة الهدف (سواء أكانت متغيرات القرار أم متغيرات الفجوة)، هذا إذا كانت دالة الهدف من نوع تدنئة، وتظهر المتغيرات الإصطناعية في دالة الهدف بمعاملات $(-1)$ إذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم، وكما يأتي:

$$Min\,(Z) = A_1 + A_2 + \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots + A_m$$
$$Max\,(Z) = -A_1 - A_2 - \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots - A_m$$

وتنتهي المرحلة الأولى في حالة (Min) أو (Max) عندما تساوي دالة الهدف صفر أي يوجد مرحلة ثانية (يوجد حل أمثل)، أما في حالة عدم المساواة دالة الهدف للصفر في نهاية المرحلة الأولى فلا يوجد حل أمثل ولا وجد مرحلة ثانية[1].

- **المرحلة الثانية: (Phase II)** وفي هذه المرحلة نستمر في حل المسألة و وهنا تظهر دالة الهدف على حقيقتها، أي بمعاملات المتغيرات القرار كما هي في النموذج، وتظهر متغيرات الفجوة بمعاملات أصفار وكما هي الحالة الطبيعية و على النحو الآتي:

$$Min\,(Z) = CX_1 + C_2X_2 + \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots + C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + \ldots\ldots\ 0S_m$$
$$Max\,(Z) = CX_1 + C_2X_2 + \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots + C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + \ldots\ldots\ 0S_m$$

وهنا يكمل الحل بجداول السمبلكس وكما مر بنا إلى أن نصل إلى جدول الحل الأمثل.

**مثال رقم (04):** حل نموذج البرمجة الخطية باستعمال طريقة المرحلتين

$$Min(z) = 2x_1 + x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{cases}$$
$$x_1; x_2 \geq 0$$

أولاً: نحول القيود إلى الصيغة النموذجية:

القيد الأول: $3x_1 + x_2 - S_1 + A_1 = 3$

القيد الثاني: $4x_1 + 3x_2 - S_2 + A_2 = 6$

القيد الثالث: $x_1 + 2x_2 + S_3 = 3$

**المرحلة الأولى:**

حل بدالة الهدف التالية: $Min(z) = A_1 + A_2$

[1] - Gérald Baillargeon ,op-cit, P 147 .

| $T_1$ | $C_J$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $A_1$ | $A_2$ | B | $\frac{B}{X_1}$ |
| 1 | $A_1$ | 3 | 1 | −1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 1 |
| 1 | $A_2$ | 4 | 3 | 0 | −1 | 0 | 0 | 1 | 6 | $\frac{3}{2}$ |
| 0 | $S_3$ | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 3 |
| $Z_J$ | | 7 | 4 | −1 | −1 | 0 | 1 | 1 | | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | −7 | −4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | Z=9 | |

نلاحظ وجود قيم سالبة وهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل، حيث أن الوصول إلى الحل الأمثل في مشاكل التدنئة مشروط بأن تكون جميع ($\Delta Z \geq 0$)، نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سوف يدخل إلى الحل الأساسي، وتحديد المتغير الذي سيغادر الحل الأساسي، المتغيرة التي تدخل إلى الأساس هي:($X_1$) والتي تخرج من الأساس هي: ($A_1$) وبإتباع نفس خطوات السمبليكس السابقة نقوم بإعداد الجدول الحل الأساسي الثاني:

| $T_2$ | $C_J$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $A_1$ | $A_2$ | B | $\frac{B}{X_2}$ |
| 0 | $X_1$ | 1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{-1}{3}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | 1 | 3 |
| 1 | $A_2$ | 0 | $\frac{5}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | −1 | 0 | $\frac{-4}{3}$ | 1 | 2 | $\frac{6}{5}$ |
| 0 | $S_3$ | 0 | $\frac{5}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | 1 | $\frac{-1}{3}$ | 0 | 2 | $\frac{6}{5}$ |
| $Z_J$ | | 0 | $\frac{5}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | −1 | 0 | $\frac{-4}{3}$ | 1 | | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 0 | $-\frac{5}{3}$ | $-\frac{4}{3}$ | 1 | 0 | $\frac{7}{3}$ | 0 | Z=2 | |

نلاحظ من خلال الجدول وجود قيم سالبة أي مزال هناك فرص أخرى لتقليل من التكاليف، وأكبر قيمة سالبة هي للمتغير ($X_2$) وهي التي تدخل إلى الأساس، كما نلاحظ أيضا أن هناك متغيرتين مرشحتين للخروج وهما ($A_2$),($S_3$) وهنا **تعطى أولوية الخروج للمتغيرة الإصطناعية** للتقريب الأكثر للحل، أي المتغيرة التي تخرج من الأساس هي ($A_2$) ومنه الجدول الحل الأساسي يكون كالآتي:

| $T_3$ | $C_J$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $A_1$ | $A_2$ | B |
| 0 | $X_1$ | 1 | 0 | $\frac{-3}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{3}{5}$ | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{5}$ |
| 0 | $X_2$ | 0 | 1 | $\frac{4}{5}$ | $\frac{-3}{5}$ | 0 | $\frac{-4}{3}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{6}{5}$ |
| 0 | $S_3$ | 0 | 0 | $-1$ | 1 | 1 | 1 | $-1$ | 0 |
| $Z_J$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **1** | **1** | Z= 0 |

**بما أن:** $\Delta Z \geq 0$ **و** $Z = 0$ **توجد مرحلة ثانية**

ننتقل إلى المرحلة الثانية، ويتم ذلك بحذف أعمدة معاملات المتغيرات الإصطناعية من جدول الحل الأخير من المرحلة الأولى.

**المرحلة الثانية:** وفي هذه المرحلة نستمر في حل المسألة وبدالة الهدف الأصلية (متغيرات القرار، ومتغيرات الفجوة) أي حذف المتغيرات الإصطناعية، أما الجدول الأول من المرحلة الثانية يتشكل بعد بإفراغ البيانات الجدول السابق فيه واختبار الحل.

دالة الهدف تكتب بشكل التالي :

$$Min(z) = 2x_1 + x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

ويكون الجدول الحل الأساسي الأول في المرحلة الثانية كالآتي:

| $T_1$ | $C_J$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | B |
| 2 | $X_1$ | 1 | 0 | $\frac{-3}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{3}{5}$ |
| 1 | $X_2$ | 0 | 1 | $\frac{4}{5}$ | $\frac{-3}{5}$ | 0 | $\frac{6}{5}$ |
| 0 | $S_3$ | 0 | 0 | $-1$ | 1 | 1 | 0 |
| $Z_J$ | | 2 | 1 | $\frac{-2}{5}$ | $\frac{-1}{5}$ | 0 | $Z = \frac{12}{5}$ |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | **0** | **0** | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | **0** | |

**بما أن: $\Delta Z \geq 0$ ومنه الجدول الأول من المرحلة الثانية هو جدول الحل الأمثل**

وهنا تكون قيم الحل الأمثل كما يلي:

$$X_1 = \frac{3}{5}; X_2 = \frac{6}{5}; S_1 = S_2 = S_3 = 0; Z = \frac{12}{5}$$

### III- حالات ومشاكل خاصة عند الحل بطريقة السمبليكس:

إستعرضنا الحالات الخاصة للحل بالطريقة البيانية، سنعود لوصف هذه الحالات عند الحل بطريقة السمبليكس:

### III-1- حالة عدم وجود حل ممكن:

تحدث عدم إمكانية الحل عندما لا نجد حلا مرضيا لجميع القيود، ويمكن الإشارة إلى عدم إمكانية الحل بمجرد النظر إلى جدول الحل النهائي، إذ نجد فيه أن جميع القيم صف ( $\Delta Z$ ) نشير إلى الوصول للحل الأمثل، لكن نجد أنه لا يزال هناك متغير اصطناعي في الجدول أدناه جدول الحل النهائي لمشكلة برمجة خطية من نوع التدنئة الجدول مثالا عن مشكلة برمجة خطية لم تتم صياغتها بشكل صحيح، ربما تتضمن هذه المشكلات قيوداً متضاربة، عدم وجد حل ممكن يكون ممكناً لبقاء المتغير الاصطناعي في مزيج الحل، رغم أن جميع القيم في الصف ( $\Delta Z$ ) موجبة أو معدومة ( وهو المعيار المعتمد في الوصول للحل الأمثل في حالة التدنئة، والمثال التالي يبين هذه الحالة.[1]

[1]. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق، ص: 184.

**مثال رقم (05):** الجدول التالي يوضيح لنا حالة عدم إمكانية الحل.

| T | $C_J$ | 5 | 8 | 0 | 0 | M | M | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | $A_2$ | B |
| 5 | $X_1$ | 1 | 0 | −2 | 3 | −1 | 0 | 200 |
| 8 | $X_2$ | 0 | 1 | 1 | 2 | −2 | 0 | 100 |
| M | $A_2$ | 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | 1 | 20 |
| $Z_J$ | | 5 | 8 | −2 | 31−M | −21−M | M | Z=1800+ |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | **0** | **0** | **0** | **M−31** | **2M−21** | **0** | 20M |

**بما أن: $\Delta Z \geq 0$ وهو شرط الأمثلية وتوجد متغيرة اصطناعية ($A_2$) في مزيج الحل إذن حالة عدم وجود حل ممكن**

## III-2- عدم محدودية الحل:

وهي الحالة التي تكون فيها جميع عناصر عمود عنصر الإرتكاز **أقل أو تساوي الصفر**، حيث يستحيل إختيار المتغيرة التي تخرج من الأساس، لأن الخوارزمية تشترط على المتغيرة التي تخرج من الأساس بأنها المقابلة لأصغر نسبة موجبة بين عناصر عمود الثوابت وعناصر عمود عنصر الإرتكاز.[1]

**مثال رقم (06):** الجدول الموالي يوضح خالة محدودية الحل

| $T_2$ | $C_J$ | 6 | 9 | 0 | 0 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | B | $\frac{B}{X_1}$ |
| 9 | $X_2$ | −1 | 1 | 2 | 0 | 30 | − |
| 0 | $S_2$ | 0 | 0 | −1 | 1 | 10 | − |
| $Z_J$ | | −9 | 9 | 18 | 0 | $Z = 270$ | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 15 | **0** | −18 | 0 | | |

**يستحيل تحديد المتغيرة التي تخرج من الأساس لأن عمود الإرتكاز يحوي قيم سالبة ومعدومة .**

**عمود الإرتكاز**

---

[1]. محمد راتول، مرجع سابق، ص 78.

يوضح الجدول الحل الثاني الذي تم إحتسابه لمشكلة تعظيم بإعتماد طريقة السمبليكس، وهو يشير إلى حالة عدم المحدودية، لا يمثل الحل أعلاه حلاً أمثلاً لأن ( $\Delta Z$ ) ليست جميعها سالبة أو معدومة، كما هو مطلوب للوصول إلى حل الأمثل في مشكلات التعظيم، والمتغير المرشح لدخول هو ($X_1$)، ولتحديد المتغير الذي سيغادر يجب قسمة قيم عمود الكميات على قيم عمود الإرتكاز ولكن قيم هذا الأخير سالبة ومعدومة وهي غير مقبولة، فإن ذلك يشير إلى عدم محدودية الحل.

**III-3- حالة الإنحلال:**

نكون أمام حالة الإنحلالية عندما نجد متغيرتين على الأقل مرشحتين للدخول إلى الأساس ( حيث تساوت النسبة الموجبة الدنيا التي على أساسها يتم اختيار المتغير الذي يدخل الأساس)، أو متغيرتين على الأقل مرشحتين للخروج من الأساس، وفي الحالتين نختار واحدة عشوائياً بسبب عدم وجود معيار محدد لتحديد المتغير الخارج أو الداخل للأساس، وعند استخدام طريقة الحل المبسطة قد تظهر حالة الإنحلال في أحد مراحل الحل، وإما تستمر لنهاية الحل أو تختفي قبل الوصول إلى الحل الأمثل، وعند استمرار حالة الانحلال إلى نهاية الحل لن تتحسن قيمة دالة الهدف وتبق على حالها[1].

**مثال رقم (07):** يبين الجدول الموالي مثالاً عن حالة الإنحلال في مشكلة التعظيم

| $T_2$ | $C_J$ | 5 | 8 | 2 | 0 | 0 | 0 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | B | $\frac{B}{X_1}$ |
| 8 | $X_2$ | $\frac{1}{4}$ | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 10 | 40 |
| 0 | $S_2$ | 4 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $-1$ | 1 | 0 | 20 | 5 |
| 0 | $S_3$ | 2 | 0 | 2 | $\frac{2}{5}$ | 0 | 1 | 10 | 5 |
| $Z_J$ | | 2 | 8 | 8 | 16 | 0 | 0 | $Z = 80$ | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 3 | **0** | **−6** | −16 | 0 | 0 | | |

**نجد أن أصغر القيم الموجبة من ناتج قسمة عمود الكميات على قيم عمود الإرتكاز متساوية لصفي $S_1$ و $S_2$ وهذا يشير إلى وجود حالة إنحلال .**

**عمود الإرتكاز**

---

[1] جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص ص: 93-95 .

### III-4- تعدد الحلول المثلى:

تعدد الحلول المثلى أو وجود أكثر من حل أمثل بديل يمكن معرفتها عندما نستخدم طريقة السمبليكس وذلك عن طريق إلقاء نظرة على الجدول النهائي، فإذا كانت قيم المتغيرات القرار في الصف ( $\Delta Z$ ) مساوي للصفر رغم عدم وجودها في مزيج الحل، فهذا يعني وجد أكثر من حل أمثل بديل[1].

**مثال رقم (08):** الجدول الموالي يبين الحل الأمثل لمشكلة التعظيم

| T3 | CJ | 2 | 1 | 1 | 0 | -M | 0 | 0 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $S_3$ | B | $\frac{B}{X_3}$ |
| 2 | $X_1$ | 1 | 2 | 0,5 | 0 | 0 | 0 | 0,25 | 4 | 8 |
| 0 | $S_2$ | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | -0,5 | 12 | - |
| 0 | $S_1$ | 0 | 6 | 0 | 1 | -1 | 0 | 1 | 12 | - |
| $Z_J$ | | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0,5 | $Z = 8$ | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 0 | -3 | 0 | 0 | -M | 0 | -0,5 | | |

يتضح من جدول الحل الأمثل الأول بأن الحل الأمثل هو:

$$X_1 = 4; X_2 = X_3 = 0; S_1 = S_2 = 12 ; S_3 = 0; Z = 8$$

من خلال ملاحظة قيم صف ( $\Delta Z$ ) يتبين بأن معامل ($X_3$) في الصف يساوي صفر، وهذا يعني إمكانية تكوين حل أمثل آخر بدخول ($X_3$) إلى الحل الأساسي وخروج ($X_1$)، ونحصل على حل أمثل آخر كما هو مبين في الجدول التالي:

| T4 | CJ | 2 | 1 | 1 | 0 | -M | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $S_3$ | B |
| 1 | $X_2$ | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0,5 | 8 |
| 0 | $S_2$ | 2 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 16 |
| 0 | $S_1$ | 0 | 6 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0,5 | 12 |
| $Z_J$ | | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0,5 | $Z = 8$ |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 0 | -3 | 0 | 0 | -M | 0 | -0,5 | |

نفس قيمة Z ، وهذا يدل عن حالة تعدد الحلول

[1]. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق، ص: 187.

نلاحظ من جدول الحل الأمثل الثاني تحقق نفس قيمة (Z) في الجدول الحل الأمثل الأول مع تغير متغيرات الحل الأساسي التي أصبحت :

$$X_3 = 8 ; X_1 = X_2 = 0 ; S_1 = 12 ; S_2 = 16 ; S_3 = 0 ; Z = 8$$

**IV– تمارين محلولة:**

**التمرين الأول:** افترض أن لديك نموذج البرمجة التالي

| | |
|---|---|
| **المطلوب:**<br>1. أوجد الحل الأمثل بطريقة (M) الكبرى؛<br>2. أوجد الحل الأمثل بطريقة المرحلتين. | $Min(z) = 80x_1 + 60x_2$<br>$s/c$<br>$\begin{cases} 18x_1 + 12x_2 \geq 180 \\ 6x_1 + 9x_2 \leq 162 \\ 5x_1 + 10x_2 = 110 \end{cases}$<br>$x_1 ; x_2 \geq 0$ |

**حل التمرين الأول:**

**1. طريقة (M) الكبرى:**

أولاً: إيجاد الصيغة النموذجية:

القيد الأول: $18x_1 + 12x_2 - S_1 + A_1 = 180$

القيد الثاني: $6x_1 + 9x_2 + S_2 = 162$

القيد الثالث: $5x_1 + 10x_2 + A_2 = 110$

معادلة دالة الهدف:

$$Min(z) = 80x_1 + 60x_2 + 0S_1 + MA_1 + 0S_2 + MA_2$$

ثانياً: إيجاد جدول الحل الأساسي الأول:

| $T_1$ | $C_J$ | 80 | 60 | 0 | M | 0 | M | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ | B | $\frac{B}{X1}$ |
| M | $A_1$ | 18 | 12 | −1 | 1 | 0 | 0 | 180 | 10 |
| 0 | $S_2$ | 6 | 9 | 0 | 0 | 1 | 0 | 162 | 27 |
| M | $A_2$ | 5 | 10 | 0 | 0 | 0 | 1 | 110 | 22 |
| $Z_J$ | | 23M | 22M | −M | M | 0 | M | | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 80−23M | 60−22M | M | 0 | 0 | 0 | Z=290M | |

نختبر أمثلية الحل من خلال صف $(\Delta Z)$ في جدول الحل الأولي حيث نلاحظ وجود قيم سالبة وهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل، حيث أن الوصول إلى الحل الأمثل في مشاكل التدنئة مشروط بأن تكون جميع $(\Delta Z \geq 0)$، نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سوف يدخل إلى الحل الأساسي، وتحديد المتغير الذي سيغادر الحل الأساسي، العمود الأمثل الذي يعطي المتغير الذي سيدخل إلى الحل فهو المقابل لأكبر قيمة سالبة في $(\Delta Z)$ وفي حالة وجود (M) الكبرى في معاملات فإننا نقارن بين معاملات (M) وفي حالة عدم وجود (M) الكبرى في المعاملات نقارن مقارنة عادية بين الأعداد وفي هذه الحالة المتغير $(X_1)$ هو الذي يدخل إلى الأساس، ينبغي أن نحدد المتغير الذي سيغادر الحل سنقسم الكمية الموجودة في عمود (B) على القيمة المقابلة له في عمود الإرتكاز، وعليه نختار أقل نسبة موجب وهي (10) وبذلك فإن $(A_1)$ هو المتغير الخارج من الحل الأساسي وصفه وهو الصف الإرتكاز، وأن الرقم (18) هو العنصر الإرتكاز. وهكذا يمكن إعداد الجدول الثاني:

| $T_2$ | $C_J$ | 80 | 60 | 0 | M | 0 | M | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ | B | $\frac{B}{X2}$ |
| 80 | $X_1$ | 1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{-1}{18}$ | $\frac{1}{18}$ | 0 | 0 | 10 | 15 |
| 0 | $S_2$ | 0 | 5 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{-1}{3}$ | 1 | 0 | 102 | $\frac{102}{5}$ |
| M | $A_2$ | 0 | $\frac{20}{3}$ | $\frac{5}{18}$ | $\frac{-5}{18}$ | 0 | 1 | 60 | 9 |
| $Z_J$ | | 80 | $\left(\frac{160}{3}+\frac{20}{3}M\right)$ | $\left(\frac{-40}{9}+\frac{5}{18}M\right)$ | $\left(\frac{40}{9}-\frac{5}{18}M\right)$ | 0 | M | Z=800+60M | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 0 | $\left(\frac{20}{3}-\frac{20}{3}M\right)$ | $\left(\frac{40}{9}-\frac{5}{18}M\right)$ | $\left(\frac{-40}{9}+\frac{23}{18}M\right)$ | 0 | 0 | | |

المتغيرة الداخلة للأساس هي ($X_2$)، أما المتغيرة الخارجة من الأساس ($A_2$) ويكون الجدول الثالث كالآتي:

| $T_3$ | $C_J$ | 80 | 60 | 0 | M | 0 | M | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ | B |
| 80 | $X_1$ | 1 | 0 | $\frac{-1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | 0 | 0 | 4 |
| 0 | $S_2$ | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{-1}{8}$ | 1 | 0 | 57 |
| 60 | $X_2$ | 0 | 1 | $\frac{1}{24}$ | $\frac{-1}{24}$ | 0 | 1 | 9 |
| $Z_J$ | | 80 | 60 | $\frac{-25}{6}$ | $\frac{25}{6}$ | 0 | M | Z=860 |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 0 | 0 | $\frac{25}{6}$ | $\left(M - \frac{25}{6}\right)$ | 0 | $(M-1)$ | |

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \geq 0$ ومنه الجدول الثالث هو جدول حال أمثل، ونتائج هي كالآتي:

$$X_1 = 4; X_2 = 9; S_2 = 57; S_1 = S_3 = 0; Z = 860$$

**2, طريقة المرحلتين:**

**المرحلة الأولى:** لدينا دالة الهدف

$$Min(z) = A_1 + A_2$$

جدول الحل الأساسي الأول:

| $T_1$ | $C_J$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ | B | $\frac{B}{X1}$ |
| 1 | $A_1$ | 18 | 12 | −1 | 1 | 0 | 0 | 180 | 10 |
| 0 | $S_2$ | 6 | 9 | 0 | 0 | 1 | 0 | 162 | 27 |
| 1 | $A_2$ | 5 | 10 | 0 | 0 | 0 | 1 | 110 | 22 |
| $Z_J$ | | 23 | 22 | −1 | 1 | 0 | 1 | Z=290 | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | −23 | −22 | 1 | 0 | 0 | 0 | | |

المتغيرة الداخلة للأساس هي: ($X_1$) والخارجة من الأساس هي: ($A_1$)

| $T_2$ | $C_J$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | B | $\frac{B}{X2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ | | |
| 0 | $X_1$ | 1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{-1}{18}$ | $\frac{1}{18}$ | 0 | 0 | 10 | 15 |
| 0 | $S_2$ | 0 | 5 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{-1}{3}$ | 1 | 0 | 102 | $\frac{102}{5}$ |
| 1 | $A_2$ | 0 | $\frac{20}{3}$ | $\frac{5}{18}$ | $\frac{-5}{18}$ | 0 | 1 | 60 | 9 |
| $Z_J$ | | 0 | $\frac{20}{3}$ | $\frac{5}{18}$ | $\frac{-5}{18}$ | 0 | 1 | Z=60 | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 0 | $-\frac{20}{3}$ | $-\frac{5}{18}$ | $\frac{23}{3}$ | 0 | 0 | | |

المتغيرة الداخلة للأساس هي: ($X_2$) والخارجة من الأساس هي: ($A_2$)

| $T_3$ | $C_J$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ | |
| 0 | $X_1$ | 1 | 0 | $\frac{-1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | 0 | $\frac{-1}{10}$ | 4 |
| 0 | $S_2$ | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{-1}{8}$ | 1 | $-\frac{3}{4}$ | 57 |
| 0 | $X_2$ | 0 | 1 | $\frac{1}{24}$ | $\frac{-1}{24}$ | 0 | $\frac{3}{20}$ | 9 |
| $Z_J$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | Z=0 |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | |

بما أن: $\Delta Z \geq 0$ و $Z = 0$ توجد مرحلة ثانية ( يوجد حل أمثل).

**المرحلة الثانية:**

دالة الهدف تكتب بالشكل التالي:

$$Min(z) = 80x_1 + 60x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

ويكون جدول الحل الأساسي الأول في المرحلة الثانية كالآتي:

| $T_3$ | $C_J$ | 80 | 60 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | B |
| 80 | $X_1$ | 1 | 0 | $\frac{-1}{12}$ | 0 | 4 |
| 0 | $S_2$ | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ | 1 | 57 |
| 60 | $X_2$ | 0 | 1 | $\frac{1}{24}$ | 0 | 9 |
| $Z_J$ | | 80 | 60 | $\frac{-25}{6}$ | 0 | Z=860 |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 0 | 0 | $\frac{25}{6}$ | 0 | |

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \geq 0$ ومنه الجدول الثالث هو جدول حال أمثل، ونتائج هي كالآتي:

$$X_1 = 4 ; X_2 = 9 ; S_2 = 57 ; S_1 = S_3 = 0 ; Z = 860$$

**التمرين الثاني:** افترض أن لديك نموذج البرمجة التالي

| | |
|---|---|
| **المطلوب:**<br>1. أوجد الحل الأمثل بطريقة (M) الكبرى؛<br>2. أوجد الحل الأمثل بطريقة المرحلتين. | $Max(z) = 2x_1 + 3x_2$<br>$s/c$<br>$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 24 \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ x_2 = 2 \end{cases}$<br>$x_1 ; x_2 \geq 0$ |

**حل التمرين الثاني:**

**1. طريقة (M) الكبرى:**

أولاً: إيجاد الصيغة النموذجية:

القيد الأول: $4x_1 + 6x_2 + S_1 = 24$

القيد الثاني: $5x_1 + 4x_2 - S_2 + A_1 = 20$

القيد الثالث: $x_2 + A_2 = 2$

معادلة دالة الهدف:

$$Max(z) = 2x_1 + 3x_2 + 0S_1 + 0S_2 - MA_1 - MA_2$$

ثانياً: إيجاد جدول الحل الأساسي الأول:

| $T_1$ | $C_J$ | 2 | 3 | 0 | 0 | −M | −M | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | $A_2$ | B | $\frac{B}{X_2}$ |
| 0 | $S_1$ | 4 | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 24 | 4 |
| −M | $A_1$ | 5 | 4 | 0 | −1 | 1 | 0 | 20 | 5 |
| −M | $A_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 |
| $Z_J$ | | −5M | −5M | 0 | M | −M | −M | | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 2+5M | 3+5M | 0 | −M | 0 | 0 | Z=−22M | |

نختبر أمثلية الحل من خلال صف $(\Delta Z)$ في جدول الحل الأولي حيث نلاحظ وجود قيم موجبة وهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل، حيث أن الوصول إلى الحل الأمثل في مشاكل التعظيم مشروط بأن تكون جميع $(\Delta Z \leq 0)$، نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سوف يدخل إلى الحل الأساسي، وتحديد المتغير الذي سيغادر الحل الأساسي، العمود الأمثل الذي يعطي المتغير الذي سيدخل إلى الحل فهو المقابل لأكبر قيمة موجبة في $(\Delta Z)$ وفي هذه الحالة المتغير $(X_2)$ هو الذي يدخل إلى الأساس، ينبغي أن نحدد المتغير الذي سيغادر الحل سنقسم الكمية الموجودة في عمود (B) على القيمة المقابلة له في عمود الإرتكاز، وعليه نختار أقل نسبة موجب وهي (2) وبذلك فإن $(A_2)$ هو المتغير الخارج من الحل الأساسي وصفه وهو الصف الإرتكاز، وأن الرقم (1) هو العنصر الإرتكاز.

وهكذا يمكن إعداد الجدول الثاني:

| $T_2$ | $C_J$ | 2 | 3 | 0 | 0 | −M | −M | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | $A_2$ | B | $\frac{B}{X1}$ |
| 0 | $S_1$ | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | −6 | 12 | 3 |
| −M | $A_1$ | 5 | 0 | 0 | −1 | 1 | −4 | 12 | $\frac{12}{5}$ |
| 3 | $X_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | − |
| $Z_J$ | | −5M | 3 | 0 | M | −M | 4M+3 | | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 2+5M | 0 | 0 | −M | 0 | −5M−3 | Z=−12M+6 | |

المتغيرة الداخلة للأساس هي: $(X_1)$ والخارجة من الأساس هي: $(A_1)$

| $T_3$ | $C_J$ | 2 | 3 | 0 | 0 | −M | −M | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | $A_2$ | B | $\frac{B}{X1}$ |
| 0 | $S_1$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{4}{5}$ | $\frac{-4}{5}$ | $\frac{-14}{5}$ | $\frac{12}{5}$ | 3 |
| 2 | $X_1$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{-1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{-4}{5}$ | $\frac{12}{5}$ | − |
| 3 | $X_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | − |
| $Z_J$ | | 2 | 3 | 0 | $\frac{-2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{7}{5}$ | $z = \frac{54}{5}$ | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 0 | 0 | 0 | $\frac{2}{5}$ | $-M - \frac{2}{5}$ | $-M - \frac{7}{5}$ | | |

المتغيرة الداخلة للأساس هي: $(S_2)$ والخارجة من الأساس هي: $(S_1)$

| $T_4$ | $C_J$ | 2 | 3 | 0 | 0 | −M | −M | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | $A_2$ | B |
| 0 | $S_2$ | 0 | 0 | $\frac{4}{5}$ | 1 | −1 | $\frac{-7}{2}$ | 3 |
| 2 | $X_1$ | 1 | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | $\frac{-3}{2}$ | 3 |
| 3 | $X_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| $Z_J$ | | 2 | 3 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | $z = 12$ |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | −M | −M | |

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \leq 0$ ومنه الجدول الرابع هو جدول حال أمثل، ونتائج هي كالآتي:

$$X_1 = 3; X_2 = 2; S_1 = 0; S_2 = 3; Z = 12$$

**2. طريقة المرحلتين:**

**المرحلة الأولى:** لدينا دالة الهدف

$$Max(z) = -A_1 - A_2$$

الجدول الحل الأساسي الأول:

| $T_1$ | $C_J$ | 0 | 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | $A_2$ | B | $\frac{B}{X_2}$ |
| 0 | $S_1$ | 4 | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 24 | 4 |
| −1 | $A_1$ | 5 | 4 | 0 | −1 | 1 | 0 | 20 | 5 |
| −1 | $A_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 |
| $Z_J$ | | −5 | −5 | 0 | 1 | −1 | −1 | | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 5 | 5 | 0 | −1 | 0 | 0 | Z=−22 | |

المتغيرة الداخلة للأساس هي: $(X_2)$ والخارجة من الأساس هي: $(A_2)$

| $T_2$ | $C_J$ | 0 | 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | $A_2$ | B | $\frac{B}{X1}$ |
| 0 | $S_1$ | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | −6 | 12 | 3 |
| −1 | $A_1$ | 5 | 0 | 0 | −1 | 1 | −4 | 12 | $\frac{12}{5}$ |
| 0 | $X_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | − |
| $Z_J$ | | −5 | 0 | 0 | 1 | −1 | 4 | | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 5 | 0 | 0 | −1 | 0 | −5 | Z=−12 | |

المتغيرة الداخلة للأساس هي: $(X_1)$ والخارجة من الأساس هي: $(A_1)$

| $T_3$ | $C_J$ | 0 | 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | $A_2$ | B | $\frac{B}{X1}$ |
| 0 | $S_1$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{4}{5}$ | $\frac{-4}{5}$ | $\frac{-14}{5}$ | $\frac{12}{5}$ | 3 |
| 0 | $X_1$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{-1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{-4}{5}$ | $\frac{12}{5}$ | − |
| 0 | $X_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | − |
| $Z_J$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $z = 0$ | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | | |

بما أن: $\Delta Z \leq 0$ و $Z = 0$ توجد مرحلة ثانية ( يوجد حل أمثل).

**المرحلة الثانية:** دالة الهدف تكتب بالشكل التالي

$$Max(z) = 2x_1 + 3x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

ويكون جدول الحل الأساسي الأول في المرحلة الثانية كالآتي:

| $T_1$ | $C_J$ | 2 | 3 | 0 | 0 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | B | $\frac{B}{X1}$ |
| 0 | $S_1$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{4}{5}$ | $\frac{12}{5}$ | 3 |
| 2 | $X_1$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{-1}{5}$ | $\frac{12}{5}$ | − |
| 3 | $X_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | − |
| $Z_J$ | | 2 | 3 | 0 | $\frac{-2}{5}$ | $z = \frac{54}{5}$ | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 0 | 0 | 0 | $\frac{2}{5}$ | | |

المتغيرة الداخلة للأساس هي: $(S_2)$ والخارجة من الأساس هي: $(S_1)$

| $T_2$ | $C_J$ | 2 | 3 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **CB** | **XB** | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | **B** |
| **0** | $S_1$ | 0 | 0 | $\frac{4}{5}$ | 1 | 3 |
| **2** | $X_1$ | 1 | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | 3 |
| **3** | $X_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| $Z_J$ | | 2 | 3 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $z=12$ |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | |

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \leq 0$ ومنه الجدول الثاني من المرحلة الثانية هو جدول حال أمثل، ونتائج هي كالآتي:

$$X_1 = 3;\ X_2 = 2;\ S_1 = 0;\ S_2 = 3;\ Z = 12$$

**IV– تمارين مقترحة:**

**التمرين الأول:** أوجد الصيغة النموذجية وجدول الحل الأساسي الأول للبرامج التالية

| | |
|---|---|
| $1.Max(z)=20x_1+15x_2$<br>$s/c$<br>$\begin{cases}7x_1+2x_2\geq 14\\8x_1+16x_2\leq 16\\2x_1+5x_2\geq 10\end{cases}$<br>$x_1;x_2\geq 0$ | $2.Min(z)=x_1-x_2-3x_3$<br>$s/c$<br>$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3\geq 1\\4x_1-2x_2+x_3\geq -2\\3x_1+x_3=2\end{cases}$<br>$x_1;x_2;x_3\geq 0$ |

**التمرين الثاني:** أوجد الحل الأمثل للمسائل التالية بالطريقة المبسطة ( Méthode Simplexe )

| | |
|---|---|
| $2.Max(z)=16x_1+15x_2$<br>$s/c$<br>$\begin{cases}40x_1+31x_2\leq 124\\-x_1+x_2\leq 1\\x_1\leq 3\end{cases}$<br>$x_1;x_2\geq 0$ | $1.Max(z)=100x_1+60x_2$<br>$s/c$<br>$\begin{cases}8x_1+2x_2\leq 40\\6x_1+9x_2\leq 108\\8x_1+6x_2\leq 96\end{cases}$<br>$x_1;x_2\geq 0$ |

| | |
|---|---|
| 4.بين أن منطقة الحل للنموذج التالي غير محدودة: $$Max(z)=3x_1+x_2$$ $$s/c$$ $$\begin{cases} x_1+x_2\le 2 \\ x_1\le 3 \end{cases}$$ $$x_1;x_2\ge 0$$ | $$3.Max(z)=200x_1+370x_2$$ $$s/c$$ $$\begin{cases} x_1+2x_2\le 300 \\ x_1+x_2\le 190 \\ x_1\le 110 \\ x_2\le 130 \end{cases}$$ $$x_1;x_2\ge 0$$ |

**التمرين الثالث:** أوجد الحل الأمثل للمسائل التالية:

| | |
|---|---|
| 1. بطريقة M الكبرى ***BIG (M)***: $$Min(z)=10x_1+30x_2$$ $$s/c$$ $$\begin{cases} 3x_1+2x_2\le 6 \\ 6x_1+x_2\ge 6 \\ x_2\ge 2 \end{cases}$$ $$x_1;x_2\ge 0$$ | 2. بطريقة M الكبرى و **طريقة المرحلتين:** $$Min(z)=4x_1+x_2$$ $$s/c$$ $$\begin{cases} x_1+2x_2\le 4 \\ 3x_1+x_2=3 \\ 4x_1+3x_2\ge 6 \end{cases}$$ $$x_1;x_2\ge 0$$ |

**التمرين الرابع:** بين أن النموذج التالي لا يحتوي على حل أمثل بإستخدام طريقة المرحلتين:

$$Max(z)=3x_1+2x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 5x_1+4x_2\le 20 \\ 7x_1+10x_2\ge 70 \\ 8x_1+5x_2\ge 40 \end{cases}$$
$$x_1;x_2\ge 0$$

# الفصل الرابع

# النموذج المقابل أو البرمجة الثنائية (Dualité)

لكل مشكلة برمجة خطية هناك مشكلة أخرى مرتبطة بها، نسمي إحدى هاتين المشكلتين بالمشكلة الأولية (Primal Model)، والأخرى نسميها النموذج المقابل (Dual Model) وتمتلك كلتا المشكلتين خواص مرتبطة مع الخواص الأخرى، فمثلاً الحل الأمثل لإحدى هاتين المشكلتين يعطي معلومات كاملة عن الحل الأمثل للأخرى.

أي أن لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية هناك نموذج مقابل ومشتق منه، فإذا كان النموذج الأولى يتعلق بتعظيم دالة الهدف فإن النموذج المقابل له سيكون تدنئة دالة الهدف وتصاغ عادة من نفس البيانات التي يتضمنها النموذج الأول والعكس بالعكس.

إن اللجوء إلى استخدام النموذج المقابل يتضمن فوائد متعددة منها سهولة التوصل إلى تحقيق الحل الأمثل لمشاكل البرمجة الخطية وسرعته عندما يصعب حل النموذج الأولي، لذلك سيتم التطرق في هذا الفصل إلى بعض القواعد الرياضية لتحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل وبالعكس، كذلك صياغة وإيجاد الحل للمشكلة المقابلة والتي نلاحظ بأن طريقة الحل لا تختلف كثيراً عن الحل بأسلوب الطريقة البسيطة للنموذج الأولي.

**I- مميزات النموذج المقابل (الثنائي):**

من مميزات النموذج المقابل الآتي:

- ✓ يساعد النموذج المقابل على التوصل إلى الحل بصورة أسرع في بعض الأحيان وذلك بتقليص خطوات الحل، أي أن طريقة حل المشكلة المقابلة تستلزم خطوات رياضية اقل تعقيد من الخطوات اللازمة لحل المشكلة الأولية أحياناً[1]؛
- ✓ للتخلص من الإشارة السالبة في الجانب الأيمن (أن وجدت) أي عندما تكون المصادر ذات كميات سالبة وهو أهم ما يمكن الحصول عليه في حالة التحويل إلى النموذج الثنائي[2]؛
- ✓ لغرض التعرف على ابعاد المشكلة الأخرى (المشكلة الثنائية، البديلة) فإذا كان النموذج الأولي (Primal) وبصيغة الـ (Max) أي المشكلة بالصيغة الربحية، فبإمكاننا التعرف على النموذج الثنائي ويكون بصيغة الـ (Min) وتمثيله للجانب الكلفوي (في نفس المشكلة)، ولنفس المشكلة المعبر عنها أولا بالصيغة الأولية.

[1]. دلال صادق الجواد ، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق، ص 100 .

[2]. حامد سعد نور الشمرتي ، مرجع سابق. ص 76 .

- ✓ يعطي النموذج الثنائي (المقابل) كثير من الحقائق الإقتصادية التي تساعد على تفهم أبعاد المشكلة وبخاصة فيما يتعلق بأسعار الظل؛
- ✓ يعيد النموذج الثنائي اثر التغيرات في معاملات دالة الهدف وثوابت الطرف الأيمن ومعرفة المجال الذي تتحقق فيه نتائج الحل الأمثل؛
- ✓ بالإمكان إضافة قيود جديدة للمشكلة وإيجاد حل أمثل لها وفقاً للقيود المضافة، ومنها نستنتج أن لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية نموذجاً مقابلاً، كما لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية نموذجاً أولياً[1].

**II – خطوات تحويل النموذج الأولي (Primal) إلى النموذج المقابل أو الثنائي (Dual):**

لغرض تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل وبالعكس يمكن ذلك باتباع الخطوات الآتية[2]:

- ✓ نعكس صيغة دالة الهدف، فإذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي بصيغة تدنئة فإننا نعكسها ونجعلها للنموذج المقابل بصيغة تعظيم والعكس بالعكس؛
- ✓ استبدال المتغيرات المشار إليها بالرمز (X) في النموذج الأولي إلى متغيرات مشار لها بالرمز (Y) في النموذج المقابل وتحويل رمز دالة الهدف من (Z) في النموذج الأولي إلى (W) في النموذج المقابل؛
- ✓ جعل القيم التي تقع في الجهة اليمنى من قيود النموذج الأولي (ثوابت القيود) معاملات للمتغيرات الجديدة في دالة هدف النموذج المقابل؛
- ✓ جعل معاملات متغيرات دالة هدف النموذج الأولي، الطرف الأيمن للقيود الجديدة للنموذج المقابل؛
- ✓ تحويل مصفوفة المعاملات للمتغيرات في القيود النموذج الأولي بحيث تصبح الصفوف أعمدة و الأعمدة صفوف ( إيجاد منقول مصفوفة معاملات المتغيرات)؛
- ✓ إضافة شرط عدم السلبية على المتغيرات الجديدة؛
- ✓ تغير إشارة القيود من (≤) إلى (≥) أو العكس.

---

[1]. سهيلة عبد الله سعيد، مرجع سابق، ص 110.

[2]. فتحي خليل حمدان، رشيق رفيق مرعي، مرجع سابق، ص 79.

**ملاحظة**[1]:

1. إذا كان عدد متغيرات النموذج الأولي تساوي (N) وعدد القيود (M) فإن عدد متغيرات النموذج المقابل تساوي (M) وعدد القيود (N)؛
2. عند التحويل من النموذج الأولي إلى نموذج مقابل يجب مراعاة ما يلي:

- إذا كانت دالة الهدف (Max) فيجب أن تكون القيود كلها أقل من أو يساوي (≤)؛
- إذا كانت دالة الهدف (Min) فيجب أن تكون القيود كلها أكبر من أو يساوي (≥)؛
- إذا لم تتحقق هذه الشروط فيجب تحقيقها في الأمثلة.

**III- صياغة المشكلة المقابلة (الثنائية):**

هناك صيغتين للبرامج الخطية، الصيغة القانونية والصيغة المختلطة سوف نحاول توضيح كيفية أيجاد الصيغة المقابلة لكل منهما.

**1-III – ثنائية الصيغ القانونية:** إذا كان البرنامج الأولي بالشكل المصفوفي في صيغته القانونية التالية[2]:

$$
\begin{aligned}
&Max(z) = C'X \\
&s/c \\
&\{AX \leq B \\
&X \geq 0
\end{aligned}
$$

فإن برنامجه الثنائي يكتب كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&Min(w) = B'Y \\
&s/c \\
&\{A'Y \geq C \\
&Y \geq 0
\end{aligned}
$$

[1]. فتحي خليل حمدان، مرجع سابق، ص 130

[2]. راتول محمد، مرجع سابق، ص81.

**مثال رقم (01):** أوجد النموذج المقابل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية:

| النموذج الأولي (Primal): | النموذج الثنائي (Dual): |
| --- | --- |
| $Max(z)=5x_1+6x_2$<br>$s/c$<br>$\begin{cases} x_1+9x_2\le 60 \\ 2x_1+3x_2\le 45 \\ 5x_1-2x_2\le 20 \\ x_2\le 30 \end{cases}$<br>$x_1;x_2\ge 0$ | $Min(W)=60y_1+45y_2+20y_3+30y_4$<br>$s/c$<br>$\begin{cases} y_1+2y_2+5y_3\ge 5 \\ 9y_1+3y_2-2y_3+y_4\ge 6 \end{cases}$<br>$y_1;y_2;y_3;y_4\ge 0$ |

يلاحظ أن مصفوفة أمثال القيود في المشكلة الأولية هي منقول مصفوفة أمثال القيود النموذج المقابل، ويلاحظ في هذا المثال، أن عدد القيود في النموذج المقابل أقل منها في المشكلة الأولية. بما أن الحل الأمثل لإحدى المشكلتين يمكن الحصول عليه من الحل الأمثل للمشكلة الأخرى، فإنه سيكون من الأسهل حل النموذج المقابل في هذه الحالة، وذلك لأن الصعوبات الحسابية في حل مشكلة البرمجة الخطية التي تأتي من كثرة القيود أكثر من تلك التي تأتي من كثرة المتغيرات، وهذا يعطي إحدى فوائد دراسة المشاكل المقابلة.

**مثال رقم (02):** حول نموذج البرمجة الخطية لآتي إلى النموذج الثنائي (المقابل):

| النموذج الأولي (Primal): | النموذج الثنائي (Dual): |
| --- | --- |
| $Min(z)=5x_1+2x_2+x_3$<br>$s/c$<br>$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3\ge 20 \\ 6x_1+8x_2+5x_3\ge 30 \\ 7x_1+x_2+3x_3\ge 40 \\ x_1+2x_2+4x_3\ge 50 \end{cases}$<br>$x_1;x_2;x_3\ge 0$ | $Max(W)=20y_1+30y_2+40y_3+50y_4$<br>$s/c$<br>$\begin{cases} 2y_1+6y_2+7y_3+y_4\le 5 \\ 3y_1+8y_2+y_3+2y_4\le 2 \\ y_1+y_2+3y_3+4y_4\ge 6 \end{cases}$<br>$y_1;y_2;y_3;y_4\ge 0$ |

**III-2 - ثنائية الصيغ المختلطة:** وهي الصيغة تكون فيها المتراجحات ($\geq;\leq$) وتوجد معادلة بصيغة مساواة وكل منها معاملة خاصة كالآتي[1]:

في حالة وجود قيد بإشارة يساوي (=) في النموذج الأولي، يتم تحويل هذا القيد إلى قيدين بإشارتين مختلفتين أحدهما بإشارة أقل من أو يساوي، والآخر بإشارة أكبر من أو يساوي، وفي حال كانت دالة الهدف في النموذج الأولي تعظيم (Max) نقوم بتحويل القيد الذي إشارته أكبر من أو يساوي إلى القيد أقل من أو يساوي عن طريق ضرب القيد الأكبر أو يساوي في $(-1)$، وفي حال كانت دالة الهدف في النموذج الأولي تخفيض (Min) نقوم بتحويل القيد الذي إشارته أقل من أو يساوي إلى قيد إشارته أكبر من أو يساوي عن طريق ضرب القيد الأقل أو يساوي في $(-1)$، وعلى أية حال يجب أن تكون إشارات قيود النموذج الأولي متماثلة قبل تحويله إلى النموذج المقابل.

**مثال رقم (03):** حول النموذج الأولي (Primal) الآتي إلى النموذج المقابل (Dual):

$$Max(z) = x_1 + x_2 - x_3 - x_4$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 18 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 20 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 9 \end{cases}$$
$$x_1; x_2; x_3; x_4 \geq 0$$

**الحل:** نحول القيد الثالث إلى الشكل أقل من أو يساوي ويتم ذلك بضرب القيد الثالث بـ $(-1)$. فيصبح القيد:

$$x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 9 \Rightarrow (-1)\times(x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 9)$$
$$-x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \leq -9$$

[1]. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 131.

ويكون النموذج بشكله النهائي كالآتي:

$$Max(z) = x_1 + x_2 - x_3 - x_4$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 \le 18 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 20 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \le -9 \end{cases}$$
$$x_1; x_2; x_3; x_4 \ge 0$$

وسيكون النموذج المقابل كما يلي:

$$Min(W) = 18y_1 + 20y_2 - 9y_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 3y_1 + 5y_2 - y_3 \ge 1 \\ -2y_1 + y_3 \ge 1 \\ y_1 + 6y_2 - 4y_3 \ge -1 \\ 5y_1 - y_3 \ge -1 \end{cases}$$
$$y_1; y_2; y_3 \ge 0$$

**مثال رقم (04):** حول النموذج الأولي (Primal) الآتي إلى النموذج المقابل (Dual):

$$Max(z) = 2x_1 - x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 7 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$
$$x_1; x_2 \ge 0$$

**الحل:** لمعالجة القيود عندما تكون في حالة المساواة، يجب أولاً تعبير عن كل قيد مساواة بقيدين أحدهما أكبر أو يساوي والأخر أقل أو يساوي، وبعد ذلك تعديل جميع القيود أن تكون من نوع واحد أي أقل من أو يساوي ليتلاءم مع دالة الهدف تعظيم وذلك بضرب بـ $(-1)$.

| المرحلة الأولى: | المرحلة الثانية: |
|---|---|
| $Max(z)=2x_1-x_2$<br>$s/c$<br>$\begin{cases} x_1+3x_2\leq 7 \\ x_1+3x_2\geq 7 \\ x_1-x_2\leq 3 \\ x_1-x_2\geq 3 \end{cases}$<br>$x_1;x_2\geq 0$ | $Max(z)=2x_1-x_2$<br>$s/c$<br>$\begin{cases} x_1+3x_2\leq 7 \\ -x_1-3x_2\leq -7 \\ x_1-x_2\leq 3 \\ -x_1+x_2\leq -3 \end{cases}$<br>$x_1;x_2\geq 0$ |

ومن البرنامج المقابل كما يلي:

$$Min(W)=7y_1-7y_2+3y_3-3y_4$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} y_1-y_2+y_3-y_4\geq 2 \\ 3y_1-3y_2-y_3+y_4\geq -1 \end{cases}$$
$$y_1;y_2;y_3;y_4\geq 0$$

### IV- العلاقة بين حل النموذجين الأولي والثنائي[1]:

- القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة والتي تظهر في السطر الأخير تساوي قيم المتغيرات الرئيسية على وجه الترتيب للبرنامج الثنائي وبالقيمة المطلقة؛
- وقيم متغيرات الفجوة في البرنامج الثنائي التي تظهر في السطر الأخير تساوي على وجه الترتيب قيم المتغيرات الرئيسية في البرنامج الأولي؛
- قيم المتغيرات الحقيقية في البرنامج الأولي والتي تظهر في عمود الثوابت، تساوي القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة للبرنامج الثنائي والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل، وقيم المتغيرات الحقيقية للبرنامج الثنائي والتي تظهر في عمود الثوابت، تساوي القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة للبرنامج الأولي والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل (بالقيمة المطلقة)؛
- قيمة الدالة الإقتصادية في الحل الأمثل للبرنامجين تكون متساوية، وفي كلا الحالتين تأخذ قيمتها المطلقة.

[1]. راتول محمد، مرجع سابق، ص ص: 83-84 .

**مثال رقم (05):** من البرنامج الخطي التالي

| | |
|---|---|
| **المطلوب:**<br>1. أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الأولي؛<br>2. أوجد الحل الأمثل للبرنامج الأولي ثم البرنامج الثنائي، ثم قارن نتائج الحل في البرنامجين، وماذا تستنتج؟ | $Max(z)=12x_1+48x_2$<br>$s/c$<br>$\begin{cases} x_1+2x_2\leq 10 \\ 3x_1+3x_2\leq 24 \\ -4x_1\leq -8 \end{cases}$<br>$x_1;x_2\geq 0$ |

**الحل:**

1. البرنامج المقابل يكتب كما يلي:

$$Min(W)=10y_1+24y_2-8y_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} y_1+3y_2-4y_3\geq 12 \\ 2y_1+3y_2\geq 48 \end{cases}$$
$$y_1;y_2;y_3\geq 0$$

2. وعند حل النموذجين ( الأول والثاني) أعلاه وبطريقة السمبليكس، سوف نبين الجداول النهائية، أي جداول الحل الأمثل للنموذجيين وبيان العلاقة بين الحلين في قيم المتغيرات الأولية والبديلة الثنائية.

- جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي:

| XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | B |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_2$ | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{8}$ | 4 |
| $S_2$ | 0 | 0 | $\frac{-3}{2}$ | 1 | $\frac{3}{8}$ | 6 |
| $X_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | $\frac{-1}{4}$ | 2 |
| $\Delta Z=C_J-Z_J$ | 0 | 0 | 24 | 0 | 3 | $Z=216$ |

$w=216$

$S_1=0$ ; $S_2=0$

$y_1=24$ ; $y_2=0$ ; $y_3=3$

- جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي:

| YB | $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_3$ | $S_1$ | $S_2$ | B |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 0 | 0 | $\frac{-1}{2}$ | 24 |
| $Y_3$ | 0 | $\frac{-3}{8}$ | 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{-1}{8}$ | 3 |
| $\Delta W = C_J - Z_J$ | 0 | −6 | 0 | −2 | −4 | $W = 216$ |

$Z = 216$

$S_1 = 0\,;\; S_2 = 6\,;\, S_3 = 0$

$X_1 = 2\,;\; X_2 = 4$

- المقارنة والاستنتاج: من جدول الحل الأمثل لبرنامج الحل الأولي وجدنا:

$X_1=2$ وهي قيمة تقابل $S_1$ بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي؛

$X_2=4$ وهي قيمة تقابل $S_2$ بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي؛

$S_2=6$ وهي قيمة تقابل $Y_2$ بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي؛ بقية المتغيرات معدومة.

وإذا ما نظرنا على مستوى السطر الأخير للبرنامج الأولي، فإننا نجد أن:

$S_1$ تقابلها القيمة 24، وهي قيمة $Y_1$ في البرنامج الثنائي؛

$S_3$ تقابلها القيمة 3، وهي قيمة $Y_3$ في البرنامج الثنائي؛ بقية المتغيرات معدومة.

كما أن قيمة الدالة الإقتصادية متساوية في جدول الحل الأمثل للبرنامجين أي W=Z=216.

**النتيجة:**

**هي أن جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يتضمن أيضا الحل الأمثل للبرنامج الثنائي، وجدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يتضمن أيضا الحل الأمثل للبرنامج الأولي.**

### V- التفسير الاقتصادي العلمي للنموذج الثنائي:

سنورد في هذه الفقرة ما ينطوي عليه النموذج المقابل، أي معنى ما تذهب إليه تغيير القيود وجعل المصادر في الجانب الايمن هم معاملات لمتغيرات دالة الهدف وتفسير تخصيص لكل قيد متغير بديل في النموذج الثنائي عن طريق سرد المثال الأتي[1]:

**مثال رقم (06):**

تنتج إحدى الشركات نوعين من المنتجات $X_1$ و $X_2$ باستخدام ثلاثة عناصر إنتاجية هي: المواد الأولية والطاقة والعمل، فإذا كان المتاح من هذه الموارد هو 8 ، 10 ، 12 وحدة على الترتيب، ويوضح الجدول الآتي ما تحتاجه الوحدة الواحدة من كل من $X_1$ و $X_2$ من هذه الموارد وربح كل منها.

**المطلوب :**

1. شكل المسألة في نموذج خطي؛
2. أكتب الشكل الثنائي للبرنامج الخطي؛
3. فسر اقتصاديا النموذج الثنائي ( دالة الهدف، والقيود).

| المنتج / عناصر الإنتاج | المنتجات $X_1$ | $X_2$ | الموارد المتاحة |
|---|---|---|---|
| مواد أولية | 1 | 2 | 8 |
| طاقة | 3 | 1 | 10 |
| عمل | 4 | 3 | 12 |
| ربح الوحدة الواحدة | 2 | 3 | |

**الحل:**

1. يكون نموذج البرمجة الخطية الخاص بالمثال والجدول السابق كما يلي:

$$Max(z) = 2x_1 + 3x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 & \text{قيد المواد الأولية} \\ 3x_1 + x_2 \leq 10 & \text{قيد الطاقة} \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12 & \text{قيد العمل} \end{cases}$$

$$x_1; x_2 \geq 0$$

هذا النموذج ( الأولي) يعطينا :

- ✓ قيم $X_1$ و $X_2$ ، قيمة Z المثلى التي تجعل الربح أكبر ما يمكن والوحدات غير المستغلة من المواد $S_1$ ، $S_2$ و $S_3$ ؛
- ✓ لكن هذا النموذج لا يحدد لنا الأتي: كلفة الوحدة الواحدة من $X_1$ و $X_2$ ، الكلفة الكلية للإنتاج، لذلك سوف نلجأ إلى استخراج النموذج المقابل (الثنائي).

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 87.

2. نفرض:

$y_1$ : سعر الوحدة الواحدة من المواد الأولية؛

$y_2$: سعر الوحدة الواحدة من الطاقة؛

$y_3$: سعر الوحدة الواحدة من العمل؛

ويكون النموذج المقابل ( الثنائي) كما يلي:

$$Min(W)=8y_1+10y_2+12y_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} y_1+3y_2+4y_3\geq 2 \\ 2y_1+y_2+3y_3\geq 3 \end{cases}$$
$$y_1;y_2;y_3\geq 0$$

3. ويمكن التفسير لحدود دالة الهدف كما يلي:

$8y_1$: كلفة المواد الأولية (أي حاصل ضرب سعر الوحدة الواحدة من المواد الأولية في كمية المواد الأولية المتوفرة)؛

$10y_2$: كلفة الطاقة (أي حاصل ضرب سعر الوحدة الواحدة من الطاقة في كمية المتوفرة من الطاقة)؛

$12y_3$: كلفة العمل (أي حاصل ضرب سعر الوحدة الواحدة من العمل في كمية العمالة المتوفرة)؛

والمجموع لهذه الحدود الثلاثة يمثل الكلفة الكلية ولهذا نسعى إلى تحقيق اقل كلفة للعملية الإنتاجية ( دالة الهدف للنموذج المقابل من نوع تدنئة Min).

أما التفسير الإقتصادي لقيود النموذج الثنائي المقابل:

**القيد الأول:**

$y_1$: تمثل كلفة المواد الأولية اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج $x_1$ ؛

$3y_2$: تمثل كلفة الطاقة اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج $x_1$ ؛

$4y_3$: تمثل كلفة العمل اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج $x_1$ ؛

والمجموع لهذه الحدود الثلاثة يمثل الكلفة الكلية اللازمة لتصنيع وحدة واحدة من المنتوج $x_1$ ، القيد الأول هو كلفة إنتاج وحدة واحدة من $x_1$ ، وأن الكلفة الكلية لتصنيع وحدة واحدة من $x_1$ يجب أن تساوي أو بالحد الأدنى لربح الوحدة الواحدة من المنتوج $x_1$ ومقداره (2).

**القيد الثاني:**

$2y_1$: تمثل كلفة المواد الأولية اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج $x_2$ ؛

$y_2$: تمثل كلفة الطاقة اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج $x_2$ ؛

$3y_3$: تمثل كلفة العمل اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج $x_2$ ؛

والمجموع لهذه الحدود الثلاثة يمثل الكلفة الكلية اللازمة لتصنيع وحدة واحدة من المنتوج $x_2$ ، القيد الثاني هو كلفة إنتاج وحدة واحدة من $x_2$ ، وأن الكلفة الكلية لتصنيع وحدة واحدة من $x_2$ يجب أن تساوي أو بالحد الأدنى لربح الوحدة الواحدة من المنتوج $x_2$ ومقداره (3).

## VI- طريقة السمبليكس المقابلة ( الثنائية) Dual du Simplexe :

إحدى الفرضيات الأساسية لحل النموذج الأولي بواسطة طريقة السمبليكس هي إن الموارد ( قيم الجانب الأيمن للقيود) يجب إن تكون أكبر من الصفر، حل النموذج المقابل بواسطة طريقة السمبليكس يساعد على التخلص من هذا الشرط حيث إن قيمة الموارد ممكن إن تكون سالبة وعلى هذا الأساس فلا حاجة لإدخال المتغيرات الاصطناعية إلى النموذج[1] .

كما توجد حالة أخرى وهو إثناء الحل بطريقة السمبليكس الاعتيادية وعند الانتقال من جدول سمبليكس إلى آخر يظهر في الجانب الأيمن الإشارة السالبة لبعض قيم المتغيرات أو جميعها، فالعلاج ما ورد في الحالتين أعلاه والحصول على الحل الأمثل وبشكل أكيد يجب إتباع طريقة السمبليكس المقابلة لتجاوز ما يظهر من عقبات مماثلة تمنع ظهور الحل الأمثل[2].

ولتوضيح ذلك نورد المثال التالي وفي كل مرحلة سيتم توضيح خطوات تطبيق طريقة السمبيلكس المقابلة.

**مثال رقم (07):** أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الأتي مستعيناً بطريقة السمبليكس المقابلة (dual du simplexe) :

$$Min(Z) = x_1 + 4x_2 + 3x_4$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \geq 3 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 2 \end{cases}$$
$$x_1; x_2; x_3; x_4 \geq 0$$

**الحل:**

ولضمان عدم استخدام المتغيرات الاصطناعية من إيجاد الصيغة النموذجية للنموذج، فيتم عكس القيود من أكبر أو تساوي إلى أقل أو تساوي ( بضرب القيدين في (1−)) فتصبح القيود في النموذج كما يأتي:

الصيغة النموذجية :

[1]. علي خليل الزبيدي، حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق ، ص 96.

[2]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 95.

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + S_1 = -3$$
$$2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 + S_2 = -2$$
$$Min\ (z) = x_1 + 4x_2 + 3x_4 + 0S_1 + 0S_2$$

وبالنظر إلى النموذج (كميات الجانب الأيمن سالبة) بالإمكان القول إن هذا النموذج يتمتع بحل غير ممكن، وفي هذه حالة استخدام طريقة السمبليكس الاعتيادية سوف نحصل على ما يسمى أمثل ولكن غير ممكن.

| $T_1$ | $C_J$ | 1 | 4 | 0 | 3 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $S_1$ | $S_2$ | B |
| 0 | $S_1$ | −1 | −2 | 1 | −1 | 1 | 0 | −3 |
| 0 | $S_2$ | 2 | 1 | −4 | −1 | 0 | 1 | −2 |
| $Z_J$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 1 | 4 | 0 | 3 | 0 | 0 | Z=0 |

بما أن : $\Delta Z \geq 0$ وهذا ما يدل أن الحل أمثل، وبما أن الجانب الأيمن سالب كميات سالبة ولذلك يكون الحل أمثل ولكن غير ممكن ولذلك يجب إتباع طريقة السمبليكس المقابلة وتكون خطواتها كالأتي:[1]

1. **إختيار المتغير الخارج:** وهنا يتم اختيار المتغير الأساسي والذي يملك أقل قيمة سالبة:

$$Min\ \{-3;-2\}$$

وفي مثالنا يكون المتغير $S_1=-3$ هو المتغير الخارج ويجب أن يغادر الحل.

**2.تحديد المتغيرة الداخلة:**

ولتحديد المتغير الداخل نختار من المتغيرات غير الأساسية :

**حالة التدنئة (Min):**

$$Min\left\{\frac{-(C_J - Z_J)}{\mu_K};\ \mu_K < 0\right\}$$

**حالة التعظيم (Max):**

$$Min\left\{\frac{(C_J - Z_J)}{\mu_K};\ \mu_K < 0\right\}$$

$\mu_K$ : هي قيم السالبة في صف المتغير الخارج.

[1] - Gérald Baillargeon ,op-cit , P 224 .

ومن مثالنا:

$$Min\left\{\frac{-1}{-1};\frac{-4}{-2};\frac{-3}{-1}\right\}=Min\{1;2;3\}$$

ومنه أقل نسبة تقابل المتغير غير الأساسي لـ $x_1$ ، إذن $x_1$ يحل محل $S_1$ بعد ذلك سوف نباشر بالعمليات الحسابية لاستخراج الجدول اللاحق للسمبليكس بطريقة الاعتيادية:

| $T_2$ | $C_J$ | 1 | 4 | 0 | 3 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $S_1$ | $S_2$ | B |
| 1 | $X_1$ | 1 | 2 | −1 | 1 | −1 | 0 | 3 |
| 0 | $S_2$ | 0 | −3 | −2 | −3 | 2 | 1 | −8 |
| $Z_J$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $\Delta Z=C_J-Z_J$ | | 1 | 4 | 0 | 3 | 0 | 0 | Z=0 |

لازال الجدول الثاني يتمتع بالحل الغير ممكن بالنسبة للنموذج الأولي المتغير الأساس $S_2=-8$ يملك قيمة سالبة وهو المتغير الخارج ولتحديد أي من المتغيرات غير الأساسية التي سوف تدخل والتي تحمل معاملات سالبة في صف $S_2$ ، ويتحدد من خلال النسبة:

$$Min\left\{\frac{-2}{-3};\frac{-1}{-2};\frac{-2}{-3}\right\}=Min\left\{\frac{2}{3};\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right\}$$

النسبة الأقل هي تقابل $x_3$ ، إذن المتغير $x_3$ هو الذي يدخل محل $S_2$ المتغير الخارج، والجدول الثالث يكون على النحو الأتي:

| $T_3$ | $C_J$ | 1 | 4 | 0 | 3 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $S_1$ | $S_2$ | B |
| 1 | $X_1$ | 1 | $\frac{7}{2}$ | 0 | $\frac{5}{2}$ | −2 | $\frac{-1}{2}$ | 7 |
| 0 | $X_3$ | 0 | $\frac{3}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | −1 | $\frac{-1}{2}$ | 4 |
| $Z_J$ | | 1 | $\frac{7}{2}$ | 0 | $\frac{5}{2}$ | −2 | $\frac{-1}{2}$ | Z=7 |
| $\Delta Z=C_J-Z_J$ | | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 2 | $\frac{1}{2}$ | |

بما أن قيم صف $b>0;\Delta Z\geq 0$ إذن الجدول الثالث هو جدول حل أمثل ونتائج هي:

$$X_1=7;X_2=0;X_3=4;X_4=0;S_1=S_2=0;Z=7$$

**VII- طريقة السمبليكس المعدلة ( المحورة):**

من خلال الحل بطريقة السمبليكس نلاحظ أن الحسابات التي تم إجراؤها كانت على جميع القيم ولكل جدول من الجداول خلال الحل، وإذا كانت مشكلة البرمجة الخطية تتضمن عدد كبير من المتغيرات والقيود فإن حلها تتطلب حسابات كثيرة ووقت لإجراءها[1].

**مثال رقم (08):** أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الأتي مستخداما طريقة السمبيلكس المعدلة.

$$Min(z) = -3x_1 + x_2 + x_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3 \\ 2x_1 - x_3 = -1 \end{cases}$$
$$x_1; x_2; x_3 \ge 0$$

1. الصيغة النموذجية :

نضرب القيد الثالث في $(-1)$ نجد:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + S_1 = 11$$
$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 - S_2 + A_1 = 3$$
$$-2x_1 + x_3 + A_2 = 1$$
$$Min(z) = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2$$

2. نضع معاملات للمتغيرات داخل القيود على شكل أعمدة وكما يأتي:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; P_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وبما أن المتغيرات $A_2; A_1; S_1$ هي متغيرات أساسية في الحل الابتدائي الأساسي الممكن ولهذا تكون مصفوفة $\beta$ مكونة من أعمدتهم وكما يأتي:

$$\beta = \begin{pmatrix} P_4 & P_6 & P_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[1] . دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق ، ص 66.

دائما يكون معكوس مصفوفة الوحدة هي نفسه أي: $\beta^{-1} = I$ ولاستخراج المقدر المسمى بمضروب السمبليكس (Multiplier Simplex) والذي يرمز له بـ $\pi = C_B \beta^{-1}$

$$\pi = C_B \beta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & M & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & M & M \end{pmatrix}$$

أم قيم الصف $\Delta Z = (\overline{C}_J)$ فتحدد من العلاقة الآتية:

$$\overline{C}_J = C_J - \pi P_J$$

فنحسب $\overline{C}_J$ إلى المتغيرات الباقية والتي هي: $X_1$; $X_2$; $X_3$; $S_2$ وهذه أحدى فوائد تطبيق طريقة السمبليكس المحورة وكما يأتي:

$$\overline{C}_1 = C_1 - \pi P_1 = (-3) - \begin{pmatrix} 0 & M & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -3 + 6M$$

$$\overline{C}_2 = C_2 - \pi P_2 = (1) - \begin{pmatrix} 0 & M & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - M$$

$$\overline{C}_3 = C_3 - \pi P_3 = (1) - \begin{pmatrix} 0 & M & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 3M$$

$$\overline{C}_{S_2} = C_{S_2} - \pi P_5 = (0) - \begin{pmatrix} 0 & M & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = M$$

ومن ملاحظة $\overline{C}_J$ نستنتج أن المتغير $X_3$ سوف تدخل إلى الحل :

| $X_B$ | $\beta^{-1}$ | | | b | المتغير الداخل | العمود المتغير الداخل |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 1 | 0 | 0 | 11 | | 1 |
| $A_1$ | 0 | 1 | 0 | 3 | $X_3$ | 2 |
| $A_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 | | 1 |

المتغيرة الخارجة $A_2$ والداخلة $X_3$ وتكون:

$$C_B = \begin{pmatrix} 0 & M & 1 \end{pmatrix}$$

ولذلك يكون قيم عمود b ومصفوفة $\beta^{-1}$ كما يأتي:

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b} = \beta^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ولتحديد مضروب السمبليكس في هذه المرحلة يكون كما يلي:

$$\pi = C_B \beta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & M & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & M & -2M+1 \end{pmatrix}$$

وبما أن المتغيرات $X_1$; $X_2$; $S_2$ هي التي لم تدخل الحل لحد الآن فيتم حساب $\overline{C}_J$ لها فقط:

$$\overline{C}_1 = C_1 - \pi P_1 = (-3) - \begin{pmatrix} 0 & M & -2M+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -1$$

$$\overline{C}_2 = C_2 - \pi P_2 = (1) - \begin{pmatrix} 0 & M & -2M+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - M$$

$$\overline{C}_{S_2} = C_{S_2} - \pi P_5 = (0) - \begin{pmatrix} 0 & M & -2M+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = M$$

المتغير $X_2$ سوف تدخل إلى الحل:

$$\overline{P}_2 = \beta^{-1} P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

| $X_B$ | $\beta^{-1}$ | | | b | المتغير الداخل | العمود المتغير الداخل |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 1 | 0 | -1 | 10 | | -2 |
| $A_1$ | 0 | 1 | -2 | 1 | $X_2$ | 1 |
| $X_3$ | 0 | 0 | 1 | 1 | | 0 |

المتغيرة الخارجة $A_1$ والداخلة $X_2$ وتكون:

$$C_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

حساب قيم عمود b ومصفوفة $\beta^{-1}$ كما يأتي:

$$\beta = \begin{pmatrix} P_4 & P_2 & P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b} = \beta^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ولتحديد مضروب السمبليكس في هذه المرحلة يكون كما يلي:

$$\pi = C_B \beta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

وبما أن المتغيرات $X_1$; $S_2$ هي التي لم تدخل الحل لحد الآن فيتم حساب $\overline{C}_J$ لها فقط:

$$\overline{C}_1 = C_1 - \pi P_1 = (-3) - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -1$$

$$\overline{C}_{S_2} = C_{S_2} - \pi P_5 = (0) - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

المتغير $X_1$ سوف تدخل إلى الحل:

$$\overline{P}_1 = \beta^{-1} P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

| $X_B$ | $\beta^{-1}$ | | | b | المتغير الداخل | العمود المتغير الداخل |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 1 | 2 | -5 | 12 | | 3 |
| $X_2$ | 0 | 1 | -2 | 1 | $X_1$ | 0 |
| $X_3$ | 0 | 0 | 1 | 1 | | -2 |

المتغيرة الخارجة $S_1$ والداخلة $X_1$ وتكون:

$$C_B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

حساب قيم عمود b ومصفوفة $\beta^{-1}$ كما يأتي:

$$\beta = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -2 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$$\overline{b} = \beta^{-1} b == \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

ولتحديد مضروب السمبليكس في هذه المرحلة يكون كما يلي:

$$\pi = C_B \beta^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \beta^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

وبما أن المتغيرات $S_1$; $S_2$ هي التي لم تدخل الحل لحد الآن فيتم حساب $\overline{C}_J$ لها فقط:

$$\overline{C}_{S_1} = C_{S_1} - \pi P_4 = (0) - \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$$

$$\overline{C}_{S_2} = C_{S_2} - \pi P_5 = (0) - \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$$

إذن كلتا الكميتان متساويتان وهذا يعني أننا وصلنا إلى الحل الأمثل ويجب استخراج العمود الأيمن ( الثابت) للمحاولة الأخيرة وهو بمثابة قيم المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل.

| $X_B$ | $\beta^{-1}$ | | | b |
|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{-5}{3}$ | 4 |
| $X_2$ | 0 | 1 | -2 | 1 |
| $X_3$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{-7}{3}$ | 9 |

القيم المثلى للحل:

$$X_1 = 4 ; X_2 = 1 ; X_3 = 9 ; S_1 = S_2 = 0$$

$$Z = C_B \bar{b} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = -2$$

**VIII- تمارين محلولة:**

**التمرين الأول:** أكتب النموذج المقابل للنماذج الأولية التالية:

| | |
|---|---|
| $1.Max(z) = 20x_1 + 15x_2 + 15x_3$<br>$s/c$<br>$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 8x_3 \le 100 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 \le 60 \end{cases}$<br>$x_1 ; x_2 ; x_3 \ge 0$ | $2.Min(z) = 5x_1 + 10x_2$<br>$s/c$<br>$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 24 \\ -2x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ 2x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$<br>$x_1 ; x_2 \ge 0$ |

**حل التمرين الأول:**

النموذج المقابل للبرنامج الأول:

$$Min(W) = 100y_1 + 60y_2$$

$s/c$

$$\begin{cases} 8y_1 + 4y_2 \ge 20 \\ 2y_1 + 4y_3 \ge 15 \\ 8y_1 + 4y_2 \ge 15 \end{cases}$$

$$y_1 ; y_2 \ge 0$$

النموذج المقابل للبرنامج الثاني:

نقوم بتحويل جميع القيود إلى الشكل( أكبر من أو يساوي) ليتلاءم مع دالة الهدف التدنئة وذلك بضرب القيد الأول بـ $(-1)$، أما القيد الثالث يصبح قيدين أكبر من أو يساوي و أصغر من أو يساوي ويضرب هذا الأخير بـ $(-1)$ فنحصل على النموذج الجاهز التالي:

$$Min(z) = 5x_1 + 10x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 \geq -24 \\ -2x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ -2x_1 - 2x_2 \geq -8 \end{cases}$$
$$x_1; x_2 \geq 0$$

بحسب القواعد أعلاه فإن النموذج المقابل لهذه المشكلة هو:

$$Max(W) = -24y_1 + 4y_2 + 8y_3 - 8y_4$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} -2y_1 - 2y_2 + 2y_3 - 2y_4 \leq 5 \\ -4y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 2y_4 \leq 10 \end{cases}$$
$$y_1; y_2; y_3; y_4 \geq 0$$

**التمرين الثاني**: من البرنامج الخطي التالي:

| | |
|---|---|
| **المطلوب:**<br>1.أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الأولي؛<br>2.أوجد الحل الأمثل للبرنامج الأولي ثم البرنامج الثنائي، ثم قارن نتائج الحل في البرنامجين، وماذا تستنتج؟ | $Max(z) = 40x_1 + 30x_2 + 20x_3$<br>$s/c$<br>$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 10x_3 \leq 900 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 400 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 600 \end{cases}$<br>$x_1; x_2; x_3 \geq 0$ |

**حل التمرين الثاني:**

1.البرنامج المقابل يكتب كما يلي:

$$Min(W) = 900y_1 + 400y + 600y_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 40 \\ 5y_1 + 5y_2 + 2y_3 \geq 30 \\ 10y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 20 \end{cases}$$
$$y_1; y_2; y_3 \geq 0$$

2.إيجاد الحل الأمثل ومقارنة النتائج:

▪ جدول الحل الأمثل لبرنامج الأولي:

| XB | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 0 | 0 | 7 | 1 | −1 | 0 | 500 |
| $X_2$ | 0 | 1 | 0,5 | 0 | 0,25 | −0,12 | 25 |
| $X_1$ | 1 | 0 | 0,25 | 0 | −0,12 | 0,31 | 137,5 |
| $\Delta Z$ | 0 | 0 | −5 | 0 | −2,5 | −8,75 | $Z = 6250$ |

$w = 6250$

$S_1 = 0$ ; $S_2 = 0$ ; $S_3 = 5$

$y_1 = 0$ ; $y_2 = 2,5$ ; $y_3 = 8,75$

▪ جدول الحل الأمثل لبرنامج الثنائي:

| YB | $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_3$ | −7 | 0 | 0 | −0,25 | −0,5 | 1 | 5 |
| $Y_2$ | 1 | 1 | 0 | 0,12 | −0,25 | 0 | 2,5 |
| $Y_3$ | 0 | 0 | 1 | −0,31 | 0,12 | 0 | 8,75 |
| $\Delta W$ | 500 | 0 | 0 | 137,5 | 25 | 0 | $W = 6250$ |

$Z = 6250$

$S_1 = 500$ ; $S_2 = 0$ ; $S_3 = 0$

$X_1 = 137,5$ ; $X_2 = 25$ ; $X_3 = 0$

▪ المقارنة والاستنتاج: من جدول الحل الأمثل لبرنامج الحل الأولي وجدنا:

$X_1=137,5$ وهي قيمة تقابل $S_1$ بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي؛

$X_2=25$ وهي قيمة تقابل $S_2$ بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي؛

$S_1=500$ وهي قيمة تقابل $Y_2$ بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي؛ بقية المتغيرات معدومة.

وإذا ما نظرنا على مستوى السطر الأخير للبرنامج الأولي، فإننا نجد أن:

$X_3$ تقابلها القيمة 5، وهي قيمة $S_1$ في البرنامج الثنائي؛

$S_2$ تقابلها القيمة 2,5، وهي قيمة $Y_2$ في البرنامج الثنائي؛

$S_3$ تقابلها القيمة 8,75، وهي قيمة $Y_3$ في البرنامج الثنائي؛ بقية المتغيرات معدومة.

كما أن قيمة الدالة الإقتصادية متساوية في جدول الحل الأمثل للبرنامجين أي W=Z=6250.

النتيجة: هي أن جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يتضمن أيضا الحل الأمثل للبرنامج الثنائي، وجدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يتضمن أيضا الحل الأمثل للبرنامج الأولي، وإذا كان هناك حل أمثل للنموذج المقابل، فإن هناك حل أمثل للنموذج الأولي، والعكس صحيح، أيضاً يمكن القول بأن قيم المتغيرات الأساسية عند الحل الأمثل للنموذج المقابل، مساوية لأسعار الظل في جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي، أي أن قيم المتغيرات القرار عند الحل الأمثل للنموذج المقابل تبين مقدار الوحدة الإضافية من الموارد أو المدخلات.

**التمرين الثالث:** أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الأتي مستخداماً طريقة السمبيلكس المعدلة.

$$Max(z) = x_1 + 9x_2 + x_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15 \\ \end{cases}$$
$$x_1; x_2; x_3 \geq 0$$

**حل التمرين الثالث:**

الصيغة النموذجية:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + S_1 = 9$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + S_{21} = 15$$
$$Max\ (z) = x_1 + 9x_2 + x_3 + 0S_1 + 0S_2$$

نضع معاملات للمتغيرات داخل القيود على شكل أعمدة وكما يأتي:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix}$$

وبما أن المتغيرات $S_1$; $S_2$ هي متغيرات أساسية في الحل الابتدائي الأساسي الممكن ولهذا تكون مصفوفة $\beta$ مكونة من أعمدتهم وكما يأتي:

$$\beta = (P_4 \quad P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

دائما يكون معكوس مصفوفة الوحدة هي نفسه أي: $\beta^{-1} = I$

بمضروب السمبليكس :

$$\pi = C_B \beta^{-1} = (0 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \quad 0)$$

فنحسب $\overline{C}_J$ إلى المتغيرات الباقية والتي هي: $X_1; X_2; X_3$ وهذه أحدى فوائد تطبيق طريقة السمبليكس المحورة وكما يأتي:

$$\overline{C}_1 = C_1 - \pi P_1 = (1) - (0 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1$$

$$\overline{C}_2 = C_2 - \pi P_2 = (9) - (0 \quad 0)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 9$$

$$\overline{C}_3 = C_3 - \pi P_3 = (1) - (0 \quad 0)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$$

ومن ملاحظة $\overline{C}_J$ نستنتج أن المتغير $X_2$ سوف تدخل إلى الحل:

| $X_B$ | $\beta^{-1}$ | | b | المتغير الداخل | العمود المتغير الداخل |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 1 | 0 | 9 | | 2 |
| $S_2$ | 0 | 1 | 15 | $X_2$ | 2 |

المتغيرة الخارجة $S_1$ وتكون:

$$C_B = (9 \quad 0)$$

ولذلك يكون قيم عمود b ومصفوفة $\beta^{-1}$ كما يأتي:

$$\beta = (P_2 \quad P_5) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b} = \beta^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 6 \end{pmatrix}$$

تحديد مضروب السمبليكس في هذه الحالة:

$$\pi = C_B \beta^{-1} = (9 \quad 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

فنحسب $\overline{C}_J$ إلى المتغيرات الباقية والتي هي: $X_1; S_1; X_3$ :

$$\overline{C}_1 = C_1 - \pi P_1 = (1) - \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{7}{2}$$

$$\overline{C}_3 = C_3 - \pi P_3 = (1) - \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{25}{2}$$

$$\overline{C}_{S_1} = C_{S_1} - \pi P_4 = (0) - \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{9}{2}$$

بما أن جميع قيم الصف $\overline{C}_J$ هي سالبة فقد توصلنا إلى الحل الأمثل أم قيم الحل هي:

| $X_B$ | $\beta^{-1}$ | | b |
|---|---|---|---|
| $X_2$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{9}{2}$ |
| $S_2$ | -1 | 1 | 6 |

القيم المثلى للحل:

$$X_1 = 0;\ X_2 = \frac{9}{2};\ X_3 = 0;\ S_1 = 0;\ S_2 = 6$$

$$Z = C_B \overline{b} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{81}{2} = 40{,}5$$

## IX- تمارين مقترحة:

### التمرين الأول:

1. أكتب الشكل الثنائي ( Dual ) للبرامج الأولية ( Primal ) التالية :

| | |
|---|---|
| $2.Min(z) = 6x_1 + 10x_2$<br>$s/c$<br>$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ x_1 + 5x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq \frac{1}{2} \\ x_2 \geq 1 \end{cases}$<br>$x_1; x_2 \geq 0$ | $1.Max(z) = 20x_1 + 15x_2 + 18x_3$<br>$s/c$<br>$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + 4x_3 \leq 80 \\ 15x_1 + 12x_2 + 5x_3 \leq 125 \\ 7x_1 + 21x_2 + 3x_3 \leq 84 \end{cases}$<br>$x_1; x_2; x_3 \geq 0$ |

| |
|---|
| $3.Max(z)=8x_1+10x_2-6x_3$<br>$s/c$<br>$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=10 \\ x_1-x_2\geq 1 \\ 2x_1+3x_2+x_3\leq 24 \end{cases}$<br>$x_1;x_2;x_3\geq 0$ |

2. أكتب الشكل الأولي أو الأصلي للبرنامج الثنائي التالي:

$$Min(W)=10y_1-6y_2+3y_3-3y_4$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 2y_1-3y_2-2y_3+2y_4\geq 3 \\ 5y_1+4y_2+y_3-y_4\geq 7 \end{cases}$$

$$y_1;y_2;y_3;y_4\geq 0$$

**التمرين الثاني:** من البرنامج الخطي التالي:

| | |
|---|---|
| **المطلوب:**<br>1.أوجد جدول الحل الأمثل؛<br>2.أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الأولي، ثم أوجد الحل الأمثل للبرنامج الثنائي؛<br>3. قارن نتائج الحل في البرنامجين، وماذا تستنتج؟ | $Min(z)=3x_1+10x_2$<br>$s/c$<br>$\begin{cases} 5x_1+x_2\geq 10 \\ -2x_1+7x_2\geq 14 \end{cases}$<br>$x_1;x_2\geq 0$ |

**التمرين الثالث:** من البرنامج الخطي التالي:

| | |
|---|---|
| **المطلوب:**<br>1. أكتب الشكل الثنائي للبرنامج الخطي التالي .<br>2. إيجاد حل بالنموذج الثنائي .<br>3. مقارنة نتائجه مع نتائج النموذج الأصلي ( الأولي ) ؟ | $Min(z)=4x_1+x_2$<br>$s/c$<br>$\begin{cases} x_1+2x_2\leq 4 \\ 3x_1+x_2=3 \\ 4x_1+3x_2\geq 6 \end{cases}$<br>$x_1;x_2\geq 0$ |

**التمرين الرابع:**

تقوم إحدى الشركات المتخصصة في إنتاج إطارات السيارات بإنتاج ثلاثة أنواع هي الإطارات الممتازة والفاخرة والعادية في مصنعين مختلفين ولهما طاقة إنتاج مختلفة ويقوم المصنع الأول بإنتاج 50 إطار ممتاز و 80 فاخر 100 عادي في اليوم الواحد، أما الثاني فيقوم بإنتاج 60 إطار ممتاز و 60 فاخر و 200 عادي ومن المعلوم مقدما للشركة أن حجم الطلب الشهري على كل نوع هو 2500 و 3000 و 7000 على الترتيب، فإذا كانت كلفة التشغيل للمصنع الأول هي 2500 دينار يومياً وكلفة تشغيل المصنع الثاني 3500 دينار يوميا، وترغب الشركة في تحديد أقل عدد من أيام التشغيل في كل مصنع والتي تخفض بها الكلفة إلى أدنى حد بشرط تلبية الحد الأدنى من الطلب على منتجاتها.

**المطلوب:**

1. شكل المسألة في نموذج خطي؛
2. أكتب الشكل الثنائي للبرنامج الخطي؛
3. فسر اقتصاديا النموذج الثنائي ( دالة الهدف، والقيود).

**التمرين الخامس:** أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الأتي مستعيناً بطريقة السمبليكس المقابلة : (dual du simplexe)

$$Min(Z) = 90x_1 + 120x_2 + 180x_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 + 4X_3 \geq 3 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 4 \\ X_1 + 3X_2 - 3X_3 \geq 1 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$$

**التمرين السادس:** أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الأتي مستخداماً طريقة السمبيلكس المعدلة.

$$Max(Z) = 15x_1 + 12x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 3X_1 + 6X_2 \leq 54 \\ 6X_1 + 3X_2 \leq 48 \\ 9X_1 + 9X_2 \leq 90 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

# الفصل الخامس

# نماذج النقل

تظهر مشكلات النقل في الحياة العملية بصورة متكررة، فكثيراً ما يرى المرء شاحنات لنقل البضائع تسير عبر طرق مختلفة من مواقع عددية لإيصال هذه المادة الحيوية إلى المستهلك الذي يمكن أن يوجد في أماكن متعددة.

تعتبر مسألة النقل إحدى تطبيقات البرمجة الخطية الهامة حيث أن النماذج الرياضية المستخدمة في مشكلة النقل هي نماذج خطية والهدف من إستخدامها هو إيجاد أسلوب امثل لتوزيع الوحدات أو المنتوجات من عدة مصادر للعرض (معامل، موانئ، مراكز تسويقية) إلى عدة مواقع للطلب (مراكز استهلاكية) بأقل كلفة ممكنة أو بأعلى ربح أو بأقل وقت، ومشاكل النقل يمكن حلها باستخدام طريقة السمبليكس في البرمجة الخطية إلا أن هذه الطريقة تتطلب خطوات وجداول وعمليات حسابية كثيرة وهذا الأمر تم التغلب عليه من خلال تفريغ كافة مفردات (متغيرات) مشكلة النقل في جدول خاص يسمى جدول النقل وهذه المفردات.

لقد وضعت الصيغة الأولى لطريقة النقل من قبل العالم هيتشكوك (Hitchcok) في سنة 1941، ثم أضاف إليها العالم كوبمانز (Koopmans) بعد ذلك حتى وصلت إلى صيغتها المعروفة في إطار البرمجة الخطية بواسطة العالم دانتزج سنة 1953 [1].

**I- الإطار العام لمشكلة النقل:**

تمثل الصيغة الجدولية لمشكلة النقل منطلق إيجاد حل أولي ممكن للوصول إلى الحل الأمثل (النهائي) المتمثل في تحقيق أقل كلفة ممكنة من مجموع تكاليف النقل، والصيغة الجدولية لمشكلة النقل عبارة عن مصفوفة عدد صفوفها (M) تمثل المصادر (مراكز التوزيع) وعدد أعمدتها (N) وتمثل مراكز الاستلام وهو يظهر كما يلي[2]:

[1]. محمد دباس الحميد، محمد العزاوي، مرجع سابق، ص 121.

[2]. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي: " **مدخل إلى بحوث العمليات**"، دار مجدلاوي، عمان، 2007. ص: 281.

| المراكز / المصادر | $N_1$ | $N_2$ | _._._ | $N_n$ | العرض |
|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | $C_{11}$ $x_{11}$ | $C_{12}$ $x_{12}$ | | $C_{1n}$ $x_{1n}$ | $a_1$ |
| $M_2$ | $C_{21}$ $x_{21}$ | $C_{22}$ $x_{22}$ | | $C_{2n}$ $x_{2n}$ | $a_2$ |
| ⋮ | | | | | |
| $M_m$ | $C_{m1}$ $x_{m1}$ | $C_{m2}$ $x_{m2}$ | | $C_{mn}$ $x_{mn}$ | $a_m$ |
| الطلب | $b_1$ | $b_2$ | | $b_n$ | $\sum a_i$ / $\sum b_j$ |

حيث أن:

$(N_1,N_2,....,N_n)$: مواقع الطلب، $(M_1,M_2,....,M_m)$: مصادر العرض؛

$C_{ij}$: كلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر i إلى الموقع j؛

$x_{ij}$: عدد الوحدات المنقولة من المصدر i إلى الموقع j؛

الفرضية الأساسية لحل نموذج النقل هو أن ما معروض في مصادر العرض أي مجموع المعروض يساوي مجموع الطلب في مواقع الطلب أي: ( $\sum b_j = \sum a_i$ ) وفي هذه الحالة يسمى نموذج النقل بنموذج النقل المتوازن.

**II- حل مسألة النقل:**

بعد أن يتم إعداد الصيغة الجدولية لمشكلة النقل فإن الخطوة اللاحقة هو إيجاد الحل الأساسي الأولي الممكن، وهناك ثلاث طرق تستخدم لهذا الغرض:

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية؛
- الحل بطريقة أقل التكاليف؛
- طريقة فوجل.

وبعد التوصل إلى الحل الأساسي الأولي يجب تدقيق هذا الحل لمعرفة فيما إذا كان هذا الحل امثلاً أم لا، ويتم الاختبار بإحدى الطريقتين:

- طريقة الحجر المتنقل (التخطي) أو القفز على الصخور ( المسار المتعرج)؛
- طريقة التوزيع المعدل.

**II-1- إيجاد الحل الأساسي الأولي:**

يراعى فيه تحقيق التوازن بين المطلوب والمتاح، كما يجب أن يكون عدد مجاهيل القاعدة في هذا الحل المبدئي بعدد الشروط الخطية، أي (M+N-1) ويمكن إيجاد حل مبدئي بعدة طرائق وفقها:

**II-1-1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية:**

تعتبر هذه الطريقة من أبسط الأساليب الرياضية، لحل مشاكل النقل إلا أنها لا تحقق في معظم الأحيان الحل الأمثل لمشكلة نقل معينة، ولتوضيح كيفية استخدام هذه الطريقة نورد المثال التالي:

**مثال رقم (01):** إحدى الشركات لها ثلاثة مخازن في مواقع مختلفة، كما أن لها ثلاث مراكز تسويقية، أن تكاليف نقل الوحدة الواحدة من السلع ( بالدينار)، وحجم التخزين في كل محزون والاحتياجات لكل مركز تسويقي مشار إليها في الجدول أدناه:

| المراكز / المصادر | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | العرض |
|---|---|---|---|---|
| A | 31<br>**300** | 21<br>**100** | 42<br>..... | **400** |
| B | 20<br>..... | 21<br>**800** | 30<br>**200** | **1000** |
| C | 23<br>..... | 20<br>..... | 15<br>**600** | **600** |
| الطلب | **300** | **900** | **800** | **2000 /2000** |

حسب هذه الطريقة، يجب التأكد من أن جدول النقل في حالة التوازن ( مجموع العرض= مجموع الطلب) وهو شرط محقق أي: (2000=2000)، ننقل (300) وحدة من (A) إلى المركز ($D_1$) وبالتالي تلبية كافة احتياجات المركز ($D_1$) ويبقى في مخزن (A) 100 وحدة؛

ننقل (100) وحدة من (A) إلى المركز ($D_2$)، ولم يبقى في مخزن (A) أية وحدة وهناك (800) وحدة يمكن للمركز ($D_2$) استيعابهم ؛

ننقل (800) وحدة من مخزون (B) إلى المركز($D_2$) وبالتالي تلبية كافة احتياجات ($D_2$) وبقي في مخزون (200) وحدة؛

ننقل (200) وحدة من مخزون (B) إلى المركز($D_3$) وبالتالي لم يبق في مخزون (B) أية وحدة؛

ننقل (600) وحدة من مخزون (C) إلى المركز($D_3$) وعليه أصبحت حاجة المركز ($D_3$) صفراً ولم يبقى في مخزون (C) أية وحدة.

بعد عمليات النقل السابقة نلاحظ أن الجدول في توازن وهذا يعني أن جدولة النقل قد اكتملت، ويجب أن يتحقق الشرط الآتي، وهو أن مجموع الخلايا المشغولة يساوي 5.

**عدد المربعات المملوءة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة)− 1**

= **3+3 − 1 = 5** وهو ينطبق على المصفوفة أعلاه.

لذلك فإن هذه المشكلة وما سبقها هن من مشاكل من نوع قابلة للحل الأمثل بدون أية إجراءات أضافية ويطلق على هذا النوع من مشاكل النقل التي يتحقق فيها الشرط المذكور وهو (عدد الخلايا المملوءة (المشغولة)=M+N−1 )، بأنها مشاكل غير منحلة)، أما المشاكل التي لا يتحقق فيها الشرط أعلاه ستكون من نوع المشاكل المنحلة، وهنا لا يمكن إيجاد الحل الأمثل لهذا النوع الأخير من المشاكل إلا بعد إجراءات إضافية أخرى[1].

**الكلفة الكلية** للنقل يمكن حسابها كالآتي:

$$Z=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}c_{ij}x_{ij}=300(31)+100(21)+800(21)+200(30)+600(15)=43200$$

**II-1-2- الحل بطريقة أقل التكاليف:**

تعتبر هذه الطريقة أفضل من الطريقة السابقة لأنها تأخذ بعين الاعتبار الأقل تكلفة، وحتى نحصل على الحل الأساسي الأولي الممكن بهذه الطريقة علينا في البداية أن نتأكد من أن جدول النقل في حالة توازن ثم نتبع الخطوات التالية[2]:

- نبدأ بتزويد المربع ذا التكلفة الأقل بأكبر ما يمكن من عدد الوحدات من المخزون المقابل لهذا المربع؛
- نتابع ملئ المربعات ذات التكلفة الأقل بالتتابع إلى أن نزود جميع مراكز التوزيع من المصادر المتوفرة؛
- نحسب التكلفة الإجمالية للمربعات المختلفة.

لتوضيح هذه الطريقة سنعمل على حل مشكلة النقل في المثال التالي:

---

1. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 158.
2. أكرم محمد عرفان المهندي، مرجع سابق، ص 131.

**مثال رقم (02):** لتكن مسألة النقل التالية

| المصنع \ السوق | الأسواق: الشمالي | الجنوبي | الغربي | العرض |
|---|---|---|---|---|
| A | 7 ..... | 6 ..... | 5 ..... | **400** |
| B | 4 ..... | 8 ..... | 1 ..... | **500** |
| C | 2 ..... | 3 ..... | 9 ..... | **300** |
| الطلب | **200** | **600** | **400** | **1200 / 1200** |

**المطلوب:** أوجد الحل الأساسي الأول:

1. بطريقة الزاوية الشمالية الغربية وحساب التكلفة الإجمالية؛
2. بطريقة أقل التكاليف وحساب التكلفة الإجمالية، وماذا تستنتج؟

**حل المثال:**

1. بطريقة الزاوية الشمالية الغربية وحساب التكلفة الإجمالية؛

| المصنع \ السوق | الأسواق: الشمالي | الجنوبي | الغربي | العرض |
|---|---|---|---|---|
| A | 7 200 | 6 200 | 5 | **400** |
| B | 4 | 8 400 | 1 100 | **500** |
| C | 2 | 3 | 9 300 | **300** |
| الطلب | **200** | **600** | **400** | **1200 / 1200** |

لدينا شرط مجموع الخلايا المشغولة يساوي (5) وهو محقق **عدد المربعات المملوءة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة)− 1 = 3+3 − 1 = 5** وهو ينطبق على المصفوفة المقابلة.

**أما الكلفة الكلية** للنقل يمكن حسابها كالآتي:

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 200\,(7) + 200\,(6) + 400\,(8) + 100\,(1) + 300\,(9) = 8600$$

2. بطريقة أقل التكاليف وحساب التكلفة الإجمالية؛

هنا نبدأ التوزيع من الخالية ذات **أقل كلفة نقل** وإعطائها الأولوية في تسديد وهي هنا (B الغربي) حيث كلفة نقل (1 وحدة نقدية) لـ طن الواحد، وترى أن احتياجات السوق الغربي 400 وحدة والمتاح في المصنع في هو 500 طن لذا سيتم نقل 400 وحدة وإشباع حاجة السوق بالكامل ثم نبحث في الجدول عن أقل كلفة حيث نجد (C الشمالي) هي ذات كلفة أقل من غيرها (2 وحدة نقدية)، لذا ستكون لها الأولية التالية بالتوزيع وترى أن احتياجات السوق 200 طن في حين أن المتاح في المصنع (C) هو 300 طن وبهذا يمكن إشباع حاجة السوق بالكامل ثم نرتقي في التكاليف وبنفس الطريقة نواصل الحل.

| السوق / المصنع | الأسواق: الشمالي | الأسواق: الجنوبي | الأسواق: الغربي | العرض |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 7 | 6 / 400 | 5 | **400** |
| **B** | 4 | 8 / 100 | 1 / 400 | **500** |
| **C** | 2 / 200 | 3 / 100 | 9 | **300** |
| الطلب | **200** | **600** | **400** | **1200 / 1200** |

لدينا شرط مجموع الخلايا المشغولة يساوي(5)، وهو محقق **عدد المربعات المملوءة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة)− 1 = 3+3 − 1 = 5** وهو ينطبق على المصفوفة المقابلة.

**أما الكلفة الكلية** للنقل يمكن حسابها كالآتي:

$$Z=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}c_{ij}x_{ij}=400\,(6)+100\,(8)+400\,(1)+200\,(2)+100\,(3)=4300$$

ونرى أن هناك فرقاً كبيراً في الكلفة الكلية التي تم احتسابها عند اعتماد طريقة الزاوية الشمالية الغربية والتي بلغت 8600 وحدة نقدية وهذا راجع إلى أن طريقة اقل كلفة هدفها هو التوزيع على أساس أدنى تكلفة نقل من المصانع إلى الأسواق.

**ملاحظة هامة:**

1. **في حالة تساوي التكاليف تعطى الأولوية للمربع الذي يحمل أكبر كمية ولأنه يعمل على تخفيض الكلفة الكلية أكثر؛**
2. **تعتبر طريقة أقل التكاليف أكفأ من طريقة الزاوية الشمالية الغربية التي لا تعتمد على أساس علمي في اختيار المتغيرات الأساسية،بينما هذه الطريقة تعتمد في اختيار المتغيرات الأساسية على المتغير الأقل من حيث التكلفة، لهذا تقربنا أكثر إلى الحل الأمثل، على عكس طريقة الزاوية الشمالية الغربية.[1]**

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مرجع سابق، ص: 289.

**II-1-3- طريقة فوجل:**

تعد هذه الطريقة من أفضل الطرق في حل مسائل النقل وغالبا ما تعطى حلاً أمثلا ويمكن أن نجمل خطوات حل مسألة النقل وفقها كالآتي[1]:

1. إيجاد الفرق بين أقل كلفتين في كل صف؛
2. إيجاد الفرق بين أقل كلفتين في كل عمود؛
3. تحديد أكبر فرق سواء كان في الصفوف أو الأعمدة؛
4. البحث عن أقل كلفة في الصف أو العمود الذي يقابل أكبر فرق والبدء بتخصيص الكميات التي سترسل إلى الأسواق؛
5. إعادة الخطوات السابقة لحين الوصول إلى توزيع كامل للطاقات الإنتاجية وإشباع تام لإحتياجات الأسواق مع مراعاة استبعاد الخلايا التي تشغل.

**مثال رقم (03):** لتكن مسألة النقل التالية:

| السوق / المصنع | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | العرض |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 20 ..... | 22 ..... | 17 ..... | 4 ..... | **120** |
| $S_2$ | 24 ..... | 37 ..... | 9 ..... | 7 ..... | **70** |
| $S_3$ | 32 ..... | 37 ..... | 20 ..... | 15 ..... | **50** |
| الطلب | **60** | **40** | **30** | **110** | **240/240** |

**المطلوب:** حل المسألة بطريقة فوجل.

**الحل:** إيجاد الفرق بين أقل كلفتين في كل صف وفي كل عمود، والبدء بتخصيص الكميات التي سترسل إلى الأسواق:

[1]. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق، ص 219.

| المصنع \ السوق | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | العرض | الفروق للصفوف |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 20 | 22 **40** | 17 | 4 | **120** | (17-4)= **13** |
| $S_2$ | 24 | 37 | 9 | 7 | **70** | (9-7)= **2** |
| $S_3$ | 32 | 37 | 20 | 15 | **50** | (20-15)= **5** |
| الطلب | **60** | **40** | **30** | **110** | **240/240** | |
| الفروق للأعمدة | (24-20)=**4** | (37-22)=**15** | (17-9)=**8** | (7-4)=**3** | | |

وهنا سوف يحذف العمود الثاني مرحليا وننقص العرض في الصف بنفس الوحدات المخصصة للخلية (40).

| المصنع \ السوق | $D_1$ | $D_3$ | $D_4$ | العرض | الفروق للصفوف |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 20 | 17 | **4** **80** | **80** | (17-4)= **13** |
| $S_2$ | 24 | 9 | 7 | **70** | (9-7)= **2** |
| $S_3$ | 32 | 20 | 15 | **50** | (20-15)= **5** |
| الطلب | **60** | **30** | **110** | **200 /200** | |
| الفروق للأعمدة | (24-20)=**4** | (17-9)=**8** | (7-4)=**3** | | |

وهنا سوف يتم حذف الصف الأول مرحليا وننقص الطلب في العمود الرابع بنفس الوحدات المخصصة للخلية (80).

| السوق / المصنع | $D_1$ | $D_3$ | $D_4$ | العرض | الفروق للصفوف |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_2$ | 24 | 9 / 30 | 7 | **70** | (9-7)= **2** |
| $S_3$ | 32 | 20 | 15 | **50** | (20-15)= **5** |
| الطلب | **60** | **30** | **30** | **120 /120** | |
| الفروق للأعمدة | (24-32)=**8** | (20-9)=**11** | (15-7)=**8** | | |

وهنا سوف يتم حذف العمود الثالث مرحليا وننقص العرض في الصف الثاني بنفس الوحدات المخصصة للخلية (30).

| السوق / المصنع | $D_1$ | $D_4$ | العرض | الفروق للصفوف |
|---|---|---|---|---|
| $S_2$ | 24 / 10 | 7 / 30 | **40** | (24-7)= **17** |
| $S_3$ | 32 / 50 | 15 | **50** | (32-15)= **17** |
| الطلب | **60** | **30** | **90 /90** | |
| الفروق للأعمدة | (24-32)=**8** | (15-7)=**8** | | |

وهنا سوف يتم العودة إلى الجدول الأصلي لمشكلة النقل:

| السوق / المصنع | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | العرض |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 20 ..... | 22 / 40 | 17 ..... | 4 / 80 | **120** |
| $S_2$ | 24 / 10 | 37 ..... | 9 / 30 | 7 / 30 | **70** |
| $S_3$ | 32 / 50 | 37 ..... | 20 ..... | 15 ..... | **50** |
| الطلب | **60** | **40** | **30** | **110** | **240/240** |

حساب التكلفة الإجمالية وفقا لهذه الطريقة:

$$Z=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3}c_{ij}x_{ij}=10(24)+50(32)+40(22)+30(9)+30(7)=3520$$

وشرط عدد الخلايا المملوءة محق، أي: 6=1−4+3.

**II-2- إيجاد الحل الأمثل ( اختبار الحل الأساسي الأولي):**

لا نحصل من خلال استخدام الطرق الثلاثة السابقة الذكر إلا على الحل الأساسي الأولي، وإن الحصول على الحل الأساسي الأولي لا يعني نهاية حل المشكلة (الحل الأمثل)، وإنما يجب أن نستخدم أساليب آخري لاختبار هل أن الحل الأساسي الذي تم الحصول عليه من تطبيق أحدى الطرق السابقة، هل هو الحل الأمثل أما هناك حلولاً أخرى أمثل منه، وللوصول إلى هكذا حلول هناك طريقتان لاختبار أمثلية الحل نبدأ بالتالية:

**II-2-1- طريقة الحجر المتنقل:**

تقوم طريقة الحجر المتنقل بتقييم جميع الخلايا الغير مشغولة (الفارغة) في جدول النقل للتأكد إذا كان النقل إليها يؤدي إلى تخفيض التكاليف، فإذا وجدنا أن ملء خلية غير مشغولة يؤدي إلى خفض تكاليف النقل فإن جدول النقل الأولي يتم تعديله للاستفادة من ذلك، وهكذا تستمر عملية تقييم كل جدول نقل إلى أن يتضح أن شغل أي خلية فارغة لن يؤدي إلى تخفيض تكاليف النقل بل سيؤدي إلى زيادتها[1].

يجب أولاً التأكد أن عدد الخلايا المشغولة يساوي (M+N−1) ولتطبيق هذه الطريقة يتم إتباع الخطوات الآتية[2]:

- تكوين ممرات مغلقة على شكل مربعات أو مستطيلات أو جمع الاثنين معاً على أن يكون المربع الفارغ محدد بثلاث زوايا لمربعات مملوءة؛
- وضع إشارة (+) في المربع الذي تنقل إليه الوحدات وإشارة (−) في المربع الذي تنقل منه الوحدات اعتماداً على الكلفة في المربعات؛
- مراعاة حصول التوازن في كميات العرض والطلب القائمة في الجدول على مستوى الصفوف وكذلك الأعمدة، ولذلك في كل صف أو عمود تكون إشارة سالبة لابد أن تكون إشارة موجبة؛
- يتم النقل لأقل كمية من مربع يحمل إشارة سالبة بين المربعات التي تحمل إشارات سالبة إلى المربعات ذات الإشارة الموجبة؛
- تعطى الأولوية للممر المغلق الحاصل على أعلى قيمة سالبة من بين الممرات الأخرى؛

---

[1] . منعم زمزير المساوي:" **بحوث العمليات مدخل علمي لإتخاذ القرارات**"، دار وائل للنشر، ط1،الأردن، 2009، ص 200.

[2] . عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، مرجع سابق، ص ص : 101-102 .

- يتم الوصول إلى الحل الأمثل في حالة عدم وجود إشارات سالبة مما يعزز الاعتقاد بأن الفرصة لتخفيض التكاليف قد انتهت، أي أن القيم تكون هنا أما موجبة أو معدومة واليك كيفية إجراء حجر التنقل.

**مثال رقم (04):** اختبر الحل الأولي لمسألة النقل التالية علماً أن الحل الأولي تم التوصل إليه بطريقة الزاوية الشمالية الغربية.

لدينا الكلفة الإجمالية لنقل هي:

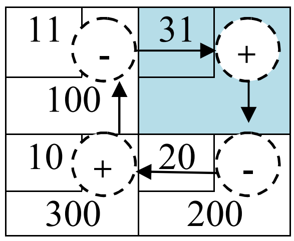
$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 21(100)+ 11(100)+10(300)+20(200)+ 6(300)=12000$$

نتأكد من عدد المربعات المملوءة:

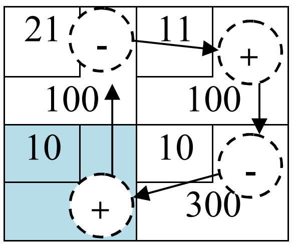
**5**=1−3+3 ومنه الشرط محقق.

ولأن بعد أن تم حل المسألة نحاول إجراء الاختبار بطريقة الحجر المتنقل للخلايا الأربعة الفارغة لمعرفة ما الذي سيحدث للكلفة الكلية في حال تغير المسار.

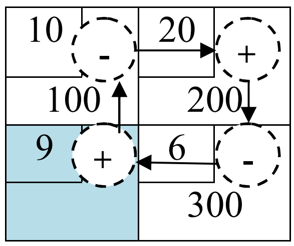
| من \ إلى | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | العرض |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 21 / **100** | 11 / **100** | 31 / ..... | **200** |
| **B** | 10 / ..... | 10 / **300** | 20 / **200** | **500** |
| **C** | 13 / ..... | 9 / ..... | 6 / **300** | **300** |
| الطلب | **100** | **400** | **500** | **/1000 1000** |



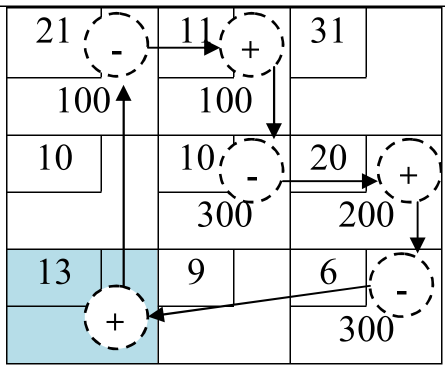

$$\overline{C}_{13} = C_{13} - C_{23} + C_{22} - C_{12} = 31 - 20 + 10 - 11 = 10$$




$$\overline{C}_{21} = C_{21} - C_{11} + C_{12} - C_{22} = 10 - 21 + 11 - 10 = -10$$




$$\overline{C}_{32} = C_{32} - C_{22} + C_{23} - C_{33} = 9 - 10 + 20 - 6 = 13$$




$$\overline{C}_{31} = C_{31} - C_{11} + C_{12} - C_{22} + C_{23} - C_{33} = 13 - 21 + 11 - 10 + 20 - 6 = 7$$

بما أن المسار الثاني سالب نقوم بنقل أقل كمية في المربع السالب وهي (100) ونشكل من جديد مسألة النقل التالية:

لدينا الكلفة الإجمالية لنقل بعد تعديل مسألة النقل كما يلي:

$$Z=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}c_{ij}x_{ij}=10(100)+11(200)+10(200)+20(200)+6(300)=11000$$

وهي أقل من الكلفة السابقة (12000) ونعاود إختبار الحل هل هو أمثل؟

| | | |
|---|---|---|
| 21 | 11<br>**200** | 31 |
| 10<br>100 | 10<br>**200** | 20<br>**200** |
| 13 | 9 | 6<br>**300** |

| | |
|---|---|
| 21 (+) | 11 (-)<br>200 |
| 10 (-)<br>100 | 10 (+)<br>200 |

$$\overline{C}_{11}=C_{11}-C_{12}+C_{22}-C_{21}=21-11+10-10=10$$

| | |
|---|---|
| 11 (-)<br>200 | 31 (+) |
| 10 (+)<br>200 | 20 (-)<br>200 |

$$\overline{C}_{13}=C_{13}-C_{23}+C_{22}-C_{12}=31-20+10-10=10$$

| | |
|---|---|
| 10 (-)<br>**200** | 20 (+)<br>200 |
| 9 (+) | 6 (-)<br>**300** |

$$\overline{C}_{32}=C_{32}-C_{22}+C_{23}-C_{33}=9-10+20-6=13$$

| | | |
|---|---|---|
| 10 (-)<br>100 | 10<br>200 | 20 (+)<br>200 |
| 13 (+) | 9 | 6 (-)<br>300 |

$$\overline{C}_{31}=C_{31}-C_{21}+C_{23}-C_{33}=13-10+20-6=17$$

ومنه **لا توجد قيمة سالبة إذن لا يمكن تطوير** الحل ومنه الحل الأمثل هو:(Z=11000) **وهي خطة مثلى.**

### II-2-2- طريقة التوزيع المعدل:

تعتبر هذه الطريقة أسهل وأسرع من طريقة الحجر المتنقل، إذا لا تطلب رسم جميع المسارات المتعرجة مما يقلل من الجهد والوقت، ويمكن تلخيص خطوات الطريقة بالآتي[1]:

- تأكد من أن الحل الأولي ليس متحللاً وذلك يجب أن تكون عدد الخلايا المشغولة تساوي (M+N−1)؛

[1] فتحي خليل حمدان، رشيق رفيق مرعي، مرجع سابق، ص ص: 147-148 .

- **استخراج تكاليف المربعات المملوءة:** ويتم تكوين عدة معادلات بواقع معادلة لكل خلية مشغولة في جدول الحل الأولي وتعد كل معادلة على أساس العلاقة التالية:

$$C_{ij} = U_i + V_j$$

حيث:

$U_i$ : المتغير الخاص بالصف i والذي تقع فيه الخلية المعنية.

$V_j$ : المتغير الخاص بالعمود j والذي تقع فيه الخلية المعنية.

$C_{ij}$ : تكلفة الخلية التي تقع في الصف i و بالعمود j.

إيجاد حل المعادلات الخاصة بالخلايا المشغولة وذلك بافتراض قيمة: $(U_1 = 0)$ لكي يمكن إيجاد القيم الأخرى .

- **استخراج تكاليف المربعات الفارغة:** يتم تقييم كل خلية غير مشغولة ( حساب كلفة المربعات الفارغة)، مؤشر التحسين وفق العلاقة التالية:

$$I_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

ونبدأ بتحسين الحل من الخلية ذات القيمة السالبة الأكبر وإذا كانت جميع القيم موجبة فإن الحل الأمثل ولا يحتاج إلى تحسين ويستكمل الحل كما هو متبع في طريقة الحجر المتنقل.

**مثال رقم (05):** من المثال رقم (04) السابق اختبر حل المسألة بطريقة التوزيع المعدل.

**الحل:**

1. استخراج تكاليف المربعات المملوءة:

نفرض: $U_1 = 0$ و لدينا: $C_{ij} = U_i + V_j$

الخلية (1؛ 1):

$$C_{11} = U_1 + V_1 \Rightarrow U_1 + V_1 = 21 \Rightarrow V_1 = 21$$

الخلية (1؛ 2):

$$C_{12} = U_1 + V_2 \Rightarrow U_1 + V_2 = 11 \Rightarrow V_2 = 11$$

الخلية (2؛ 2):

$$C_{22} = U_2 + V_2 \Rightarrow U_2 + V_2 = 10 \Rightarrow U_2 = -1$$

الخلية (2؛ 3):

$$C_{23} = U_2 + V_3 \Rightarrow U_2 + V_3 = 20 \Rightarrow V_3 = 21$$

الخلية (3؛ 3):

$$C_{33} = U_3 + V_3 \Rightarrow U_3 + V_3 = 6 \Rightarrow U_3 = -15$$

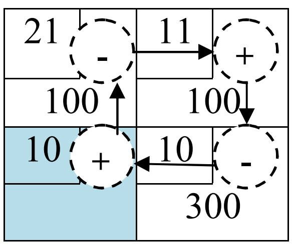
2. استخراج تكاليف المربعات الفارغة:

| | | $V_1 = 21$ | $V_2 = 11$ | $V_3 = 21$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | من \ إلى | **D1** | **D2** | **D3** | العرض |
| $U_1 = 0$ | **A** | 21 **100** | 11 **100** | 31 | **200** |
| $U_2 = -1$ | **B** | 10 | 10 **300** | 20 **200** | **500** |
| $U_3 = -15$ | **C** | 13 | 9 | 6 **300** | **300** |
| | الطلب | **100** | **400** | **500** | **1000 /1000** |

كلفة المربعات الفارغة:

$$I_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 31 - 0 - 21 = 10$$
$$I_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 10 - (-1) - 21 = -10$$
$$I_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 13 - (-15) - 21 = 7$$
$$I_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 9 - (-15) - 11 = 13$$

يتضح من النتائج أعلاه أن الخلية القابلة للتحسين هي الخلية $(B_1)$ حيث إشارة مؤشر التحسين سالبة لذا سنرسم مسار مغلق لتوضيح عملية النقل إلى هذه الخلية كما يلي:




ننقل أقل كمية في المربع ذو الإشارة السالبة وهي (100) ليصبح:

| | | |
|---|---|---|
| 21 | 11 **200** | 31 |
| 10 100 | 10 **200** | 20 **200** |
| 13 | 9 | 6 **300** |

وهنا نجد الكلفة الكلية:

$$Z = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} c_{ij} x_{ij} = 10(100) + 11(200) + 10(200) + 20(200) + 6(300) = 11000$$

أي هناك انخفاضا في الكلفة مقدارها (1000) ولكن يمكن اختبار هذه النتيجة أيضا حيث أن هناك خلية فارغة جديدة قد ظهرت وأخرى اختفت وبما أن الحل لا يزال غير متحللا (5) فإننا نقوم بصياغة معادلات جديدة للخلايا المشغولة وكما يلي:

- استخراج تكاليف المربعات المملوءة:

نفرض: $U_1 = 0$ و لدينا: $C_{ij} = U_i + V_j$

الخلية (1; 2):

$$C_{12} = U_1 + V_2 \Rightarrow U_1 + V_2 = 11 \Rightarrow V_2 = 11$$

الخلية (2; 1):

$$C_{21} = U_2 + V_1 \Rightarrow V_1 = 10 - U_2$$

الخلية (2; 2):

$$C_{22} = U_2 + V_2 \Rightarrow U_2 + V_2 = 10 \Rightarrow U_2 = -1 \Rightarrow V_1 = 11$$

الخلية (2; 3):

$$C_{23} = U_2 + V_3 \Rightarrow U_2 + V_3 = 20 \Rightarrow V_3 = 21$$

الخلية (3; 3):

$$C_{33} = U_3 + V_3 \Rightarrow U_3 + V_3 = 6 \Rightarrow U_3 = -15$$

| | | $V_1 = 11$ | $V_2 = 11$ | $V_3 = 21$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | إلى / من | **D₁** | **D₂** | **D₃** | العرض |
| $U_1 = 0$ | **A** | 21 | 11<br>**200** | 31 | **200** |
| $U_2 = -1$ | **B** | 10<br>100 | 10<br>**200** | 20<br>**200** | **500** |
| $U_3 = -15$ | **C** | 13 | 9 | 6<br>**300** | **300** |
| | الطلب | **100** | **400** | **500** | **1000 /1000** |

ولأن يمكن حساب كلفة المربعات الفارغة كالآتي:

$$I_{11} = C_{11} - U_1 - V_1 = 21 - 0 - 11 = 10$$
$$I_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 31 - 0 - 21 = 10$$
$$I_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 13 - (-15) - 11 = 17$$
$$I_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 9 - (-15) - 11 = 13$$

ونجد هنا أن جميع القيم موجبة وهذا يعني أنه لا يمكن تحسين الحل أو تخفيض كلفة النقل أكثر مما هي عليه.

## III- حالات خاصة عند حل مشاكل النقل:

قد تحصل بعض الحالات، عند حل مشكلة النقل، التي تحتاج إلى اتخاذ إجراء معين لمواصلة الحل وهي حالات ترتبط بالواقع الفعلي لمؤسسة الأعمال وطبيعة الأسواق ولعل أهم هذه الحالات الآتي:

### III- 1- عدم تساوي العرض والطلب:

في الحياة العملية كثيراً ما يحصل عدم توازن بين الطاقة الإنتاجية المتاحة لدى المصانع واحتياجات الأسواق لذا لا بد من موازنة العرض مع الطلب لحل المسألة، هنا نلجأ إلى إضافة عمود وهمي عندما يكون العرض أكبر من الطلب أي إيجاد سوق وهمية، وتكون كلفة النقل من المصانع إلى السوق الوهمي (0) وبالعكس يضاف مصنع وهمي (صف وهمي)، والكمية التي تقابل العمود أو الصف الوهمي تساوي الفرق بين مجموع كمية العرض وكمية الطلب.

**مثال رقم (06):**

1. حل مسألة النقل التالي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | العرض |
|---|---|---|---|---|
| A | 2 | 1 | 2 | 20 |
| B | 1 | 2 | 3 | 9 |
| C | 4 | 2 | 1 | 11 |
| الطلب | 10 | 8 | 15 | |

2. حل مسألة النقل التالي بطريقة أقل التكاليف:

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | العرض |
|---|---|---|---|---|
| A | 8 | 7 | 2 | 100 |
| B | 4 | 9 | 10 | 75 |
| C | 1 | 2 | 8 | 25 |
| D | 5 | 6 | 11 | 125 |
| الطلب | 150 | 125 | 130 | |

**الحل:**

1. طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

المشكلة غير متوازنة لأن العرض لا يساوي الطلب:

العرض= 11+9+20 = 40 ، الطلب = 15+8+10 = 33

لذا نحتاج إلى مركز وهمي تستوعب الفارق من الوحدات بين مجموع العرض و مجموع الطلب أي 7 وحدات، لذا نضيف عمود وهمي على جدول الكلفة السابق وبتكلفة مساوية إلى صفر مقابل كل مصدر كما يلي:

| إلى / من | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | مركز وهمي | العرض |
|---|---|---|---|---|---|
| **A** | 2<br>**10** | 1<br>**8** | 2<br>2 | 0 | 20 |
| **B** | 1 | 2 | 3<br>**9** | 0 | 9 |
| **C** | 4 | 2 | 1<br>**4** | 0<br>**7** | 11 |
| الطلب | **10** | **8** | **15** | **7** | **40 /40** |

والكلفة الكلية هي:

$$Z = \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 10(2)+1(8)+2(2)+3(9)+1(4)+0(7)=63$$

2. طريقة اقل تكاليف: شكل مسألة النقل غير متوازنة:

العرض= 100+75+25+125 = 325 ، الطلب = 150+125+130 = 405

لذا نحتاج إلى إضافة صف وهمي مصدر وهمي وبتكلفة مساوية إلى صفر مقابل كل مركز طلب أما مقدار العرض فيه يساوي 80 .

| إلى / من | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | العرض |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 8 | 7 | 2<br>100 | 100 |
| **B** | 4<br>45 | 9 | 10<br>**30** | 75 |
| **C** | 1<br>25 | 2 | 8 | 25 |
| **D** | 5 | 6<br>125 | 11 | 125 |
| مصدر وهمي | 0<br>**80** | 0 | **0** | 80 |
| الطلب | **150** | **125** | **130** | **405 /405** |

والكلفة الكلية هي:

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{5} c_{ij}\,x_{ij} = 45(4)+100(2)+30(10)+125(6)+80(0)+25(1)=1445$$

**ملاحظة:** إن الصف الوهمي أو العمود الوهمي هي مشابه للمتغيرات الاصطناعية من مشكلات البرمجة الخطية التي سبق ذكره[1].

**III -2- حالة تعظيم الأرباح:**

في بعض الأحيان تكون الشركة متخصصة بالنقل لصالح الغير ولديها وسطاء نقل تستخدمها في نقل منتجات من أماكن مختلفة بهدف تحقيق أكبر ربح ممكن لذا فهي تركز على الخطوط أو المسارات ذات الأكبر، وهنا فإن حل المسألة يكون بالبحث عن أكبر ربح في الجدول ويتم إرسال الكميات إلى تلك الخلية وتكرر العملية إلى أن يتم نقل جميع الكميات المتاحة إلى الأسواق أو المخازن[2].

ففي طريقة فوجل بدلا من البحث عن اقل كلفة والتي تليها لإستخراج الفرق، هنا نتجه إلى أعلى سعر والذي يليه واستخراج الفرق بينهما وتعطى الأولوية عادة للصف أو العمود ذو قيمة الأعلى (أما توزيع الكميات يعطى للكلفة الأعلى في السطر أو العمود المختار).

وفي حالة التحقق من الحل الأولي للوصول إلى الحل الأمثل في طريقة المسار المتعرج وطريقة التوزيع المعدل تعطى الأولوية للمربع أو الخلية الحاصلة على أعلى رقم موجب وليس سالب، وتتوقف عن البحث عن الحل الأمثل عندما تكون جميع القيم المستحصلة من المسارات سالبة أو تساوي الصفر.

**مثال رقم (07):** في أدناه بيانات عن الكميات المطلوبة نقلها من المخازن إلى فروع المؤسسة الاستهلاكية الأربعة بحيث يحقق أكبر ربح ممكن للشركة التي تعهدت بنقل هذه الكميات من البضائع.

---

[1]. سهيلة عبد الله سعيد، مرجع سابق، ص 207.

[2] . صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، ص ص: 223-224 .

**المطلوب:** مساعدة الشركة الناقلة بإعداد خطة النقل.

هنا يبدأ الحل بالبحث عن أكبر رقم في الجدول وهو (12) ونبدأ بالتخصيص له، ثم الأكبر وهو 11 وهكذا، إن الربح الكلي سيكون.

| الفروع / المخازن | الأول | الثاني | الثالث | الرابع | العرض |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 6 | 8 / 400 | 3 | 10 / 100 | 500 |
| B | 9 | 2 | 7 | 11 / 700 | 700 |
| C | 12 / 200 | 5 | 4 / 100 | 10 | 300 |
| الطلب | 200 | 400 | 100 | 800 | 1500/ 1500 |

$$Z=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3}c_{ij}x_{ij}=12(200)+8(400)+4(100)+10(100)+11(700)=14700$$

**3-III – وجود أكثر من حل أمثل:**

قد توجد في بعض مشاكل النقل عند حلها إمكانية لعدة حلول مثلى وليس حلاً واحداً، وهذا الأمر يمكن اكتشافه عندما تكون نتائج تقييم الخلايا غير المشغولة (مؤشرات التحسين) فيها واحد أو أكثر ذات قيمة صفري، هذا يعني أنه يمكن أن تغير اتجاهات بعض الشحنات إلى اتجاهات أخرى بنفس الكلفة الكلية، إن وجود حلول مثلى متعددة يعطي الإدارة مرونة أكبر في اختيار وتوزيع المواد.

**4 -III – حالة الانحلال:**

تحصل هذه الحالة عندما يكون عدد الخلايا المشغولة أقل من مجموع عدد الصفوف والأعمدة أو (M+N−1) كما أشرنا سابقا، وقد تحصل هذه الحالة أثناء الحل الأولي (قبل الاختبار) ولمعالجة هذه الحالة فإنه يتم إشغال إحدى الخلايا ( يجب أن يتم اختيارها بدقة والتي تحتوي على أقل كلفة) بقية صفرية ومعاملتها وكأنها خلية مشغولة والاستمرار بالحل.

**مثال رقم (08):** هنا لو افترضنا أن إحدى الشركات تريد إعداد خطة نقل وستعتمد طريقة الشمالية الغربية كما في الجدول التالي:

إن عدد الخلايا المشغولة هنا هو 4 في حين أنه يجب أن يكون (5=1−3+3) لذا فإن الحل يعتبر متحللاً، وهنا لا بد من وضع قيمة صفرية في إحدى الخلايا الفارغة للتمكن من اختيار الحل مثلا يمكنك وضع صفر في الخلية ($A_2$) ومعاملتها وكأنها خلية مشغولة والاستمرار باختيار الحل.

| المخازن / الفروع | الأول | الثاني | الثالث | العرض |
|---|---|---|---|---|
| A | 8 / 100 | 2 / **0** | 6 | 100 |
| B | 10 | 9 / 100 | 9 / 20 | 120 |
| C | 7 | 10 | 7 / 80 | 80 |
| الطلب | **100** | **100** | **100** | **300/ 300** |

**IV – صياغة مشكلة النقل بشكل مسألة برمجة خطية:**

من الواضح أن مشاكل النقل هي أحدى أشكال البرمجة الخطية التي تم التطرق إليها سابقا، وذلك لأن معاملات المتغيرات جميعها في القيود تساوي الواحد، ولكي توضع ضمن إطار النموذج الرياضي لمشكلة يستوجب معرفة الحالة التي هي عليها:

- ففي حالة المشكلة المعروضة متوازنة أي العرض يساوي الطلب نضع إشارة المساواة في القيود؛
- وفي حالة زيادة الطلب على العرض فإننا نضع إشارة المساواة بالنسبة للصفوف وإشارة أقل من أو يساوي للأعمدة؛
- أما إذا زاد العرض على الطلب، فإننا نضع إشارة المساواة للأعمدة وإشارة أصغر من أو يساوي للصفوف.

**مثال رقم (09):** البيانات التالية تخص إحدى الشركات المتخصصة بإنتاج المواد الغذائية في مصنعين وتقوم بتوزيع منتوجاتها في ثلاث أسواق كما هو موضح في الجدول التالي:

**المطلوب:** صياغة مشكلة النقل بشكل مسألة برمجة خطية.

الحل: نفترض أن عدد الأطنان التي تشحن من المصنع A إلى السوق الأول هي $X_{A1}$.

نفترض أن عدد الأطنان التي تشحن من المصنع B إلى السوق الأول هي $X_{B1}$، وهكذا تتم عملية تعريف المتغيرات.

| المصانع / الأسواق | الأول | الثاني | الثالث | العرض |
|---|---|---|---|---|
| A | 2 | 3 | 5 | 20000 |
| B | 3 | 1 | 4 | 15000 |
| الطلب | **10000** | **8000** | **15000** | **35000/ 33000** |

ومنه شكل مسألة البرمجة الخطية هي على الشكل التالي:

$$Min\,(Z) = 2X_{A1} + 3X_{A2} + 5X_{A3} + 3X_{B1} + X_{B2} + 4X_{B3}$$

$$S/C$$

$$\begin{cases} X_{A1} + X_{B1} = 10000 \\ X_{A2} + X_{B2} = 8000 \\ X_{A3} + X_{B3} = 15000 \\ X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} \leq 20000 \\ X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} \leq 15000 \end{cases}$$

$$X_{AJ} \geq 0; X_{BJ} \geq 0$$

## V- تمارين محلولة:

### التمرين الأول:

مكتب مقاولات يقوم بإنجاز ثلاث مشاريع، كل مشروع من المشاريع الثلاث يحتاج إلى (20; 30; 15) ألف طن من الأسمنت على التوالي، تجهز المشاريع الثلاث بالإسمنت من ثلاث مخازن سعة الخزن لكل مخزون هي (25; 20; 20) ألف طن على التوالي، كلفة نقل كل ألف طن من المخزن الأول إلى المشاريع الثلاثة هي (2; 3; 2) مليون دينار على التوالي ومن المحزن الثاني إلى المشاريع الثلاثة (4; 5; 3) مليون دينار على التوالي ومن المخزن الثالث إلى المشاريع الثلاثة (4; 2; 4) مليون دينار على التوالي.

**المطلوب:**

1. تكوين جدول النقل للمسألة؛
2. أوجد الحل الأساسي الأولي:
   - بطريقة الزاوية الشمالية الغربية وحساب التكلفة الإجمالية ؛
   - بطريقة أقل التكاليف وحساب التكلفة الإجمالية؛
   - بطريقة فوجل وحساب التكلفة الإجمالية.
3. أوجد الحل الأمثل( بالاعتماد على الحل الأولي لطريقة الزاوية الشمالية الغربية):
   - بطريقة الحجر المتنقل وحساب التكلفة الإجمالية؛
   - بطريقة التوزيع المعدل وحساب التكلفة الإجمالية.

**حل التمرين الأول:**1. تكوين جدول النقل للمسألة:

| المخازن \ الفروع | الأول | الثاني | الثالث | العرض |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 2 | 3 | 2 | 20 |
| **B** | 3 | 5 | 4 | 20 |
| **C** | 4 | 2 | 4 | 25 |
| الطلب | **15** | **30** | **20** | **65 /65** |

1.2 الحل الأساسي الأولي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية وحساب التكلفة الإجمالية:

شرط مجموع الخلايا المشغولة يساوي(5)، وهو محقق عدد المربعات المملوءة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة)− 1 = 3+3 − 1 = 5

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 2(15) + 3(5) + 5(20) + 2(5) + 4(20) = 235$$

| المخازن \ الفروع | الأول | الثاني | الثالث | العرض |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 2 / 15 | 3 / **5** | 2 | 20 |
| **B** | 3 | 5 / 20 | 4 | 20 |
| **C** | 4 | 2 / **5** | 4 / 20 | 25 |
| الطلب | **15** | **30** | **20** | **65 /65** |

2.2 الحل الأساسي الأولي أقل التكاليف وحساب التكلفة الإجمالية:

شرط مجموع الخلايا المشغولة يساوي(5)، وهو محقق عدد المربعات المملوءة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة)− 1 = 3+3 − 1 = 5

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 2(15) + 2(5) + 5(5) + 4(15) + 2(25) = 175$$

| المخازن \ الفروع | الأول | الثاني | الثالث | العرض |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 2 / 15 | 3 | 2 / 5 | 20 |
| **B** | 3 | 5 / 5 | 4 / 15 | 20 |
| **C** | 4 | 2 / **25** | 4 | 25 |
| الطلب | **15** | **30** | **20** | **65 /65** |

3.2 الحل الأساسي الأولي بطريقة فوجل وحساب التكلفة الإجمالية:

إيجاد الفرق بين أقل كلفتين في كل صف وفي كل عمود، والبدء بتخصيص الكميات التي سترسل إلى المشاريع.

وهنا سوف يحذف الصف الثالث مرحليا وننقص الطلب في العمود بنفس الوحدات المخصصة للخلية (25).

| الفروع / المخازن | الأول | الثاني | الثالث | العرض | الفروق للصفوف |
|---|---|---|---|---|---|
| **A** | 2 | 3 | 2 | 20 | (2-2)= **0** |
| **B** | 3 | 5 | 4 | 20 | (4-3)= **1** |
| **C** | 4 | 2 **25** | 4 | 25 | (4-2)= **2** |
| الطلب | **15** | **30** | **20** | **65 /65** | |
| الفروق للأعمدة | (3-2)= **1** | (3-2)= **1** | (4-2)= **2** | | |

وهنا سوف يحذف العمود الثاني مرحليا وننقص العرض في الصف بنفس الوحدات المخصصة للخلية (5).

| الفروع / المخازن | الأول | الثاني | الثالث | العرض | الفروق للصفوف |
|---|---|---|---|---|---|
| **A** | 2 | 3 **5** | 2 | 20 | (2-2)= **0** |
| **B** | 3 | 5 | 4 | 20 | (4-3)= **1** |
| الطلب | **15** | **5** | **20** | **40 /40** | |
| الفروق للأعمدة | (3-2)= **1** | (5-3)= **2** | (4-2)= **2** | | |

وهنا سوف يحذف الصف الأول مرحليا وننقص الطلب في العمود بنفس الوحدات المخصصة للخلية (15).

| الفروع / المخازن | الأول | الثالث | العرض |
|---|---|---|---|
| **B** | 3 / 15 | 4 / 5 | 20 |
| الطلب | **15** | **5** | **20 /20** |

| الفروع / المخازن | الأول | الثالث | العرض | الفروق للصفوف |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 2 | 2 / 15 | 15 | (2-2)= **0** |
| **B** | 3 | 4 | 20 | (4-3)= **1** |
| الطلب | **15** | **20** | **35 /35** | |
| الفروق للأعمدة | (3-2)= **1** | (4-2)= **2** | | |

والحل الأساسي لمسألة النقل موضح بالجدول التالي:

شرط مجموع الخلايا المشغولة يساوي(5)، وهو محقق عدد المربعات المملوءة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة)− 1 = 3+3 − 1 = 5

$$Z=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}c_{ij}x_{ij}=3(15)+3(5)$$
$$+2(25)+2(15)+4(5)=160$$

**يلاحظ أن مجموع كلفة النقل وفق طريقة فوجل أقل من مجموع كلفة النقل وفق طريقتي الزاوية الشمالية الغربية وأقل التكاليف.**

| الفروع / المخازن | الأول | الثاني | الثالث | العرض |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 2 | 3 / **5** | 2 / 15 | 20 |
| **B** | 3 / 15 | 5 | 4 / 5 | 20 |
| **C** | 4 | 2 / **25** | 4 | 25 |
| الطلب | **15** | **30** | **20** | **65 /65** |

1.3 الحل الأمثل بطريقة الحجر المتنقل وحساب التكلفة الإجمالية (بالإعتماد على الحل الأولي لطريقة الزاوية الشمالية الغربية):

المسارات المغلقة للجدول الحل الأولي لطريقة الزاوية الشمالية الغربية هي كالآتي:

المسار الأول للخلية (1؛ 3) هي : $\overline{C}_{13}=C_{13}-C_{33}+C_{32}-C_{12}=2-4+2-3=-3$

المسار الأول للخلية (2؛ 1) هي : $\overline{C}_{21}=C_{21}-C_{22}+C_{12}-C_{11}=3-5+3-2=-1$

المسار الأول للخلية (2؛ 3) هي : $\overline{C}_{23}=C_{23}-C_{22}+C_{32}-C_{33}=4-5+2-5=-3$

المسار الأول للخلية (3؛ 1) هي : $\overline{C}_{31}=C_{31}-C_{32}+C_{12}-C_{11}=4-2+3-2=3$

القيمة الأكثر سالبية هي المتغيرين ( $X_{13}$ ، $X_{23}$ ) لذلك يتم اختيار احدهما وليكن $X_{13}$ . وننقل أقل كمية من المربع السالب (20؛ 5) وكمية هي (5) .

اختبار الخانات الفارغة من مسألة المقابلة:

$\overline{C}_{12} = C_{12} - C_{13} + C_{33} - C_{32} =$
$3 - 2 + 4 - 2 = 3$

$\overline{C}_{21} = C_{21} - C_{11} + C_{13} - C_{33} + C_{32} - C_{22} =$
$3 - 2 + 2 - 4 + 2 - 5 = -4$

$\overline{C}_{23} = C_{23} - C_{22} + C_{32} - C_{33} =$
$4 - 5 + 2 - 4 = -3$

$\overline{C}_{31} = C_{31} - C_{33} + C_{13} - C_{11} =$
$4 - 4 + 2 - 2 = 0$

معامل ($X_{21}$) هو الأكثر سالبية لذلك يمثل المتغير الداخل وكمية التي تنقل هي الأقل ما بين (20؛ 15؛ 15) وهي (15) .

| المخازن \ الفروع | الأول | الثاني | الثالث | العرض |
|---|---|---|---|---|
| A | 2 (15) | 3 | 2 (5) | 20 |
| B | 3 | 5 (20) | 4 | 20 |
| C | 4 | 2 (**10**) | 4 (15) | 25 |
| الطلب | **15** | **30** | **20** | **65 /65** |

نلاحظ من خلال الجدول المقابل أن عدد المتغيرات الخلايا المملوءة اقل من (M+N−1) وهذا لا يسمح لنا بتكوين مسارات مغلقة وهي حالة خاصة **(حالة الانحلال)**، لذلك نخصص القيمة (0) للخلايا الفارغة والأقل كلفة وهي ($X_{11}$)، وعلى هذا الأساس فإن المسارات المغلقة للجدول هي كالآتي:

اختبار الخانات الفارغة من مسألة المقابلة:

$\overline{C}_{12} = C_{12} - C_{11} + C_{21} - C_{22} =$
$3 - 2 + 3 - 5 = -1$

$\overline{C}_{23} = C_{23} - C_{13} + C_{11} - C_{12} =$
$4 - 2 + 2 - 3 = 1$

$\overline{C}_{31} = C_{31} - C_{32} + C_{22} - C_{21} =$
$4 - 2 + 5 - 3 = 4$

| المخازن \ الفروع | الأول | الثاني | الثالث | العرض |
|---|---|---|---|---|
| A | 2 (0) | 3 | 2 (20) | 20 |
| B | 3 (15) | 5 (5) | 4 | 20 |
| C | 4 | 2 (**25**) | 4 | 25 |
| الطلب | **15** | **30** | **20** | **65 /65** |

$\overline{C}_{33} = C_{33} - C_{32} + C_{22} - C_{21} +$
$C_{11} - C_{13} = 4 - 2 + 5 - 3 + 2 - 2 = 4$

معامل ($X_{12}$) هو الأكثر سالبية لذلك يمثل المتغير الداخل وكمية التي تنقل هي الأقل ما بين (5؛ 0) وهي (0).

اختبار الخانات الفارغة من مسألة المقابلة:

$\overline{C}_{11} = C_{11} - C_{12} + C_{22} - C_{21} =$
$2 - 3 + 5 - 3 = 1$
$\overline{C}_{23} = C_{23} - C_{13} + C_{12} - C_{22} =$
$4 - 2 + 3 - 5 = 0$
$\overline{C}_{31} = C_{31} - C_{32} + C_{22} - C_{21} =$
$4 - 2 + 5 - 3 = 4$
$\overline{C}_{33} = C_{33} - C_{13} + C_{12} - C_{32} =$
$4 - 2 + 3 - 2 = 3$

بما أن معاملات الكلف النسبية غير سالبة فهذا يعني أن الجدول المقابل يمثل حل الأمثل لمسألة النقل بمجموع كلفة:

| المخازن \ الفروع | الأول | الثاني | الثالث | العرض |
|---|---|---|---|---|
| A | 2 | 3 / 0 | 2 / 20 | 20 |
| B | 3 / 15 | 5 / 5 | 4 | 20 |
| C | 4 | 2 / 25 | 4 | 25 |
| الطلب | **15** | **30** | **20** | **65 /65** |

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 3(0) + 2(20) + 3(15) + 5(5) + 2(25) = 160$$

تدل القيمة الصفرية لمعامل الكلفة النسبية للمتغير ($X_{23}$) على وجود حل أمثل أخر للمسألة وهي حالة خاصة **(وجود أكثر من حل أمثل)** بحيث نواصل الحل ونختار كمية أقل في المربع السالب ما بين (5؛ 20) وهي (5) ونقوم بتطوير الحل كما هو موضح في الجدول المقابل. ومجموع كلفة النقل هي:

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 3(15) + 3(5) + 2(25) +$$
$$2(15) + 4(5) = 160$$

| المخازن \ الفروع | الأول | الثاني | الثالث | العرض |
|---|---|---|---|---|
| A | 2 | 3 / 5 | 2 / 15 | 20 |
| B | 3 / 15 | 5 | 4 / 5 | 20 |
| C | 4 | 2 / 25 | 4 | 25 |
| الطلب | **15** | **30** | **20** | **65 /65** |

2.3 إيجاد الحل الأمثل بطريقة التوزيع المعدل وحساب التكلفة الإجمالية ( بالاعتماد على الحل الأولي لطريقة الزاوية الشمالية الغربية):

- استخراج تكاليف المربعات المملوءة:

نفرض: $U_1 = 0$ و لدينا: $C_{ij} = U_i + V_j$

الخلية (1؛ 1):

$$C_{11} = U_1 + V_1 \Rightarrow U_1 + V_1 = 2 \Rightarrow V_1 = 2$$

الخلية (1؛ 2):

$$C_{12} = U_1 + V_2 \Rightarrow U_1 + V_2 = 3 \Rightarrow V_2 = 3$$

الخلية (2; 2):

$$C_{22} = U_2 + V_2 \Rightarrow U_2 + V_2 = 5 \Rightarrow U_2 = 2$$

الخلية (3; 2):

$$C_{32} = U_3 + V_2 \Rightarrow U_3 + V_2 = 2 \Rightarrow U_3 = -1$$

الخلية (3; 3):

$$C_{33} = U_3 + V_3 \Rightarrow U_3 + V_3 = 4 \Rightarrow V_3 = 5$$

- استخراج تكاليف المربعات الفارغة:

| | | $V_1 = 2$ | $V_2 = 3$ | $V_3 = 5$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | الفروع / المخازن | الأول | الثاني | الثالث | العرض |
| $U_1 = 0$ | **A** | 2 / 15 | 3 / 5 | 2 | 20 |
| $U_2 = 2$ | **B** | 3 | 5 / 20 | 4 | 20 |
| $U_3 = -1$ | **C** | 4 | 2 / 5 | 4 / 20 | 25 |
| | الطلب | **15** | **30** | **20** | **65 /65** |

كلفة المربعات الفارغة:

$$I_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 2 - 0 - 5 = -3$$
$$I_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 3 - 2 - 2 = -1$$
$$I_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 = 4 - 2 - 5 = -3$$
$$I_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 4 - (-1) - 2 = 3$$

يمكن اختيار أي من المتغيرين ($X_{13}$ ;$X_{23}$) كمتغير داخل لأنها الأكثر سالبية من حيث معامل التحسين ولنفترض ($X_{23}$) لذلك فإن المسار المغلق للمتغير يكون بالصورة الآتية:

ننقل أقل كمية في المربع ذو الإشارة السالبة وهي (20) ليصبح:

| | | |
|---|---|---|
| 2 / 15 | 3 / 5 | 2 / 0 |
| 3 | 5 | 4 / 20 |
| 4 | 2 / 25 | 4 |

| | |
|---|---|
| 5 (-) 20 | 4 (+) |
| 2 (+) 5 | 4 (-) 20 |

نلاحظ من خلال الجدول أعلاه أن عدد متغيرات الخلايا المملوءة اقل من (M+N−1) وهذا لا يسمح لنا بتكوين مسارات مغلقة وهي حالة خاصة **(حالة الانحلال)**، لذلك نخصص القيمة (0) للخلايا الفارغة والأقل كلفة وهي ($X_{13}$)،

- استخراج تكاليف المربعات المملوءة:

نفرض: $U_1 = 0$ و لدينا: $C_{ij} = U_i + V_j$

$$C_{11} = U_1 + V_1 \Rightarrow U_1 + V_1 = 2 \Rightarrow V_1 = 2$$
$$C_{12} = U_1 + V_2 \Rightarrow U_1 + V_2 = 3 \Rightarrow V_2 = 3$$
$$C_{13} = U_1 + V_3 \Rightarrow U_1 + V_3 = 2 \Rightarrow V_3 = 2$$
$$C_{23} = U_2 + V_3 \Rightarrow U_2 + V_3 = 4 \Rightarrow U_2 = 2$$
$$C_{32} = U_3 + V_2 \Rightarrow U_3 + V_2 = 2 \Rightarrow U_3 = -1$$

- استخراج تكاليف المربعات الفارغة:

| | | $V_1 = 2$ | $V_2 = 3$ | $V_3 = 2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | الفروع / المخازن | الأول | الثاني | الثالث | العرض |
| $U_1 = 0$ | **A** | 2 / 15 | 3 / 5 | 2 / 0 | 20 |
| $U_2 = 2$ | **B** | 3 | 5 | 4 / 20 | 20 |
| $U_3 = -1$ | **C** | 4 | 2 / 25 | 4 | 25 |
| | الطلب | **15** | **30** | **20** | **65 /65** |

كلفة المربعات الفارغة:

$$I_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 3 - 3 - 2 = -2$$

$$I_{22} = C_{22} - U_2 - V_2 = 5 - 2 - 3 = 0$$
$$I_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 4 - (-1) - 2 = 3$$
$$I_{33} = C_{33} - U_3 - V_3 = 4 - (-1) - 2 = 3$$

يمكن اختيار المتغيرة ($X_{21}$) كمتغير داخل لأنها سالبة من حيث معامل التحسين فإن المسار المغلق للمتغيرة يكون بالصورة الآتية:

| | | |
|---|---|---|
| 2 (-) 15 | 3 5 | 2 (+) 0 |
| 3 (+) | 5 | 4 (-) 20 |

ننقل أقل كمية في المربع ذو الإشارة السالبة وهي (15) ليصبح:

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 3 5 | 2 15 |
| 3 15 | 5 | 4 5 |
| 4 | 2 25 | 4 |

نلاحظ من خلال الجدول أعلاه أن عدد المتغيرات الخلايا المملوءة تساوي (5) وهو شرط محقق.

- استخراج تكاليف المربعات المملوءة:نفرض: $U_1 = 0$ و لدينا: $C_{ij} = U_i + V_j$

$$C_{12} = U_1 + V_2 \Rightarrow U_1 + V_2 = 3 \Rightarrow V_2 = 3$$
$$C_{13} = U_1 + V_3 \Rightarrow U_1 + V_3 = 2 \Rightarrow V_3 = 2$$
$$C_{21} = U_2 + V_1 \Rightarrow U_2 + V_1 = 3 \Rightarrow V_1 = 3 - U_2$$
$$C_{23} = U_2 + V_3 \Rightarrow U_2 + V_3 = 4 \Rightarrow U_2 = 2 \Rightarrow V_1 = 3 - 2 = 1 \Rightarrow V_1 = 1$$
$$C_{32} = U_3 + V_2 \Rightarrow U_3 + V_2 = 2 \Rightarrow U_3 = -1$$

- استخراج تكاليف المربعات الفارغة:

| | | $V_1 = 1$ | $V_2 = 3$ | $V_3 = 2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | الفروع / المخازن | الأول | الثاني | الثالث | العرض |
| $U_1 = 0$ | **A** | 2 | 3 5 | 2 15 | 20 |
| $U_2 = 2$ | **B** | 3 15 | 5 | 4 5 | 20 |
| $U_3 = -1$ | **C** | 4 | 2 25 | 4 | 25 |
| | الطلب | **15** | **30** | **20** | **65 /65** |

كلفة المربعات الفارغة:

$$I_{11} = C_{11} - U_1 - V_1 = 2 - 0 - 1 = 1$$
$$I_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 5 - 2 - 3 = 0$$
$$I_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 4 - (-1) - 1 = 4$$
$$I_{33} = C_{33} - U_3 - V_3 = 4 - (-1) - 2 = 3$$

تدل القيمة الصفرية لمعامل الكلفة النسبية للمتغير ($X_{21}$) على وجود حل أمثل أخر للمسألة، وبما أن معاملات مؤشر التحسين موجبة فإن الجدول أعلاه يمثل الحل الأمثل بمجموع كلفة نقل:

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 3(15) + 3(5) + 2(25) + 2(15) + 4(5) = 160$$

**التمرين الثاني:** الجدول التالي يبين البيانات المتعلقة بالطاقة الإنتاجية، والطلب، والربح المحقق من نقل الوحدة الواحدة من مصادر الإنتاج ($S_i$) إلى مراكز الاستلام ($D_i$) الخاصة بالشركة الصناعية .

**المطلوب:**

1. إيجاد الحل الأولي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية وطريقة فوجل؛
2. إيجاد الحل الأمثل بطريقة التوزيع المعدل (بالاعتماد على الحل الأولي لطريقة الزاوية الشمالية الغربية).

| إلى / من | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | العرض |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 2 | 4 | 6 | 200 |
| $S_2$ | 8 | 2 | 10 | 220 |
| الطلب | **160** | **140** | **120** | **420/420** |

**حل التمرين الثاني:**

هذا التمرين هو حالة نماذج النقل المستخدم لتعظيم الأرباح.

1.1. الحل الأساسي الأولي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية وحساب الربح الإجمالي:

شرط مجموع الخلايا المشغولة يساوي(4)، وهو محقق عدد المربعات المملوءة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة)- 1 = 3+2 – 1 = 4

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} c_{ij}x_{ij} = 2(160) + 4(40) + 2(100) + 10(120) = 3320$$

| إلى / من | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | العرض |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 2<br>**160** | 4<br>**40** | 6 | 200 |
| $S_2$ | 8 | 2<br>**100** | 10<br>**120** | 220 |
| الطلب | **160** | **140** | **120** | **420/420** |

2.1.إيجاد الحل الأولي بطريقة فوجل:

إيجاد الفرق بين أعلى ربح في كل صف وفي كل عمود، ثم نختار أعلى فرق ، والبدء بتخصيص الوحدات التي سترسل، ونحتار المربع الذي يحمل أكبر ربح.

وهنا سوف يحذف العمود الأول مرحليا وننقص العرض في الصف الثاني بنفس الوحدات المخصصة للخلية (160).

| من \ إلى | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | العرض | الفروق للصفوف |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 2 | 4 | 6 | 200 | (6-4)= **2** |
| $S_2$ | 8<br>160 | 2 | 10 | 220 | (10-8)= **2** |
| الطلب | **160** | **140** | **120** | **420** | |
| الفروق للأعمدة | (8-2)= **6** | (4-2)= **2** | (10-6)= **4** | | |

وهنا سوف يحذف الصف الثاني مرحليا وننقص الطلب في العمود الثاني بنفس الوحدات المخصصة للخلية (60).

| من \ إلى | $D_2$ | $D_3$ | العرض | الفروق للصفوف |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 4 | 6 | 200 | (6-4)= **2** |
| $S_2$ | 2 | 10<br>**60** | 60 | (10-2)= **8** |
| الطلب | **140** | **120** | **260** | |
| الفروق للأعمدة | (4-2)= **2** | (10-6)= **4** | | |

وبالعودة للمسألة الأصلية وتحديد الوحدات الموزعة نجد شرط مجموع الخلايا المشغولة يساوي(4)، وهو محقق عدد المربعات المملوءة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة) − 1 = 3+2 − 1 = 4

| من \ إلى | $D_2$ | $D_3$ | العرض |
|---|---|---|---|
| $S_1$ | 4<br>**140** | 6<br>**60** | 200 |
| الطلب | **140** | **60** | **200** |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 4<br>**140** | 6<br>60 |
| 8<br>160 | 2 | 10<br>**60** |

كما أن الربح الإجمالي كالآتي:

$$Z = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{2} c_{ij} x_{ij} = 8(160) + 4(140) + 6(60) + 10(60) = 2800$$

2.إيجاد الحل الأمثل بطريقة التوزيع المعدل ( بالاعتماد على الحل الأولي لطريقة الزاوية الشمالية الغربية):

- استخراج تكاليف المربعات المملوءة:

نفرض: $U_1 = 0$ و لدينا: $C_{ij} = U_i + V_j$

$$C_{11} = U_1 + V_1 \Rightarrow U_1 + V_1 = 2 \Rightarrow V_1 = 2$$
$$C_{12} = U_1 + V_2 \Rightarrow U_1 + V_2 = 4 \Rightarrow V_2 = 4$$
$$C_{22} = U_2 + V_2 \Rightarrow U_2 + V_2 = 2 \Rightarrow U_2 = -2$$
$$C_{23} = U_2 + V_3 \Rightarrow U_2 + V_3 = 10 \Rightarrow V_3 = 12$$

- استخراج تكاليف المربعات الفارغة:

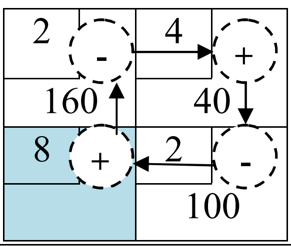
| | | $V_1 = 2$ | $V_2 = 4$ | $V_3 = 12$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | إلى / من | **$D_1$** | **$D_2$** | **$D_3$** | العرض |
| $U_1 = 0$ | **$S_1$** | 2 **160** | 4 **40** | 6 | 200 |
| $U_2 = -2$ | **$S_2$** | 8 | 2 **100** | 10 **120** | 220 |
| | الطلب | **160** | **140** | **120** | **420/420** |

كلفة المربعات الفارغة:

$$I_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 6 - 0 - 12 = -6$$
$$I_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 8 - (-2) - 2 = 8$$

مما تقدم يتضح أن مؤشر التحسين كان موجباً بالنسبة للخلية الفارغة ($X_{21}$)، لذلك تعتبر هذه الخلية من أكثر الخلايا الفارغة مساهمة في عملية تعظيم الربح، لذلك تعتبر المتغير الداخل ويتم تنظيم المسار المغلق لها، كما يلي:

ننقل أقل كمية في المربع ذو الإشارة السالبة وهي (100) ليصبح:




| | | |
|---|---|---|
| 2 60 | 4 140 | 6 |
| 8 100 | 2 | 10 120 |

- استخراج تكاليف المربعات المملوءة:

نفرض: $U_1 = 0$ و لدينا: $C_{ij} = U_i + V_j$

$$C_{11} = U_1 + V_1 \Rightarrow U_1 + V_1 = 2 \Rightarrow V_1 = 2$$
$$C_{12} = U_1 + V_2 \Rightarrow U_1 + V_2 = 4 \Rightarrow V_2 = 4$$
$$C_{21} = U_2 + V_1 \Rightarrow U_2 + V_1 = 8 \Rightarrow U_2 = 6$$
$$C_{23} = U_2 + V_3 \Rightarrow U_2 + V_3 = 10 \Rightarrow V_3 = 4$$

- استخراج تكاليف المربعات الفارغة:

| | | $V_1 = 2$ | $V_2 = 4$ | $V_3 = 4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | إلى / من | **$D_1$** | **$D_2$** | **$D_3$** | العرض |
| $U_1 = 0$ | **$S_1$** | 2<br>**60** | 4<br>**140** | 6 | 200 |
| $U_2 = 6$ | **$S_2$** | 8<br>**100** | 2 | 10<br>**120** | 220 |
| | الطلب | **160** | **140** | **120** | **420/420** |

كلفة المربعات الفارغة:

$$I_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 6 - 0 - 4 = 2$$
$$I_{22} = C_{22} - U_2 - V_2 = 2 - (6) - 4 = -8$$

مما تقدم يتضح أن مؤشر التحسين كان موجباً بالنسبة للخلية الفارغة ($X_{13}$)، لذلك تعتبر هذه الخلية من أكثر الخلايا الفارغة مساهمة في عملية تعظيم الربح، لذلك تعتبر المتغير الداخل ويتم تنظيم المسار المغلق لها، كما يلي:

ننقل أقل كمية في المربع ذو الإشارة السالبة وهي (100) ليصبح:

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 4<br>140 | 6<br>60 |
| 8<br>160 | 2 | 10<br>60 |

| | | |
|---|---|---|
| 2<br>60 - | 4<br>140 | 6<br>+ |
| 8<br>100 + | 2 | 10<br>120 - |

- استخراج تكاليف المربعات المملوءة:

نفرض: $U_1 = 0$ و لدينا: $C_{ij} = U_i + V_j$

$$C_{12} = U_1 + V_2 \Rightarrow U_1 + V_2 = 4 \Rightarrow V_2 = 4$$
$$C_{13} = U_1 + V_3 \Rightarrow U_1 + V_3 = 6 \Rightarrow V_3 = 6$$
$$C_{21} = U_2 + V_1 \Rightarrow U_2 + V_1 = 8 \Rightarrow V_1 = 8 - U_2$$
$$C_{23} = U_2 + V_3 \Rightarrow U_2 + V_3 = 10 \Rightarrow U_2 = 4 \Rightarrow V_1 = 4$$

- استخراج تكاليف المربعات الفارغة:

| | | $V_1 = 4$ | $V_2 = 4$ | $V_3 = 6$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | إلى / من | **$D_1$** | **$D_2$** | **$D_3$** | العرض |
| $U_1 = 0$ | **$S_1$** | 2 | 4 **140** | 6 **60** | 200 |
| $U_2 = 4$ | **$S_2$** | 8 **160** | 2 | 10 **60** | 220 |
| | الطلب | **160** | **140** | **120** | **420/420** |

كلفة المربعات الفارغة:

$$I_{11} = C_{11} - U_1 - V_1 = 2 - 0 - 4 = -2$$
$$I_{22} = C_{22} - U_2 - V_2 = 2 - 4 - 4 = -6$$

مما تقدم يتضح أن كل قيم مؤشر التحسين للخلايا الفارغة هي قيم سالبة لذلك فإن الحل الذي تم التوصل إليه في الجدول الأخير هو الحل الأمثل وأن قيمة الربح الكلية عند الحل الأمثل هي:

$$Z = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{2} c_{ij} x_{ij} = 8(160) + 4(140) + 6(60) + 10(60) = 2800$$

## VI- تمارين مقترحة:

**التمرين الأول:** لتكن مسألة النقل التالية :

| المخازن \ الأسواق | $D_1$ | $D_2$ | العرض |
|---|---|---|---|
| $S_1$ | 4 ..... | 2 ..... | 60 |
| $S_2$ | 7 ..... | 5 ..... | 40 |
| $S_3$ | 3 ..... | 10 ..... | 70 |
| الطلب | 105 | 65 | 170 / 170 |

**المطلوب:** أوجد الحل الأساسي الأول:

1. بطريقة الزاوية الشمالية الغربية وحساب التكلفة الإجمالية .
2. بطريقة أقل التكاليف وحساب التكلفة الإجمالية.
3. بطريقة فوجل وحساب التكلفة الإجمالية.

**التمرين الثاني:** لتكن مسألة النقل التالية:

| المصنع \ الأسواق | الشمالي | الجنوبي | الغربي | الطاقة الإنتاجية (طن) العرض |
|---|---|---|---|---|
| A | 7 ..... | 6 ..... | 5 ..... | 400 |
| B | 4 ..... | 8 ..... | 1 ..... | 500 |
| C | 2 ..... | 3 ..... | 9 ..... | 300 |
| الاحتياجات (طن) الطلب | 200 | 600 | 400 | 1200 /1200 |

**المطلوب:** أوجد الحل الأساسي الأول بطريقة فوجل وحساب التكلفة الإجمالية.

**التمرين الثالث:** من مسألة النقل للتمرين الأول، وإنطلاقا من جدول الحل الأساسي الأول المحصل عليه من مصفوفة الحل الأولي لطريقة الزاوية الشمالية الغربية، أوجد الحل الأمثل:

1. بطريقة الحجر المتنقل وحساب التكلفة الإجمالية .
2. بطريقة التوزيع المعدل وحساب التكلفة الإجمالية .

**التمرين الرابع** : لتكن مسألة النقل التالية

| المصنع \ السوق | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | العرض |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 4 ..... | 7 ..... | 2 ..... | 10 ..... | **300** |
| $S_2$ | 5 ..... | 8 ..... | 7 ..... | 11 ..... | **500** |
| $S_3$ | 10 ..... | 9 ..... | 6 ..... | 13 ..... | **700** |
| الطلب | **400** | **200** | **600** | **400** | **1600 /1500** |

**المطلوب:** أوجد الحل الأساسي الأول بطريقة أقل التكاليف وحساب التكلفة الإجمالية .

**التمرين الخامس:** لتكن مسألة النقل التالية :

| المصنع \ الأسواق | الشمالي | الجنوبي | الغربي | الطاقة الإنتاجية (طن) العرض |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 8 ..... | 2 ..... | 6 ..... | **100** |
| **B** | 10 ..... | 9 ..... | 9 ..... | **120** |
| **C** | 7 ..... | 10 ..... | 7 ..... | **80** |
| الاحتياجات (طن) الطلب | **100** | **100** | **100** | **300 /300** |

**المطلوب:**

1. أوجد الحل الأساسي الأول بطريقة الزاوية الشمالية الغربية . ماذا تلاحظ .
2. كيف يتم معالجة هذه الحالة ؟

**التمرين السادس:** لتكن مسألة النقل التالية

| المصنع \ السوق | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | العرض |
|---|---|---|---|---|---|
| **A** | 10 ..... | 8 ..... | 6 ..... | 4 ..... | **2000** |
| **B** | 14 ..... | 17 ..... | 5 ..... | 2 ..... | **1300** |
| **C** | 18 ..... | 7 ..... | 11 ..... | 9 ..... | **1700** |
| الطلب | **1000** | **2000** | **500** | **1500** | **5000** |

**المطلوب:** أوجد أعلى إيراد ومن مبدأ تعظيم الأرباح :

**1.** الحل الأساسي الأول بطريقة الزاوية الشمالية الغربية و بطريقة أقل التكاليف وبطريقة فوجل وحساب مجموع الإيرادات لكل طريقة.

**2.** اختبر الحل الأساسي الأول بطريقة الحجر المتنقل وتوزيع المعدل من مصفوفة الحل الأساسي لطريقة اقل التكاليف وحساب مجموع الإيرادات لكل طريقة .

## الفصل السادس

# نماذج التخصيص أو التعيين

يعد أسلوب التخصيص واحد من أساليب بحوث العمليات التي تحل بموجبها الكثير من المشاكل في الحياة العملية، وتهدف إلى اختيار أفضل تخصيص يؤدي إلى الوصول إلى الأدنى من التكاليف وفي نفس الوقت تعد من الحالات الخاصة لنماذج النقل.

وان كفاءة التخصيص هي إحدى معايير الإدارة العليا لما لها من أثار على تحقيق أهداف الشركة بأقل التكاليف ولهذا تعتبر مشكلة التخصيص حالة خاصة من مشاكل البرمجة الخطية التي تتعلق بتحديد أفضل توزيع كتوزيع المدراء على المشاريع أو الباعة على المناطق الجغرافية المحلية أو العقود على المتعهدين أو الأعمال على الآلات أو تخصيص المحامين على الزبائن وغيرها.

**I- مفهوم وشروط مشكلة التخصيص:**

تعرف مشكلة التخصيص بأنها وسيلة تساهم في تحقيق الاستخدام الأمثل للموارد المتاحة بهدف تحقيق أقصى العوائد أو تخفيض التكاليف إلى أدنى مستوى ممكن، وتعد مشكلة التخصيص من مشاكل التوزيع السهلة المعالجة والمقيدة في الوقت إذا تعود بساطة استخدامها إلى شروطها التي تقتضي وجود عدد من العمليات (أعمال، أفراد،...) بهدف توزيعها على التسهيلات المتاحة بحيث تخصص عملية واحدة لكل نوع من التسهيلات ( الإمكانات المتاحة كالمكائن مثلاً)[1].

إن بساطة استخدامها تعود بالدرجة الرئيسة إلى شروط تطبيقها وهي[2]:

- تساوي عدد الأشخاص مع عدد العمليات أو الوظائف المطلوب إنجازها؛
- الوسيلة المتوفرة ( عامل، الآلة) تؤدي عمل واحد، وعدم السماح لها بالقيام بأكثر من ذلك؛
- كلفة انجاز كل مهمة من قبل كل وسيلة من الوسائل معروفة ومحددة مسبقا؛
- تحقق شرط عم السلبية، حيث يفترض عدم وجود قيم سالبة.

إن مجالات تطبيق نموذج التخصيص في الحياة العملية كثيرة ومن أهمها[3]:

- تخصيص المدراء للمشاريع؛
- تخصيص مندوبي البيع إلى المناطق البيعية المختلفة؛
- تخصيص الأعمال للمكائن أو الخطوط الإنتاجية؛
- تخصيص المحاسبين للشركات في مكاتب التدقيق والمحاسبة؛
- توزيع العقود على المتعهدين أو المقاولين؛
- تخصيص وسائل نقل معينة لنقل السلع من مكان لأخر.

[1] . محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص 12.

[2]. منعم زمزير الموسوي، مرجع سابق، ص 269.

[3]. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، ص 281.

وهناك تطبيقات أخرى كثيرة لهذا الأسلوب منشورة في المجلات المتخصصة في بحوث العمليات ثم تقديم حلول لبعض المشاكل المستعصية من خلالها.

**II- طرق حل مشاكل التخصيص (التعيين):**

هناك طريقتان رئيسيتان لحل مشاكل التخصيص وهما:

- ✓ طريقة التوافيق المختلفة ( العد الكامل)؛
- ✓ طريقة الحل المباشر (المختصر) أو الطريقة الهنكارية.

**II-1- طريقة التوافيق المختلفة ( العد الكامل):**

تعتبر هذه الطريقة من ابسط الطرق المستخدمة في حل مشاكل التخصيص وتعتمد على تعداد جميع بدائل التخصيص المحتملة ثم نختار التخصيص الذي يعطي اقل تكاليف خدمة ممكنة.

إن عدد البدائل المحتملة لكل مشكلة تخصيص تساوي العاملي (Factorial) عدد الصفوف أو عدد الأعمدة، فإذا كان عدد الصفوف يساوي 3 مثلاً فإن: (3!= 3x2x1=6) أي إن هناك 6 بدائل محتملة لعملية التخصيص.

**مثال رقم (01):** يقوم معمل للخياطة بعمليتين هما التفصيل والخياطة ،فإذا كانت البيانات التالية تمثل الوقت المستغرق للأداء في القسمين من قبل عاملين كالأتي :

| *المهام* / *العاملون* | *الوقت المستغرق / بالدقائق* | |
|---|---|---|
| | *تفصيل* | *خياطة* |
| *خالد* | 6 | 5 |
| *علي* | 8 | 10 |

**المطلوب** : تخصيص كل عامل للقيام مهمة معينة، بحيث يؤدي ذلك إلى تقليل الوقت اللازم لإنجاز تلك المهام.

**الحل**: إن الاحتمالين الخاصين بتحقيق الهدف هما (2!= 2x1=2) ويمكن تمثيل هذين الاحتمالين كالآتي:

| *الاحتمالات* | *العاملون* | | **التكلفة بالدقائق** |
|---|---|---|---|
| | *تفصيل* | *خياطة* | |
| *الأول* | خالد | علي | 6+10=16 |
| *الثاني* | علي | خالد | 8+5=13 |

إذن يعتبر البديل الثاني هو الأفضل لإنجاز المهمتين بأقل التكاليف.

**مثال رقم (02):** إذا توفر لدينا ثلاثة أجهزة لإنجاز ثلاثة وظائف مختلفة وأعطيت لنا المعلومات الواردة في الجدول الآتي عن تكاليف إنجاز هذه الوظائف على هذه الأجهزة المطلوب استخدام طريقة العد الكامل لتحديد أفضل تخصيص لتقليل التكاليف:

| الأجهزة | الوظائف | | |
|---|---|---|---|
| | **1** | **2** | **3** |
| **A** | 19 | 11 | 17 |
| **B** | 13 | 7 | 11 |
| **C** | 11 | 5 | 13 |

**الحل:** تجري عملية التخصيص على وفق طريقة التوافيق المختلفة وذلك بتسجيل جميع البدائل الممكنة مع التكاليف المقابلة لكل بديل، بما ان عدد الصفوف يساوي (3) فإن: (3!= 3x2x1=6) أي إن هناك 6 بدائل محتملة لعملية التخصيص.

| البدائل | الأجهزة | | | التكاليف الإجمالية |
|---|---|---|---|---|
| | **A** | **B** | **C** | |
| **الأول** | 1 | 2 | 3 | 19+7+13=39 |
| **الثاني** | 1 | 3 | 2 | 19+5+11=35 |
| **الثالث** | 2 | 1 | 3 | 11+13+13=37 |
| **الرابع** | 2 | 3 | 1 | 11+11+11=33 |
| **الخامس** | 3 | 1 | 2 | 17+13+5=35 |
| **السادس** | 3 | 2 | 1 | 17+7+11=35 |

**اقل كلفة إجمالية**

يتضح من الجدول أعلاه أن جميع البدائل قد تم حسابها وأن البديل الأفضل هو الرابع أي أن يخصص الجهاز (A) لإنجاز الوظيفة الثانية و الجهاز (B) للوظيفة الثالثة والجهاز (C) للوظيفة الأولى لأن هذا الترتيب سيجعل من الكلفة الإجمالية (33 وحدة نقدية).

إن من أبرز عيوب طريقة التوافيق المختلفة أنها تستخدم فقط لإيجاد الحل الأمثل في حالة المسائل ذات المتغيرات قليلة العدد فتصبح غير كفوءة في حالة المسائل الكبيرة ذات المتغيرات الأربعة وما فوق، لهذا السبب تم تطوير أسلوب أكثر كفاءة في إيجاد الحل الأمثل على يد الرياضي المجري (د.كوينج) الذي بني نموذجها وعرفت بالطريقة الهنكارية والتي تتميز بقدرتها على التعامل مع المشاكل ذات المتغيرات الكثيرة [1].

**II-2- طريقة الحل المباشر ( المختصرة) أو الطريقة الهنكارية:**

تعتمد إجراءات الحل وفق هذه الطريقة على ما يسمى (المصفوفة المتناقصة)، والتي تستلزم طرح وإضافة أرقام ملائمة من هذه المصفوفة، ومن خلالها نستطيع أن نحقق الحل الأمثل، وتعتمد خطوات الوصول إلى الحل الأمثل على هدف مشكلة التخصيص حيث تختلف تلك الخطوات في حالة الوصول إلى أدنى كلفة عما هي عليه في حالة الوصول إلى أقصى الإيرادات.هناك شرطين ينبغي تحقيقهما وهما:

- **الشرط الأول:** تحقيق صفر واحد في كل صف وصفر وحدا على الأقل في كل عمود؛

[1]. اكرم محمد عرفان المهتدي؛ مرجع سابق، ص 161.

- **الشرط الثاني:** سحب المستقيمات على الأصفار بمعنى تغطية الأصفار بمستقيمات، ابتداء من أكبر عدد من الأصفار ثم التدرج إلى أقل عدد من الأصفار ويجب أن يكون عدد المستقيمات المسحوبة على الأصفار مساوياً لعدد الصفوف والأعمدة.

**أولا : تحقيق أدنى كلفة**

وتتميز هذه الطريقة بأنها تتكون من عدد من الخطوات المتسلسلة التي تكفل الوصول إلى الحل الأمثل، وهذه الخطوات لمشاكل التخفيض هي[1]:

1. ترتيب المعلومات في مصفوفة؛
2. التأكد من موازنة المصفوفة ( عدد الصفوف يساوي عدد الأسطر)؛
3. نطرح أقل قيمة في كل صف من باقي قيم ذلك الصف في المصفوفة؛
4. نطرح أقل قيمة في كل عمود من باقي قيم ذلك العمود في المصفوفة، ولابد من تحقيق صفر واحد على الأقل في كل عمود وفي كل صف وهو الشرط الأول؛
5. تغطية الأصفار بمستقيمات ابتداء من أكبر عدد من الأصفار ثم التدرج إلى الأقل، ويجب أن يكون عدد المستقيمات المسحوبة على الأصفار مساوي لعدد الصفوف أو الأعمدة وهذا يمثل الشرط الثاني؛ ونكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل؛ ونقوم بعملية التعين أو التخصيص وذلك بأن نأخذ الأصفار الواقعة على نقاط التقاء الصفوف والأعمدة ونجري التعيينات على أساس واحد إلى واحد والقصد من أخذ الأصفار في هذه الحالة، هو لأنها تمثل أصلاً اقل التكاليف؛
6. إذا كان عدد المستقيمات المغطية للأصفار أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة، فهذا يعني عدم الوصول إلى الحل الأمثل، أي أننا لا نستطيع القيام بكافة التعيينات، ومن أجل الاستمرار بالحل فإننا نقوم بتطوير الحل أي طرح أصغر قيمة (باستثناء الصفر) من كل القيم غير المغطاة بمستقيمات من بقية القيم غير المغطاة وفي نفس الوقت إضافة هذه القيمة التي طرحتها إلى نقاط تقاطع المستقيمات، أما القيم المغطاة فتدرج كما هي في الجدول الجديد وتتم العملية باستمرار إلى أن تحقق الحل الأمثل،
7. وضع سياسة التخصيص ثم حساب مجموع التكاليف.

**مثال رقم (03):** ترغب إحدى الشركات بتخصيص أربعة أوامر عمل إلى أربعة مجاميع من العاملين بحيث يكون وقت الإنجاز الكلي ( بالساعة) اقل ما يمكن علما أن الوقت اللازم لإنجاز كل أمر عمل من قبل كل مجموعة من المجاميع الأربعة موضحة في الجدول أدناه والمطلوب: إجراء عملية التخصيص اللازمة بطريقة الحل المباشر:

[1]. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، ص ص: 222 – 223.

| مجاميع العمل \ أوامر العمل | أمر A | أمر B | أمر C | أمر D |
|---|---|---|---|---|
| مجموعة 1 | 5 | 7 | 9 | 10 |
| مجموعة 2 | 12 | 8 | 5 | 6 |
| مجموعة 3 | 6 | 9 | 11 | 9 |
| مجموعة 4 | 7 | 13 | 8 | 6 |

**الحل:**

تحديد أصغر قيمة في كل صف وطرحها من بقية القيم الصف:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 7 | 9 | 10 |
| 12 | 8 | 5 | 6 |
| 6 | 9 | 11 | 9 |
| 7 | 13 | 8 | 6 |

وتصبح المصفوفة كما يلي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 4 | 5 |
| 7 | 3 | 0 | 1 |
| 0 | 3 | 5 | 3 |
| 1 | 7 | 2 | 0 |

تحديد أصغر قيمة في كل عمود وطرحها من بقية القيم العمود:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 4 | 5 |
| 7 | 3 | 0 | 1 |
| 0 | 3 | 5 | 3 |
| 1 | 7 | 2 | 0 |

وتصبح المصفوفة كما يلي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 4 | 5 |
| 7 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 5 | 3 |
| 1 | 5 | 2 | 0 |

الآن نجد أن هناك على الأقل صفر واحد في كل صف وكل عمود وعليه الشرط الأول محقق، يمكن اختبار الحل بتغطية هذه الأصفار بمستقيمات، هنا يمكن تغطية الاصفار جميعها بأربعة مستقيمات مبتدئين أولا بالصف الأول (صفرين) ثم العمود الأول ( صفرين) ثم الصف الثاني والصف الرابع كما في الآتي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 4 | 5 |
| 7 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 5 | 3 |
| 1 | 5 | 2 | 0 |

إذن تحقق الشرط الثاني عدد المستقيمات تساوي عدد الأعمدة أو الصفوف أي تحقق الحل الأمثل ومنه يمكن الآن إجراء عملية التخصيص وكالآتي:

| مجموعة العمل | أمر | | | | أمر العمل | زمن الانجاز |
|---|---|---|---|---|---|---|
| مجموعة 1 | ~~A~~ | B | | | B | 7 |
| مجموعة 2 | | | C | | C | 5 |
| مجموعة 3 | A | | | | A | 6 |
| مجموعة 4 | | | | D | D | 6 |
| مجموع التكاليف | | | | | | 24 ساعة |

إن أجراء عملية التخصيص ونبدأ بالصف أو العمود الذي فيه صفر واحد لذا نضع مربع على الموجود في الصف الثاني وهذا يعني تخصيص أمر العمل (C) إلى مجموعة العمل الثانية، وبما أنه لا يوجد صفر أخر في العمود (C) فإننا ننتقل إلى الصف الثالث ونضع مربع على الصفر الوحيد فيه ولكن هنا يجب أن نشطب الصفر الموجود في نفس العمود ( بالصف الأول) دلالة على أنه لا يمكن تخصيص أمر العمل (A) إلى المجموعة الأولى لأنها قد خصصت للمجموعة الثالثة، ثم ننتقل إلى الصف الرابع ونضع مربع على الصفر الوحيد فيه أي تخصيص أمر العمل (D) إلى المجموعة الرابعة وكذا الأمر مع الصفر الباقي في الصف الأول أي أنه سوف يخصص أمر العمل (B) للمجموعة الأولى ، وإن الوقت الكلي اللازم لانجاز العمل سيكون 24 ساعة.

**ثانيا: تحقيق أقصى عائد**

لا تختلف خطوات الحل عندما يكون الهدف تحقيق أقصى عائد (إيراد)عن خطوات الحل حينما يكون الهدف تقليل التكاليف، إلا عند البدء بالحل، حيث يتم بموجب هذه الهدف طرح كل القيم ( العوائد) في مصفوفة العوائد من أكبر قيمة في المصفوفة كلها فنحصل على مصفوفة تكاليف ومن ثم يتم إتباع نفس الخطوات السابقة التي تم تطبيقها في حالة التكاليف وصولاً إلى الحل الأمثل.[1]

**مثال رقم (04):** مؤسسة تجارية ترغب في تعيين عدد من العمال لإنجاز عدد من الوظائف، فإذا كان عدد العمال أربعة وكانت الأرباح الناتجة عن قيام العمال بالوظائف هي كالتالي:

| الوظائف / العمال | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| A | 6 | 15 | 4 | 5 |
| B | 9 | 7 | 6 | 1 |
| C | 5 | 11 | 1 | 7 |
| D | 14 | 18 | 9 | 10 |

**المطلوب:** إيجاد الحل بطريقة الحل المباشر لمسألة الأرباح.

**الحل:** لأن المسألة تعظيم الأرباح، لذا يتم طرح جميع الأرقام من أعلى رقم في الجدول وهو (18) لتصبح مسألة التكاليف وإتباع الخطوات السابقة في حالة التدنئة:

[1]. فتحي خليل حمدان ، رشيق رفيق مرعي ، مرجع سابق، ص 168.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | 3 | 14 | 13 |
| 9 | 11 | 12 | 17 |
| 13 | 7 | 17 | 11 |
| 4 | 0 | 9 | 8 |

طرح أقل قيمة في كل صف لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم الصف:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | 3 | 14 | 13 |
| 9 | 11 | 12 | 17 |
| 13 | 7 | 17 | 11 |
| 4 | 0 | 9 | 8 |

وتصبح المصفوفة كما يلي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 0 | 11 | 10 |
| 0 | 2 | 3 | 8 |
| 6 | 0 | 10 | 4 |
| 4 | 0 | 9 | 8 |

طرح أصغر قيمة في كل عمود لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم العمود:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 0 | 11 | 10 |
| 0 | 2 | 3 | 8 |
| 6 | 0 | 10 | 4 |
| 4 | 0 | 9 | 8 |

وتصبح المصفوفة كما يلي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 0 | 8 | 6 |
| 0 | 2 | 0 | 4 |
| 6 | 0 | 7 | 0 |
| 4 | 0 | 6 | 4 |

نغطي كل صف و كل عمود يحتوي على صفر بأقل عدد من المستقيمات:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 0 | 8 | 6 |
| 0 | 2 | 0 | 4 |
| 6 | 0 | 7 | 0 |
| 4 | 0 | 6 | 4 |

بما أن عدد المستقيمات المسحوبة أقل من عدد صفوف أو أعمدة المصفوفة، لذا الشرط الثاني غير محقق لذلك لا بد من تطوير الحل، وذلك باختيار أقل قيمة من القيم غير مغطاة وهي (4) وطرحها من باقي القيم الغير مغطاة ونظيف هذه القيمة إلى نقطة التقاطع المستقيمات، وتصبح المصفوفة كالآتي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 0 | 4 | 2 |
| 0 | 6 | 0 | 4 |
| 6 | 4 | 7 | 0 |
| 0 | 0 | 2 | 0 |

وهنا عدد المستقيمات المسحوبة على الأسطر والأعمدة تساوي أربعة ومنه الشرط الثاني محقق وعليه الجدول أعلاه جدول حل أمثل ومنه يمكن قيام بسياسة التخصيص كالآتي:

| الربح | الوظيفة | الوضائف | | | | العمال |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 2 | | | 2 | | A |
| 6 | 3 | | 3 | | ~~1~~ | B |
| 7 | 4 | 4 | | | | C |
| 14 | 1 | ~~4~~ | | ~~2~~ | 1 | D |
| 42 | | | | | | مجموع الأرباح |

## III- حالات خاصة في مشاكل التخصيص:

هناك عدد من الحالات الخاصة في مشاكل التخصيص وهي:

### III-1- عدم تساوي الصفوف والأعمدة:

لا يتحققا أحيانا شرط أساسي من شروط التخصيص وهو ضروري تساوي الصفوف والأعمدة، لذلك يتم اللجوء في هذه الحالة إلى إضافة صف أو عمود وهمي إلى جهة النقص بقيمة الصفر سواء أكان الهدف تخفيض أدنى كلفة أو أقصى عائد.

**مثال رقم (05):** تنوي شركة مقاولات إنشاء أربعة مشاريع إسكانية في أربعة مناطق مختلفة، فإذا كان لدى الشركة ثلاث وسائل لحفر وتسوية هذه الأرضي، فإذا كان تقدير الشركة لتكاليف إنجاز هذه المهام بالآلاف الدنانير هي كما في الجدول التالي:

| المدينة 4 | المدينة 3 | المدينة 2 | المدينة 1 | المشاريع / الوسائل |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 8 | 12 | 9 | A |
| 9 | 18 | 5 | 16 | B |
| 20 | 9 | 4 | 7 | C |

**المطلوب:** إيجاد أفضل تخصيص يحقق أقل تكاليف بطريقة الهنكارية

**الحل:** نلاحظ في هذا المثال بأن عدد الوسائل أقل من المهام وهذا يعني ضرورة استحداث صف وهمي لموازنة مشكلة التخصيص كما يلي:

| المدينة 4 | المدينة 3 | المدينة 2 | المدينة 1 | المشاريع / الوسائل |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 8 | 12 | 9 | A |
| 9 | 18 | 5 | 16 | B |
| 20 | 9 | 4 | 7 | C |
| 0 | 0 | 0 | 0 | D وهمي |

طرح أقل قيمة في كل صف لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم الصف:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 12 | 8 | 11 |
| 16 | 5 | 18 | 9 |
| 7 | 4 | 9 | 20 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

وتصبح المصفوفة كما يلي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 0 | 3 |
| 11 | 0 | 13 | 4 |
| 3 | 0 | 5 | 16 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

لا يتم طرح أقل قيمة في كل عمود لأنها تساوي صفر، إختبار مثالية الحل بتغطية جميع الأصفار بأقل عدد من الخطوط المستقيمة.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 0 | 3 |
| 11 | 0 | 13 | 4 |
| 3 | 0 | 5 | 16 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

بما أن عدد المستقيمات المسحوبة أقل من عدد صفوف أو أعمدة المصفوفة، لذا الشرط الثاني غير محقق لذلك لا بد من تطوير الحل، وذلك باختيار أقل قيمة من القيم غير مغطاة وهي (3) وطرحها من باقي القيم الغير مغطاة ونظيف هذه القيمة إلى نقطة التقاطع المستقيمات، وتصبح المصفوفة كالآتي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 0 | 3 |
| 8 | 0 | 10 | 1 |
| 0 | 0 | 2 | 13 |
| 0 | 3 | 0 | 0 |

وهنا عدد المستقيمات المسحوبة على الأسطر والأعمدة تساوي أربعة ومنه الشرط الثاني محقق وعليه الجدول أعلاه جدول حل أمثل ومنه يمكن قيام بسياسة التخصيص كالآتي:

| ***الكلفة*** | ***الوظيفة*** | ***المشاريع*** | | | | **الوسائل** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | **م3** | | م3 | | | **A** |
| 5 | **م2** | | | م2 | | **B** |
| 7 | **م1** | | | ~~م2~~ | م1 | **C** |
| 0 | **م4** | م4 | ~~م3~~ | | ~~م1~~ | **D وهمي** |
| 20 | | | | | | **مجموع التكاليف** |

### III-2- تعدد الحلول المثلى:

قد تكون هناك بعض المشاكل التي ينجم عن حلها وجد أكثر من حل أمثل واحد أي أكثر من حل بديل له نفس الكلفة الكلية وهذا يعني مرونة عالية لدى متخذ القرار للإختيار والمناورة بالموارد المتاحة، وتحصل هذه الحالة عندما يكون بالإمكان تأشير أكثر من قيمة صفرية في نفس الوقت أو بعبارة أخرى تخصيص أكثر من وسيلة لمهمة واحدة .

**مثال رقم (06):** حل مشكلة التخصيص التالية بحيث تكون الكلفة الكلية أقل ما يمكن ( التكاليف بالآلف الوحدات النقدية) بطريقة الهنكارية .

| *الوسائل* \ *المهمات* | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 10 | 15 | 16 | 18 |
| **B** | 14 | 13 | 16 | 10 |
| **C** | 11 | 9 | 8 | 18 |
| **D** | 13 | 13 | 11 | 9 |

**المطلوب:** إيجاد أفضل تخصيص يحقق أقل تكاليف بطريقة الهنكارية

طرح أقل قيمة في كل صف لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم الصف:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10 | 15 | 16 | 18 |
| 14 | 13 | 16 | 10 |
| 11 | 9 | 8 | 18 |
| 13 | 13 | 11 | 9 |

وتصبح المصفوفة كما يلي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 6 | 8 |
| 4 | 3 | 6 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | 10 |
| 4 | 4 | 2 | 0 |

طرح أصغر قيمة في كل عمود لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم العمود:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 6 | 8 |
| 4 | 3 | 6 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | 10 |
| 4 | 4 | 2 | 0 |

وتصبح المصفوفة كما يلي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 6 | 8 |
| 4 | 2 | 6 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 10 |
| 4 | 3 | 2 | 0 |

نغطي كل صف و كل عمود يحتوي على صفر بأقل عدد من المستقيمات:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 6 | 8 |
| 4 | 2 | 6 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 10 |
| 4 | 3 | 2 | 0 |

بما أن عدد المستقيمات المسحوبة أقل من عدد صفوف أو أعمدة المصفوفة، لذا الشرط الثاني غير محقق لذلك لا بد من تطوير الحل، وذلك باختيار أقل قيمة من القيم غير مغطاة وهي (2) وطرحها من باقي القيم الغير مغطاة ونظيف هذه القيمة إلى نقطة لتقاطع المستقيمات، وتصبح المصفوفة كالآتي:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 4 | 6 | 10 | 4 |
| 1 | 2 | 0 | 4 | 0 | |
| | 3 | 0 | 0 | 12 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | |

وهنا عدد المستقيمات المسحوبة على الأسطر والأعمدة تساوي أربعة ومنه الشرط الثاني محقق وعليه الجدول أعلاه جدول حل أمثل ومنه يمكن القيام بسياسة التخصيص كالآتي:

| الوسائل | *المهام* | | | | *الحل الأمثل الأول* | *الكلفة* | *الحل الأمثل البديل* | *الكلفة* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | 1 | | | | **1** | 10 | **1** | 10 |
| **B** | | 2 | | 4 | **2** | 13 | **4** | 10 |
| **C** | | 2 | 3 | | **3** | 8 | **2** | 9 |
| **D** | | | 3 | 4 | **4** | 9 | **3** | 11 |
| **مجموع التكاليف** | | | | | | 40 | | 40 |

يتم اختيار أحد البدائل الاثنين ، إذا أن مجموع التكاليف للبدلين متساوي وهو **(40)**.

## IV- طرق أخرى لحل مشكلة التخصيص:

هناك طريقتان لحل مشاكل التخصيص وهما:

### IV-1- طريقة النقل:

في هذه الطريقة تعامل مشكلة التخصيص على أنها مشكلة نقل، وتعتبر قيم العرض والطلب جميعها مساوية إلى واحد، نجد الحل الابتدائي بأحد الطرق الثلاث المعروضة في الفصل السابق ثم نجد الحل الأمثل[1].

**مثال رقم (07):** في جدول التخصيص الآتي استخدم طريقة النقل في إيجاد اقل التكاليف.

| *الآلات* / *العمال* | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| **A** | 9 | 13 | 7 |
| **B** | 14 | 14 | 6 |
| **C** | 10 | 13 | 8 |

[1]. دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق، ص 189.

**الحل:** باستخدام أقل التكاليف وهي القريبة من الحل الأمثل نجد:

| الآلات / العمال | 1 | 2 | 3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 9 / 1 | 13 | 7 | 1 |
| **B** | 14 | 14 | 6 / 1 | 1 |
| **C** | 10 | 13 / **1** | 8 | 1 |
| الطلب | **1** | **1** | **1** | **3 /3** |

ومنه أفضل تخصيص هو (A ) في الآلة: 1 و(B ) في الآلة: 3 و(C ) في الآلة: 2 ، والكلفة الإجمالية هي $28 = 1(9)+1(6)+1(13)$

**IV-2- طريقة البرمجة الخطية:**

لتوضح مشكلة التخصيص على وفق أسلوب البرمجة الخطية نعتمد التالي:

**مثال رقم (08):** الوقت الذي يحتاجه المهندس في صيانة محطة عمل

| *المحطة* / *المهندس* | 1 | 2 | 3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 8 | 10 | 7 | 1 |
| **B** | 3 | 8 | 5 | 1 |
| **C** | 10 | 12 | 11 | 1 |
| الطلب | 1 | 1 | 1 | 3/3 |

فإذا كانت $(X_{iJ})$ تمثل تخصيص المهندس (i) للمحطة (j) فإن نموذج البرمجة الخطية يكون بالشكل الآتي:

$$Min(z) = 8x_{11} + 10x_{12} + 7x_{13} + 3x_{21} + 8x_{22} + 5x_{23} + 10x_{31} + 12x_{32} + 11x_{33}$$

$s/c$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \end{cases}$$

$x_{ij} \geq 0$

ويمكن إيجاد الحل الأمثل لهذا النموذج بإستخدام طريقة السمبليكس.

**V- تمارين محلولة**

**التمرين الأول:** ترغب إدارة شركة لخدمات الصيانة في تخصيص أربعة عمال مدربين للعمل على أربعة ألآت معينة، وأن تكاليف اشتغال العمال على الآلات المذكورة هي كما يلي:

| الآلات / العمال | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| علاء | 5 | 7 | 9 | 6 |
| ماهر | 14 | 13 | 10 | 4 |
| محمد | 15 | 11 | 12 | 5 |
| أحمد | 10 | 17 | 9 | 11 |

**حل التمرين الأول:**

تحديد أصغر قيمة في كل صف وطرحها من بقية القيم الصف:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 7 | 9 | 6 |
| 14 | 13 | 10 | 4 |
| 15 | 11 | 12 | 5 |
| 10 | 17 | 9 | 11 |

وتصبح المصفوفة كما يلي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 4 | 1 |
| 10 | 9 | 6 | 0 |
| 10 | 6 | 7 | 0 |
| 1 | 8 | 0 | 2 |

تحديد أصغر قيمة في كل عمود وطرحها من بقية قيم العمود:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 4 | 1 |
| 10 | 9 | 6 | 0 |
| 10 | 6 | 7 | 0 |
| 1 | 8 | 0 | 2 |

وتصبح المصفوفة كما يلي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 4 | 1 |
| 10 | 7 | 6 | 0 |
| 10 | 4 | 7 | 0 |
| 1 | 6 | 0 | 2 |

الآن نجد أن هناك على الأقل صفر واحد في كل صف وكل عمود وعليه الشرط الأول محقق، يمكن اختبار الحل بتغطية هذه الأصفار بمستقيمات.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 4 | 1 |
| | 10 | 7 | 6 | 0 |
| | 10 | 4 | 7 | 0 |
| 3 | 1 | 6 | 0 | 2 |
| | | | | 2 |

بما أن عدد المستقيمات المسحوبة أقل من عدد صفوف أو أعمدة المصفوفة، لذا الشرط الثاني غير محقق لذلك لا بد من تطوير الحل، وذلك باختيار أقل قيمة من القيم غير مغطاة وهي (4) وطرحها من باقي القيم الغير مغطاة ونظيف هذه القيمة إلى نقطة التقاطع المستقيمات، وتصبح المصفوفة كالآتي:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 4 | 5 | 1 |
| | 6 | 3 | 2 | 0 | |
| | 6 | 0 | 3 | 0 | 2 |
| 4 | 1 | 6 | 0 | 6 | |
| | | | | 3 | |

إذن تحقق الشرط الثاني عدد المستقيمات تساوي عدد الأعمدة أو الصفوف أي تحقق الحل الأمثل ومنه يمكن الآن إجراء عملية التخصيص وكالآتي:

| التكلفة | الآلة | الآلات | | | | مجموعة العمل |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | A | | | ~~B~~ | A | علاء |
| 4 | D | D | | | | ماهر |
| 11 | B | ~~D~~ | | B | | محمد |
| 9 | C | | C | | | أحمد |
| 29 | | | | | | مجموع التكاليف |

**التمرين الثاني:** لدى أحد المؤسسات أربعة مدراء وثلاثة معامل ترغب في التوصل إلى التخصيص الأمثل للمدراء بحيث يحقق من ذلك أكبر عائد ممكن وطبق للبيانات التالية عند العائد المتحقق شهريا بالآلاف الدنانير من كل حالة:

| المعامل / المديرين | A | B | C |
|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 4 | 7 |
| **2** | 8 | 3 | 1 |
| **3** | 5 | 6 | 2 |
| **4** | 4 | 1 | 7 |

**المطلوب:** استخدم الطريقة الهنكارية لإيجاد أفضل تخصيص.

**حل التمرين الثاني:** نلاحظ أن عدد المعامل أقل من عدد المدراء، إذن نضيف معمل رابع وهمي لتحويل المصفوفة إلى مصفوفة مربعة (عوائد صفرية)، وذلك بطرح أكبر قيمة بها والبالغة (8) من باقي القيم.

| *المعامل* / *المديرين* | A | B | C | D وهمي |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 4 | 7 | 0 |
| **2** | 8 | 3 | 1 | 0 |
| **3** | 5 | 6 | 2 | 0 |
| **4** | 4 | 1 | 7 | 0 |

وبطرح كل القيم من اكبر قيمة موجودة في المصفوفة وهي (8) نحصل على مصفوفة التكاليف الآتية:

| *المعامل* / *المديرين* | A | B | C | D وهمي |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 7 | 4 | 1 | 8 |
| **2** | 0 | 5 | 7 | 8 |
| **3** | 3 | 2 | 6 | 8 |
| **4** | 4 | 7 | 1 | 8 |

طرح أقل قيمة في كل صف لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم الصف:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 4 | 1 | 8 |
| 0 | 5 | 7 | 8 |
| 3 | 2 | 6 | 8 |
| 4 | 7 | 1 | 8 |

وتصبح المصفوفة كما يلي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | 3 | 0 | 7 |
| 0 | 5 | 7 | 8 |
| 1 | 0 | 4 | 6 |
| 3 | 6 | 0 | 7 |

طرح أقل قيمة في كل عمود لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم العمود:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | 3 | 0 | 7 |
| 0 | 5 | 7 | 8 |
| 1 | 0 | 4 | 6 |
| 3 | 6 | 0 | 7 |

وتصبح المصفوفة كما يلي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | 3 | 0 | 1 |
| 0 | 5 | 7 | 2 |
| 1 | 0 | 4 | 0 |
| 3 | 6 | 0 | 1 |

اختبار مثالية الحل بتغطية جميع الأصفار بأقل عدد من الخطوط المستقيمة.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | 3 | 0 | 1 |
| 0 | 5 | 7 | 2 |
| 1 | 0 | 4 | 0 |
| 3 | 6 | 0 | 1 |

بما أن عدد المستقيمات المسحوبة أقل من عدد صفوف أو أعمدة المصفوفة، لذا الشرط الثاني غير محقق لذلك لا بد من تطوير الحل، وذلك باختيار أقل قيمة من القيم غير مغطاة وهي (1) وطرحها من باقي القيم الغير مغطاة ونظيف هذه القيمة إلى نقطة التقاطع المستقيمات، وتصبح المصفوفة كالآتي:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 2 | 0 | 0 | |
| | 0 | 5 | 8 | 2 | 4 |
| 2 | 1 | 0 | 5 | 0 | |
| | 2 | 5 | 0 | 0 | 1 |

وهنا عدد المستقيمات المسحوبة على الأسطر والأعمدة تساوي أربعة ومنه الشرط الثاني محقق وعليه الجدول أعلاه جدول حل أمثل ومنه يمكن قيام بسياسة التخصيص كالآتي:

| الوسائل | *المشاريع* | | | | *البديل1* | *العائد* | *البديل2* | *العائد* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | | | C | D | **C** | **7** | **D وهمي** | 0 |
| **2** | A | | | | **A** | **8** | **A** | 8 |
| **3** | | B | | D | **B** | **6** | **B** | 6 |
| **4** | | | C | D | **D وهمي** | **0** | **C** | 7 |
| **مجموع العوائد** | | | | | | 21 | | 21 |

تحقق المعامل الثلاثة اكبر عائد مقداره 21000 دينار وواضح أن كلا البديلين يحقق نفس العائد فيمكن الأخذ بأي منهما.

## VI- تمارين مقترحة:

**التمرين الأول:** يرأس مدير أحد الأقسام، ثلاثة موظفين، ورغب المدير في إنجاز هؤلاء الموظفين الثلاثة ثلاث مهام مختلفة. ويختلف الموظفون في درجة مهارتهم وكفاءتهم وتختلف المهام من حيث درجة صعوبتها، ويوضح الجدول الأتي، تقديرات الوقت الذي حددها المدير والخاصة إنجاز كل موظف لمهمة معينة :

| *المهام* / *الموظفون* | *A* | *B* | *C* |
|---|---|---|---|
| **عصام** | 8 | 26 | 17 |
| **وسام** | 13 | 28 | 4 |
| **قيس** | 38 | 19 | 18 |

**المطلوب:** تخصيص كل عامل للقيام مهمة معينة، بحيث يؤدي ذلك إلى تقليل الوقت اللازم لإنجاز تلك المهام .

**التمرين الثاني:** ترغب شركة الصناعات الإلكترونية في تعيين عدد من مندوبي البيع لإنجاز مهمة بيع عدد من السلع، فإذا كان عدد مندوبي البيع أربعة، وكانت تكاليف إنجاز هذه المهام (بعشرات الدنانير) كالأتي:

| *السلع* / *مندوبو البيع* | *ثلاجة* | *تلفزيون* | *مكيف* | *مجمدة* |
|---|---|---|---|---|
| **أسامة** | 1 | 4 | 6 | 3 |
| **أكرام** | 9 | 7 | 10 | 9 |
| **سلام** | 4 | 5 | 11 | 7 |
| **علي** | 8 | 7 | 8 | 5 |

***المطلوب*:** إيجاد أفضل تخصيص باستخدام طريقة الحل المباشر، بحيث تحقق الشركة أدنى كلفة ممكنة.

**التمرين الثالث:** فكرت شركة المقاولات الحديثة بإنجاز عدد من المشاريع الإنشائية، فإذا كان عدد المشاريع أربعة وعدد المقاولين المسؤولين عن إنجاز تلك المشاريع أربعة، وتمثل المصفوفة أدناه العوائد ( بآلاف الدنانير) لكل مقاول:

| *المشاريع المقاولون* | *A* | *B* | *C* | *D* |
|---|---|---|---|---|
| **خليل** | 18 | 10 | 6 | 2 |
| **ماهر** | 10 | 14 | 8 | 4 |
| **محمود** | 16 | 4 | 14 | 8 |
| **سامر** | 12 | 12 | 4 | 6 |

**المطلوب:** إيجاد أفضل سياسة تخصيص، بحيث تحقق الشركة أقصى العوائد.

الفصل السابع

# تحليل الحساسية
# (تحليل ما بعد الأمثلية)

كان الوصول إلى الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الذي تم تناوله في الفصول السابقة يتم تحت مجموعة من الفروض من بينها افتراض التأكد التام من المعلومات والعلاقات المختلفة المتعلقة بالمشكلة قيد الدراسة، ويعتبر تحليل الحساسية إحدى المزايا التي تفرزها البرمجة الخطية عند الوصول إلى الحل النهائي للمشكلة، فكثير من التغيرات قد يطرأ عليها تحول مفاجئ ممكن أن يخص موضوع الأسعار في السوق أو قد يطرأ جديد في ذهن متخذ القرار من توظيفه لقدرات بشرية جديدة أو اعتماد مسلك تكنولوجي جديد..الخ، مما يتطلب إعادة حل النموذج للمشكلة بعد إضافة التغيرات الجديدة.

إن إعادة حل النموذج يكون مرهقاً ويحتاج إلى وقت طويل، ولكن يمكن استخدام طريقة لا تتطلب إعادة الحل بكامله وذلك باستخدام ما يسمى تحليل الحساسية، وقد يسمى أيضا بتحليل ما بعد الأمثلية، ويمكن تعريف مفهوم تحليل الحساسية بأنه " عبارة عن دراسة تأثير التغيرات في مكونات المشكلة على نموذج البرمجة الخطية[1].

وإن هذه التغيرات التي يمكن أن تحدث على نموذج البرمجة الخطية يمكن حصرها في ما يلي:

- ✓ التغيرات في معاملات دالة الهدف؛
- ✓ التغيرات في الطرف الأيمن للقيود؛
- ✓ التغيرات في معاملات متغيرات القرار في القيود؛
- ✓ إضافة متغير أو متغيرات جديدة؛
- ✓ إضافة قيد جديد أو قيود جديدة.

إن هذه التغيرات تؤدي إلى واحد من الحالات الثلاث[2]:

- ✓ يبقى الحل الأمثل للمسألة كما هو دون أن يتأثر بالتغيرات الجديدة؛
- ✓ تبقى المتغيرات الأساسية هي نفسها ولكن ربما تتغير قيمتها نتيجة للتغيرات الإضافية (الجديدة)؛
- ✓ يتغير الحل الأساسي بأكمله من جراء التغيرات الجديدة.

[1]. دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق، ص 121.
[2]. سهيلة عبد الله سعيد، مرجع سابق، 131.

**I– التغيرات في معاملات دالة الهدف ومدى الأمثلية:**

**I-1- التغيرات في معاملات دالة الهدف:**

**مثال رقم (01):** لو فرضنا أن لدينا المشكلة الآتية:

$$Max(z) = 40x_1 + 30x_2 + 25x_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 100 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 360 \end{cases}$$
$$x_1; x_2; x_3 \geq 0$$

وكانت النتائج في جدول الحل الأخير(جدول الحل الأمثل) كالأتي ( يترك حل المشكلة كتمرين للطالب):

| | $C_J$ | 40 | 30 | 25 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | B |
| 25 | $X_3$ | 0 | 0,5 | 1 | 2,5 | 0 | -0,5 | 70 |
| 0 | $S_2$ | 0 | 0,5 | 0 | -0,5 | 1 | -0,5 | 10 |
| 40 | $X_1$ | 1 | 0,5 | 0 | -1,5 | 0 | 0,5 | 30 |
| $Z_J$ | | 40 | 32,5 | 25 | 2,5 | 0 | 7,5 | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 0 | -2,5 | 0 | -2,5 | 0 | -7,5 | Z=2950 |

والحل الأمثل للمشكلة هو الآتي:

$$X_1 = 30 \; ; X_3 = 70 \; ; S_2 = 10 \; ; S_2 = S_3 = 0 ; Z = 2950$$

لو نفرض أن قيمة $(X_1)$ في دالة الهدف ارتفعت من (40) إلى (42) فإنه يمكن إعادة حساب قيم جدول الحل الأمثل $(Z_J \; ; C_J–Z_J \; ; Z)$ وتكون النتيجة كما هو مبين في الجدول الآتي:

| | $C_J$ | 42 | 30 | 25 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | B |
| 25 | $X_3$ | 0 | 0,5 | 1 | 2,5 | 0 | -0,5 | 70 |
| 0 | $S_2$ | 0 | 0,5 | 0 | -0,5 | 1 | -0,5 | 10 |
| 42 | $X_1$ | 1 | 0,5 | 0 | -1,5 | 0 | 0,5 | 30 |
| $Z_J$ | | 42 | 33,5 | 25 | -0,5 | 0 | 8,5 | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 0 | -3,5 | 0 | 0,5 | 0 | -8,5 | Z=2800 |

نلاحظ أن احد قيم صف $\left(\Delta Z = C_J - Z_J\right)$ أكبر من صفر (0,5)، وهذا يعني بأن الحل بعد أمثل، وهذا يعني عدم بقاء المتغيرات الأساسية على حالها أي يجب تطوير الحل.

**I-2- مدى الأمثلية:**

يهدف مدى الأمثلية إلى تحديد الحد الأعلى و الحد الأدنى لمعاملات متغيرات القرار في دالة الهدف والتي ضمن حدودها يبقى الحل أمثل، ولتحديد مدى الأمثلية نتبع الخطوات التالية[1]:

- في جدول الحل الأمثل نستبدل معامل المتغير الذي نبحث له عن مدى الأمثلية بمعامل مجهول القيمة، ونرمز له بالرمز $(C_j ;j=1,2,\dots\dots,n)$ ؛
- نعيد حساب صف (Z) وصف (C−Z)؛
- من صف (C−Z) نختبر أمثلية الحل، حيث يجب أن تكون جميع قيم صف (C−Z) أقل من أو تساوي صفر $(C-Z \leq 0)$ في حالة كانت طبيعة دالة الهدف تعظيم، أو تكون جميع قيم صف (C−Z) أكبر من أو تساوي صفر $(C-Z \geq 0)$، في حال كانت طبيعة دالة الهدف تخفيض، وهذا يتطلب تكوين متراجحات جانبها الأيسر أية قيمة في صف (C−Z) تحتوي على $(C_j)$، وجانبها الأيمن صفر، وإشارتها حسب طبيعة دالة الهدف؛
- يتم حل المتراجحات التي تكونت في الخطوة السابقة، ومن نتيجة الحل نحدد حدود المعامل $(C_j)$.

**مثال رقم (02):** من المثال السابق حدد مدى الأمثلية للمعاملات $(X_1 ; X_2 ; X_3)$.

✓ **مدى الأمثلية لـ** $(X_1)$: نتبع نفس الخطوات نعيد حساب صف $\left(\Delta Z = C_J - Z_J\right)$، ونضع مكان المتغير $(X_1)$ بـ $C_1$ :

[1]. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود المكاوي، مرجع سابق، ص114.

| | $C_J$ | $C_1$ | 30 | 25 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **CB** | **XB** | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | **B** |
| 25 | $X_3$ | 0 | 0,5 | 1 | 2,5 | 0 | -0,5 | 70 |
| 0 | $S_2$ | 0 | 0,5 | 0 | −0,5 | 1 | -0,5 | 10 |
| $C_1$ | $X_1$ | 1 | 0,5 | 0 | −1,5 | 0 | 0,5 | 30 |
| $Z_J$ | | $C_1$ | $12,5+0,5C_1$ | 25 | $62,5-1,5C_1$ | 0 | $-12,5+0,5C_1$ | **Z= 1750** |
| $\Delta Z$ | | 0 | $17,5-0,5C_1$ | 0 | $-62,5+1,5C_1$ | 0 | $12,5-0,5C_1$ | **+30$C_1$** |

من صف( $\Delta Z$ ) نختبر أمثلية الحل ونقوم بتكوين متراجحات من قيمة ( $\Delta Z$ ) التي تحتوي على $C_1$:

$$17,5-0,5C_1 \leq 0 \ldots\ldots\ldots .(1) \Rightarrow C_1 \geq 35$$
$$-62,5+1,5C_1 \leq 0 \ldots\ldots\ldots .(2) \Rightarrow C_1 \leq 41,67$$
$$12,5-0,5C_1 \leq 0 \ldots\ldots\ldots .(3) \Rightarrow C_1 \geq 25$$

وبناء على هذه النتائج نستطيع تحديد مدى الأمثلية لمعامل ($X_1$):

$$25 \leq 35 \leq C_1 \leq 41,67$$

نستبعد الحد 25 فيصبح : $\mathbf{35 \leq X_1 \leq 41,67}$

وهنا يعني أن الحل يبقى أمثل مادامت معامل ($X_1$) بين( 41,67 ) و(35 ) ولإثبات ذلك لما فرضنا( $X_1$=42 ) وهي خارج المجال الذي توصلنا إليه وبالتالي جدول الحل غير أمثل.

✓ **مدى الأمثلية لـ** ($X_2$): نتبع نفس الخطوات نعيد حساب صف ( $\Delta Z$ )، ونضع مكان المتغير ($X_2$) بـ $C_2$ :

| | $C_J$ | 40 | $C_2$ | 25 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **CB** | **XB** | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | **B** |
| 25 | $X_3$ | 0 | 0,5 | 1 | 2,5 | 0 | -0,5 | 70 |
| 0 | $S_2$ | 0 | 0,5 | 0 | −0,5 | 1 | -0,5 | 10 |
| 40 | $X_1$ | 1 | 0,5 | 0 | −1,5 | 0 | 0,5 | 30 |
| $Z_J$ | | 40 | 32,5 | 25 | 2,5 | 0 | 7,5 | |
| $\Delta Z$ | | 0 | $C_2-32,5$ | 0 | −2,5 | 0 | −7,5 | **Z= 2950** |

من صف( $\Delta Z$ ) نجد:

$$C_2 - 32{,}5 \leq 0 \Rightarrow C_2 \leq 32{,}5$$

وبناء على هذه النتائج نستطيع تحديد مدى الأمثلية لمعامل ($X_2$):

**غير محدود $\leq X_2 \leq 32{,}5$**

**قاعدة عامة:** عندما يكون ($X_i$ ; i=1, …….n) متغير غير أساسي عند الحل الأمثل ( غير داخل في الحل)، يتم تحديد مدى الأمثلية لمعامله في دالة الهدف بموجب القاعدة التالية:

قيمة (Z) المقابلة له $\leq C_i \leq$ غير محدود

✓ **مدى الأمثلية لـ** ($X_3$): نتبع نفس الخطوات نجد:

$$24 \leq X_3 \leq 40$$

**II– التغيرات في الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة) ومدى الإمكانية:**

**II-1- سعر الظل:** سعر الظل هو عبارة عن مقدار الزيادة أو النقص في قيمة دالة الهدف (Z) الناتج عن زيادة أو نقص الموارد المتاحة، أيضاً هو عبارة عن الربح الإجمالي الناجم عن إضافة وحدة واحدة جديدة من الموارد النادرة[1].

يمكن الحصول على المعلومات المتعلقة بأسعار الظل من قيم صف (z)، فإن سعر الظل المورد الأول هو ( 2,5) المقابل لـ ($S_1$)، وسعر الظل المورد الثاني هو (0) المقابل لـ ($S_2$)، وسعر الظل الثالث هو (7,5)، وهذه النتائج تعني أن زيادة وحدة واحدة من أي مورد ستؤدي إلى زيادة قيمة دالة الهدف بمقدار سعر الظل وستؤثر هذه الزيادة على نتيجة الحل الأساسي (عمود الطرف الأيمن) في جدول الحل الأمثل حيث يمكن إيجاد قيم عمود الطرف الأيمن الجديد (B) باستخدام العلاقة التالية:

**الكميات الجديدة = القيم الأصلية + مقدار التغير في كمية المورد (i) X القيم المقابلة في عمود $S_i$ الممثل للمورد (i).**

**مثال رقم (03):** بالعودة للمثال الأول:

- نفرض على سبيل المثال زيادة ($b_1$) بوحدة واحدة، ستؤدي إلى زيادة الربح (2,5) دينار وتصبح قيمة دالة الهدف (Z=2952,5) حيث يمكن إيجاد قيم عمود الطرف الأيمن الجديد باستخدام العلاقة السابقة:

[1] جهاد صياح بني هاني، نازم محمود المكاوي، مرجع سابق، ص120.

$$NewB = \begin{pmatrix} 70 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix} + (1)\begin{pmatrix} 2,5 \\ -0,5 \\ -1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72,5 \\ 9,5 \\ 28,5 \end{pmatrix}$$

ويمكن حساب قيمة (Z) الجديدة على النحو التالي:

$$Z = 25(72,5) + 0(9,5) + 40(28,5) = 2952,5$$

- نفرض أن ساعات العمل ($b_3$) قد ازدادت بمقدار (10) ساعات من 360 ساعة إلى 370 ساعة عمل كيف تؤثر على قيمة (Z) التي تمثل الأرباح.

إيجاد قيم عمود الطرف الأيمن الجديد بإستحدام العلاقة السابقة:

$$NewB = \begin{pmatrix} 70 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix} + (10)\begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 5 \\ 35 \end{pmatrix}$$

وبناء على القيم الجديدة للطرف الأيمن يتم إعادة حساب (Z) الجديدة:

$$Z = 25(65) + 0(5) + 40(35) = 3025$$

سعر الظل لـ ($b_3$) هو (7,5) أي تزداد (Z) بـ (10X7,5=75) أي:

$$Z = 2950 + 75 = 3025$$

**II-2- مدى الإمكانية:**

يهدف مدى الإمكانية إلى تحديد الحد الأعلى والحد الأدنى لقيم الطرف الأيمن لقيود نموذج البرمجة الخطية (الموارد المتاحة) ولتحديد مدى الإمكانية نتبع الخطوات التالية:

- من جدول الحل الأمثل نجد مدى التغير في الطرف الأيمن للقيد (i)، ($\Delta b_i ; i = 1,2 ......... m$) وهو عبارة عن حاصل قسمة قيم عمود الطرف الأيمن على القيم المقابلة لها في عمود متغير الفجوة التابع للقيد الذي نبحث في إيجاد مدى الإمكانية لطرفه الأيمن؛
- نحدد طرفي مدى الإمكانية ( الحد الأعلى والأدنى) باستخدام الصيغة التالية:

**مدى الإمكانية = الكمية الأصلية للطرف الأيمن للقيد (i) – مدى القيد**

**مثال رقم (4):** وبتطبيق الخطوات السابقة على المثال الأول نحصل على الآتي:

**أولا: مدى الإمكانية** للكمية التي تمثل الطرف الأيمن للقيد الأول و التي سنرمز لها بالرمز **($b_1$)**:

أ. نجد مدى التغير ( $\Delta b_1$ ) على النحو الآتي:

$$\Delta_1 b_1 = \frac{70}{2,5} = 28$$

$$\Delta_2 b_1 = \frac{10}{-0,5} = -20$$

$$\Delta_3 b_1 = \frac{30}{-1,5} = -20$$

ب. نجد المدى: إن الكمية الأصيلة الطرف الأيمن في القيد الأول هي 100 وحدة، لذلك فإن المدى:

$$R_1 = 100 - (28) = 72$$

$$R_2 == 100 - (-20) = 120$$

$$R_3 = 100 - (-20) = 120$$

وبناء على النتائج السابقة فإن مدى الإمكانية للقيد الأول هي:

$$\mathbf{72 \le b_1 \le 120}$$

**ثانيا: مدى الإمكانية لـ ($b_3$)** التي تمثل القيد الثالث: التي تمثل القيد الثالث بنفس الطريقة السابقة نحصل على:

$$\mathbf{300 \le b_3 \le 380}$$

**ثالثا: مدى الإمكانية لـ ($b_2$):**

إذا كان متغير الفجوة التابع للأحد القيود ضمن مزيج الحل الأساسي ( داخل في الحل) في جدول الحل الأمثل، فإن هذا يشير إلى وجود كمية إضافية من هذا المورد ويعني ذلك أن الحد الأعلى لمدى الإمكانية الخاص بهذا المورد (غير محدد) والحد الأدنى يساوي الكمية الأصلية للمورد مطروحاً منه قيمة المتغير الفجوة التابع للقيد في الجدول الأمثل.

فمثلا: نلاحظ أن متغير الفجوة التابع للمورد الثاني($S_2$) هو متغير أساسي وقيمته (10)، فإن الحد الأعلى لمدى إمكانية ($b_2$) مفتوح وحده الأدنى يساوي الكمية الأصلية (240−10=230) ومنه مدى الإمكانية:

$$\mathbf{230 \le b_2 \le} \text{ غير محدد}$$

**ملاحظة:**

- في حالة إشارة القيد يساوي أو أكبر من أو يساوي فإن المدى التغير له هو عبارة عن حاصل قسمة عمود الطرف الأيمن على القيم المقابلة لها في عمود المتغير الإصطناعي التابع له؛
- في حالة وجود أكثر من حد أعلى نأخذ القيمة الأصغر، وفي حالة وجود أكثر من حد أدنى نأخذ القيمة الأكبر.

**III– التغيرات في معاملات متغيرات القرار في القيود:**

إن التغير قد يشمل معاملات متغيرات القرار فإذا حدث أي تغير في معاملات هذه المتغيرات فإن ذلك سوف يؤدي إلى تغير عناصر المصفوفة، وعليه فإنه سوف يكون من الصعب معرفة اثر هذه التغيرات مباشرة على الحل الأمثل، وسوف لن تزودنا بأي معلومات عن اثر هذا التغير، وعليه يصعب دراسة هذا النوع من التغيرات في معاملات متغيرات القرار وفي مثل هذه الحالة يفضل إعادة حل النموذج الرياضي مجدداً بعد إدخال التغيرات ( لا يمكن دراسة اثر تحليل الحساسية)[1].

**IV– إضافة متغير أو متغيرات جديدة:**

إن إضافة متغير جديد يؤثر على أمثلية المسألة حيث أن إضافة هذا المتغير سيضيف معاملات جديدة إلى دالة الهدف وقيود المسألة. فإن هذا المتغير الجديد المضاف قد يصبح متغيراً أساسيا إذا دخل الحل ويكون له دور في تحسين الحل (قيمة دالة الهدف)، أما إذا لم تكن له القدرة على تحسين قيمة دالة الهدف فإنه سيكون متغيراً غير أساسي وتكون قيمته صفر[2].

**القيم الجديدة لعمود المتغير الجديد في جدول الحل الأمثل = مصفوفة متغيرات الفجوة في الحل الأمثلx عمود القيم الأساسية للمتغير الجديد**

وبناء على هذا يتم إعادة حساب قيم صف (Z) و ( $\Delta Z$ ) واختبار مدى أمثلية الحل حسب طبيعة دالة الهدف.

**مثال رقم (05):** بالعودة للمثال السابق نفرض إضافة متغير جديد ($X_4$) وبربح مقداره 20 دينار وبمعاملات في القيود الثلاثة (1; 2; 4) على التوالي، فإن عملية حساب قيم عمود ($X_4$) تتم كما يلي:

[1]. محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، أحمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص128.

[2]. سهيلة عبد الله سعيد، مرجع سابق، ص 144.

$$\begin{pmatrix} 2,5 & 0 & -0,5 \\ -0,5 & 1 & -0,5 \\ -1,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

نضع النتائج في جدول الحل الأمثل يصبح كما يلي :

| | $C_J$ | 40 | 30 | 25 | 20 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | B |
| 25 | $X_3$ | 0 | 0,5 | 1 | 0,5 | 2,5 | 0 | −0,5 | 70 |
| 0 | $S_2$ | 0 | 0,5 | 0 | −0,5 | −0,5 | 1 | −0,5 | 10 |
| 40 | $X_1$ | 1 | 0,5 | 0 | 0,5 | −1,5 | 0 | 0,5 | 30 |
| $Z_J$ | | 40 | 32,5 | 25 | 32,5 | 2,5 | 0 | 7,5 | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 0 | −2,5 | 0 | −12,5 | −2,5 | 0 | −7,5 | Z=2950 |

من خلال الجدول نلاحظ أن كل ( $\Delta Z \leq 0$ ) وهذا يعني أن الحل الأمثل ومزيج الحل الأساسي وقيمة الربح لم يتغيرا، تشير هذه النتيجة إلى أن إضافة منتج جديد لم تؤثر في الربح، حيث بقيت قيمة الربح كما هي 2950 دينار ولكن هذه الحالة ليست دائمة.

**V- إضافة قيد أو قيود جديدة:**

إن إضافة قيد جديد لمشكلة البرمجة الخطية سيؤثر على مزيج الحل الأساسي، وعلى قيمة دالة الهدف، لتوضيح ذلك نستعين بالمثال التالي:

**مثال رقم (06):** من المثال الأول نضيف قيد جديد كما يلي:

$$3X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 300$$

وترغب المؤسسة في معرفة تأثير إدخال القيد الجديد على الحل الأمثل، ولمعرفة تأثير دخول القيد الجديد على الحل الأمثل نتبع الخطوات التالية:

1. نحول القيد الجديد إلى الصيغة النموذجية:

$$3X_1 + 2X_2 + 2X_3 + S_4 = 300$$

2. إن متغير الفجوة ($S_4$) يكون عند الحل الأولي متغير أساسي داخل في الحل وتكون قيم صفه المقابلة للمتغيرات الأخرى هي على النحو الأتي:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 300 \end{pmatrix}$$

3. يبين الجدول الحل الأمثل أن ($X_1$) و ($X_3$) دخل الحل، لذلك نطبق على صف متغير الفجوة ($S_4$) القاعدة بكيفية إيجاد قيم صف المتغيرات الأخرى عند دخول أحدها في الحل فنقوم بإيجاد تأثير دخول المتغيرتين ($X_1$) و ($X_3$) على صف ($S_4$) الجديد معتمدين على نتائج الحل النهائي قبل إضافة القيد وعلى النحو الآتي:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 300 \end{pmatrix} - \left[ 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 1 \\ 2,5 \\ 0 \\ -0,5 \\ 0 \\ 70 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0 \\ -1,5 \\ 0 \\ 0,5 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \\ 0 \\ -0,5 \\ 0 \\ -0,5 \\ 1 \\ 70 \end{pmatrix}$$

وبناء على هذه النتائج يكون جدول الحل الأمثل على النحو الآتي:

| | $C_J$ | 40 | 30 | 25 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | B |
| 25 | $X_3$ | 0 | 0,5 | 1 | 2,5 | 0 | −0,5 | 0 | 70 |
| 0 | $S_2$ | 0 | 0,5 | 0 | −0,5 | 1 | −0,5 | 0 | 10 |
| 40 | $X_1$ | 1 | 0,5 | 0 | −1,5 | 0 | 0,5 | 0 | 30 |
| 0 | $S_4$ | 0 | −0,5 | 0 | −0,5 | 0 | −0,5 | 1 | 70 |
| $Z_J$ | | 40 | 32,5 | 25 | 2,5 | 0 | 7,5 | 0 | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 0 | −2,5 | 0 | −2,5 | 0 | −7,5 | 0 | Z=2950 |

من خلال الجدول نلاحظ أن كل ( $\Delta Z \leq 0$ ) وهذا يعني أن الحل الأمثل لكن مزيج الحل الأساسي قد تغير بإضافة المتغير الفجوة ($S_4$) إلى الحل ولكن قيمة الربح لم تتغير، ولكن هذه الحالة ليست دائما.

**ملاحظة:**

**1.** إذا كانت في عمود الثوابت (B) قيمة سالبة مثلا (70−) بدلا من (70)، مما يجعل الحل غير ممكن، يتطلب ذلك تطبيق طريقة المبسطة للنموذج المقابل (Dual) لتخلص من قيمته السالبة؛

**2.** يمكن تأكد من القيد هل هو قيداً فائضاً ( لا يؤثر على الحل) أو قيد لا يتحقق.

فمثلا بالعودة للقيد المضاف السابق:

$$3X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 300$$

بتعويض قيم $(X_1 ;X_2 ;X_3)$ نحصل على :

$$3(30) + 2(0) + 2(70) = 230 \prec 300$$

نجد أن القيد يتحقق، وعليه يمكن اعتبار هذا القيد قيداً فائضا لا تأثير له على الحل.

## VI– تمارين محلولة

**التمرين الأول** : لتكن لدينا المشكلة الآتية:

$$Max(z) = 20x_1 + 25x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 3x_1 + x_2 \leq 30 \end{cases}$$
$$x_1 ; x_2 \geq 0$$

جدول الحل الأمثل البرنامج المقابل هو:

| | $C_J$ | 20 | 25 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **CB** | **XB** | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | **B** |
| 0 | $S_1$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{-7}{5}$ | $\frac{-1}{5}$ | 6 |
| 25 | $X_2$ | 0 | 1 | 0 | $\frac{3}{5}$ | $\frac{-1}{5}$ | 6 |
| 20 | $X_1$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{-1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | 8 |
| $Z_J$ | | 20 | 25 | 0 | 11 | 3 | |
| $\Delta Z$ | | 0 | 0 | 0 | -11 | -3 | **Z=310** |

**المطلوب:**

1. نفرض أن دالة الهدف للمشكلة قد تغيرت إلى:

$$Max(z) = 20x_1 + 45x_2$$

استخرج جدول الحل الأمثل لهذه المشكلة حدد مدى الأمثلية لمعامل $X_1$ و $X_2$ ؛

2. نفرض أن الجانب الأيمن للمشكلة قد تغير إلى 40 ، 23 ، 30 على التوالي ؛ أوجد القيم الجديدة للطرف الأيمن وإعادة احتساب قيمة Z ؛

3. أوجد مدى الإمكانية لكل من $b_1$ , $b_2$ , $b_3$ ؛

**حل التمرين الأول:**

1. نلاحظ أن قيمة $(X_2)$ في دالة الهدف ارتفعت من (25) إلى (45) فإنه يمكن إعادة حساب قيم جدول الحل الأمثل $(Z ; C_J-Z_J ; Z_J)$ وتكون النتيجة كما هو مبين في الجدول الآتي:

| | $C_J$ | 20 | 45 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **CB** | **XB** | **$X_1$** | **$X_2$** | **$S_1$** | **$S_2$** | **$S_3$** | **B** |
| 0 | $S_1$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{-7}{5}$ | $\frac{-1}{5}$ | 6 |
| 45 | $X_2$ | 0 | 1 | 0 | $\frac{3}{5}$ | $\frac{-1}{5}$ | 6 |
| 20 | $X_1$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{-1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | 8 |
| $Z_J$ | | 20 | 45 | 0 | 23 | -1 | |
| $\Delta Z$ | | 0 | 0 | 0 | -23 | 1 | **Z=430** |

نلاحظ أن احد قيم صف $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ أكبر من صفر (1)، وهذا يعني بأن الحل لا يمثل الحل الأمثل، وهذا يعني عدم بقاء المتغيرات الأساسية على حالها أي يجب تطوير الحل، المتغيرة الداخلة هي $(S_3)$ والخارجة هي $(X_1)$ والجدول الجديد هو على الشكل الأتي:

| | $C_J$ | 20 | 45 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **CB** | **XB** | **$X_1$** | **$X_2$** | **$S_1$** | **$S_2$** | **$S_3$** | **B** |
| 0 | $S_1$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | $\frac{-3}{2}$ | 1 | 10 |
| 45 | $X_2$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 10 |
| 0 | $S_3$ | $\frac{5}{2}$ | 0 | 0 | $\frac{-1}{2}$ | 0 | 20 |
| $Z_J$ | | $\frac{45}{2}$ | 45 | 0 | $\frac{45}{2}$ | 0 | **Z=450** |
| $\Delta Z$ | | $\frac{-5}{2}$ | 0 | 0 | $\frac{-45}{2}$ | 0 | |

ومن الجدول أعلاه هو جدول حل أمثل لأن $(\Delta Z \leq 0)$ بعد تغير معامل $(X_2)$ في دالة الهدف .

✓ **مدى الأمثلية لـ** $(X_1)$: نتبع نفس الخطوات نعيد حساب صف $(\Delta Z = C_J - Z_J)$، ونضع مكان المتغير $(X_1)$ بـ $C_1$ :

| | $C_J$ | $C_1$ | 25 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | B |
| 0 | $S_1$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{-7}{5}$ | $\frac{-1}{5}$ | 6 |
| 25 | $X_2$ | 0 | 1 | 0 | $\frac{3}{5}$ | $\frac{-1}{5}$ | 6 |
| $C_1$ | $X_1$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{-1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | 8 |
| $Z_J$ | | $C_1$ | 25 | 0 | $15-\frac{C_1}{5}$ | $\frac{2C_1}{5}-5$ | $Z=150+8C_1$ |
| $\Delta Z$ | | 0 | 0 | 0 | $\frac{C_1}{5}-15$ | $5-\frac{2C_1}{5}$ | |

من صف( $\Delta Z$ ) نختبر أمثلية الحل ونقوم بتكوين متراجحات من قيمة ( $\Delta Z$ ) التي تحتوي على $C_1$:

$$\frac{C_1}{5}-15 \le 0 .........(1) \Rightarrow C_1 \le 75$$

$$5-\frac{2C_1}{5} \le 0 .........(2) \Rightarrow C_1 \ge \frac{25}{2}$$

وبناء على هذه النتائج نستطيع تحديد مدى الأمثلية لمعامل ($X_1$):

$$\frac{25}{2} \le C_1 \le 75$$

$$\frac{25}{2} \le X_1 \le 75$$

وهنا يعني أن الحل يبقى أمثل مادامت معامل ($X_1$) بين( 75) و(12,5).

✓ **مدى الأمثلية لـ** ($X_2$): نتبع نفس الخطوات نعيد حساب صف $\left(\Delta Z = C_J - Z_J\right)$، ونضع مكان المتغير ($X_2$) بـ $C_2$ :

| | $C_J$ | 20 | $C_2$ | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | B |
| 0 | $S_1$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{-7}{5}$ | $\frac{-1}{5}$ | 6 |
| $C_2$ | $X_2$ | 0 | 1 | 0 | $\frac{3}{5}$ | $\frac{-1}{5}$ | 6 |
| 20 | $X_1$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{-1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | 8 |
| $Z_J$ | | 20 | $C_2$ | 0 | $\frac{3C_2}{5}-4$ | $8-\frac{C_2}{5}$ | $Z=6C_2+160$ |
| $\Delta Z$ | | 0 | 0 | 0 | $4-\frac{3C_2}{5}$ | $\frac{C_2}{5}-8$ | |

من صف( $\Delta Z$ ) نختبر أمثلية الحل ونقوم بتكوين متراجحات من قيمة ( $\Delta Z$ ) التي تحتوي على $C_2$:

$$4-\frac{3C_2}{5}\leq 0.........(1)\Rightarrow C_1\geq\frac{20}{3}$$

$$\frac{C_2}{5}-8\leq 0.........(2)\Rightarrow C_2\leq 40$$

وبناء على هذه النتائج نستطيع تحديد مدى الأمثلية لمعامل ($X_2$):

$$\frac{20}{3}\leq C_2\leq 40$$

$$\frac{20}{3}\leq X_2\leq 40$$

وهنا يعني أن الحل يبقى أمثل مادامت معامل ($X_2$) بين( 40) و(6,66)، ولإثبات ذلك لما فرضنا( $X_2=45$ ) وهي خارج المجال الذي توصلنا إليه وبتالي جدول الحل غير أمثل.

2. لدينا ($b_2$) قد ازدادت بمقدار (3) ساعات من 20 ساعة إلى 23 ساعة عمل كيف تؤثر على قيمة (Z) التي تمثل الأرباح.

إيجاد قيم عمود الطرف الأيمن الجديد بإستحدام العلاقة السابقة:

$$NewB = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + (3)\begin{pmatrix} \frac{-7}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{-1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{39}{5} \\ \frac{37}{5} \end{pmatrix}$$

وبناء على القيم الجديدة للطرف الأيمن يتم إعادة حساب (Z) الجديدة:

$$Z = 20\left(\frac{37}{5}\right) + 25\left(\frac{39}{5}\right) = 343$$

سعر الظل لـ ($b_2$) هو (11) أي تزداد (Z) بـ (3X11=33) أي:

$$Z = 310 + 33 = 343$$

3. مدى الإمكانية:

✓ مدى الإمكانية للطرف الأيمن للقيد الأول والتي سنرمز لها بالرمز (**$b_1$**):

بما أن متغير الفجوة التابع للقيد الأول ضمن مزيج الحل الأساسي ( داخل في الحل) في جدول الحل الأمثل، فإن هذا يشير إلى وجود كمية إضافية من هذا المورد ويعني ذلك أن الحد الأعلى لمدى الإمكانية الخاص بهذا المورد (غير محدد) والحد الأدنى يساوي الكمية الأصلية للمورد مطروحاً منه قيمة متغير الفجوة التابع للقيد في الجدول الأمثل، نلاحظ أن متغير الفجوة التابع للمورد الأول($S_1$) هو متغير أساسي وقيمته (6)، فإن الحد الأعلى لمدى إمكانية ($b_1$) مفتوح وحده الأدنى يساوي الكمية الأصلية (40−6=34) ومنه مدى الإمكانية:

$$\mathbf{34 \le b_1 \le} \text{ غير محدد}$$

✓ مدى الإمكانية لـ ($b_2$):

أ. نجد مدى التغير ($\Delta b_2$) على النحو الآتي:

$$\Delta_1 b_2 = \frac{6}{\frac{-7}{5}} = \frac{-30}{7}$$

$$\Delta_2 b_2 = \frac{6}{\frac{3}{5}} = 10$$

$$\Delta_3 b_2 = \frac{8}{\frac{-1}{5}} = -40$$

ب. نجد المدى: إن الكمية الأصيلة للطرف الأيمن في القيد الثاني هي 20 وحدة، لذلك فإن المدى:

$$R_1 = 20 - \left(\frac{-30}{7}\right) = 24,28$$

$$R_2 == 20 - 10 = 10$$

$$R_3 = 20 - (-40) = 60$$

وبناء على النتائج السابقة فإن مدى الإمكانية للقيد الثاني هي:

$$\mathbf{10 \leq b_2 \leq 24,28}$$

✓ مدى الإمكانية لـ $(b_3)$:

أ. نجد مدى التغير $(\Delta b_3)$ على النحو الآتي:

$$\Delta_1 b_3 = \frac{6}{\frac{-1}{5}} = -30$$

$$\Delta_2 b_3 = \frac{6}{\frac{-1}{5}} = -30$$

$$\Delta_3 b_3 = \frac{8}{\frac{2}{5}} = 20$$

ب. نجد المدى: إن الكمية الأصيلة للطرف الأيمن في القيد الثالث هي 30 وحدة، لذلك فإن المدى:

$$R_1 = 30 - (-30) = 60$$

$$R_2 == 30 - (-30) = 60$$

$$R_3 = 30 - 20 = 10$$

وبناء على النتائج السابقة فإن مدى الإمكانية للقيد الثالث هي:

$$10 \leq b_3 \leq 60$$

**التمرين الثاني:** ليكن نموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$Max(z) = 10x_1 + 12x_2 + 6x_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 80 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 59 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 120 \end{cases}$$
$$x_1; x_2; x_3 \geq 0$$

**المطلوب:**

1. اوجد الحل الأمثل للبرنامج المقابل ؛
2. أوجد مدى الأمثلية لـ $X_3$ ؛
3. نفرض أننا أضفنا متغير جديد للمشكلة الأصلية معاملات المتغير في القيود الثلاثة هي : 2 ، 2 ، 2 أما معامله في دالة الهدف يساوي 12 ، أوجد القيم الجديدة لعمود المتغير الجديد في جدول الحل الأمثل؛
4. إذا فرضنا أن القيد الجديد سيكون كالآتي :

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 40$$

ما مدى تأثير هذا القيد على المشكلة .

**حل التمرين الثاني:**

1. الحل الأمثل للبرنامج الخطي:

أولاً: إيجاد الصيغة النموذجية:

القيد الأول: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + S_1 = 80$

القيد الثاني: $2x_1 + x_2 + x_3 + S_2 = 59$

القيد الثالث: $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + S_3 = 120$

معادلة دالة الهدف:

$$Max(z) = 10x_1 + 12x_2 + 6x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

ثانياً: إيجاد جدول الحل الأساسي الأول:

| $T_1$ | $C_J$ | 10 | 12 | 6 | 0 | 0 | 0 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | B | $\frac{B}{X_2}$ |
| 0 | $S_1$ | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 80 | 40 |
| 0 | $S_2$ | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 59 | 59 |
| 0 | $S_3$ | 3 | 5 | 4 | 0 | 0 | 1 | 120 | 24 |
| $Z_J$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 10 | 12 | 6 | 0 | 0 | 0 | Z=0 | |

المتغيرة الداخلة للأساس هي: ($X_2$) والخارجة من الأساس هي: ($S_3$)

| $T_2$ | $C_J$ | 10 | 12 | 6 | 0 | 0 | 0 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | B | $\frac{B}{X_1}$ |
| 0 | $S_1$ | $\frac{-1}{5}$ | 0 | $\frac{7}{5}$ | 1 | 0 | $\frac{-2}{5}$ | 32 | − |
| 0 | $S_2$ | $\frac{7}{5}$ | 0 | $\frac{1}{5}$ | 0 | 1 | $\frac{-1}{5}$ | 35 | 25 |
| 12 | $X_2$ | $\frac{3}{5}$ | 1 | $\frac{4}{5}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{5}$ | 24 | 40 |
| $Z_J$ | | $\frac{36}{5}$ | 12 | $\frac{48}{5}$ | 0 | 0 | $\frac{12}{5}$ | | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | $\frac{14}{5}$ | 0 | $\frac{-18}{5}$ | 0 | 0 | $\frac{-12}{5}$ | Z=288 | |

المتغيرة الداخلة للأساس هي: ($X_1$) والخارجة من الأساس هي: ($S_2$)

| $T_3$ | $C_J$ | 10 | 12 | 6 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | B |
| 0 | $S_1$ | 0 | 0 | $\frac{10}{7}$ | 1 | $\frac{1}{7}$ | $\frac{-3}{7}$ | 37 |
| 10 | $X_1$ | 1 | 0 | $\frac{1}{7}$ | 0 | $\frac{5}{7}$ | $\frac{-1}{7}$ | 25 |
| 12 | $X_2$ | 0 | 1 | $\frac{5}{7}$ | 0 | $\frac{-3}{7}$ | $\frac{2}{7}$ | 9 |
| $Z_J$ | | 10 | 12 | 10 | 0 | 2 | 2 | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 0 | 0 | −4 | 0 | −2 | −2 | Z=358 |

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \leq 0$ ومنه الجدول الثالث هو جدول الحل أمثل، والنتائج هي كالآتي:

$$X_1 = 25 ; X_2 = 9 ; X_3 = 0 ; S_1 = 37 ; S_2 = S_3 = 0 ; Z = 358$$

2. مدى الأمثلية لـ $(X_3)$:

بما أن المتغير $(X_3)$ غير أساسي عند الحل الأمثل ( غير داخل في الحل)، يتم تحديد مدى الأمثلية لمعامله في دالة الهدف بموجب القاعدة التالية:

قيمة $(Z)$ المقابلة له $\leq C_i \leq$ غير محدود

**10 $\leq X_3 \leq$ غير محدود**

3. إضافة متغير جديد $(X_4)$ وبربح مقداره 12 دينار وبمعاملات في القيود الثلاثة (2; 2; 2) على التوالي، فإن عملية حساب قيم عمود $(X_4)$ تتم كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{-3}{7} \\ 0 & \frac{5}{7} & \frac{-1}{7} \\ 0 & \frac{-3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{7} \\ \frac{8}{7} \\ \frac{-2}{7} \end{pmatrix}$$

نضع النتائج في جدول حل الأمثل يصبح كما يلي:

| $T_3$ | $C_J$ | 10 | 12 | 6 | 12 | 0 | 0 | 0 | B | $\frac{B}{X_4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | | |
| 0 | $S_1$ | 0 | 0 | $\frac{10}{7}$ | $\frac{10}{7}$ | 1 | $\frac{1}{7}$ | $\frac{-3}{7}$ | 37 | 25,9 |
| 10 | $X_1$ | 1 | 0 | $\frac{1}{7}$ | $\frac{8}{7}$ | 0 | $\frac{5}{7}$ | $\frac{-1}{7}$ | 25 | 21,87 |
| 12 | $X_2$ | 0 | 1 | $\frac{5}{7}$ | $\frac{-2}{7}$ | 0 | $\frac{-3}{7}$ | $\frac{2}{7}$ | 9 | – |
| $Z_J$ | | 10 | 12 | 10 | 8 | 0 | 2 | 2 | | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 0 | 0 | −4 | 4 | 0 | −2 | −2 | Z=358 | |

من خلال الجدول نلاحظ ليس كل $( \Delta Z \leq 0 )$ وهذا يعني أن الحل ليس أمثل ومزيج الحل الأساسي وقيمة الربح سوف تتغير، المتغيرة الداخلة $(X_4)$ والخارجة $(X_1)$ ويكون جدول الحل كالآتي:

| $T_4$ | $C_J$ | 10 | 12 | 6 | 12 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | B |
| 0 | $S_1$ | $\frac{-5}{4}$ | 0 | $\frac{5}{4}$ | 0 | 1 | $\frac{-3}{4}$ | $\frac{-1}{4}$ | $\frac{23}{4}$ |
| 12 | $X_4$ | $\frac{7}{8}$ | 0 | $\frac{1}{8}$ | 1 | 0 | $\frac{5}{8}$ | $\frac{-1}{8}$ | $\frac{175}{8}$ |
| 12 | $X_2$ | $\frac{1}{4}$ | 1 | $\frac{3}{4}$ | 0 | 0 | $\frac{-1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{61}{4}$ |
| $Z_J$ | | $\frac{27}{2}$ | 12 | $\frac{21}{2}$ | 12 | 0 | $\frac{9}{2}$ | $\frac{9}{2}$ | $Z=\frac{891}{2}$ |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | $\frac{-7}{2}$ | **0** | $\frac{-9}{2}$ | 0 | 0 | $\frac{-9}{2}$ | $\frac{-3}{2}$ | |

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \le 0$ ومنه الجدول الرابع هو جدول حل أمثل، ونتائجه هي كالآتي:

$$X_2=\frac{61}{4};X_4=\frac{23}{2};X_1=X_3=0;S_1=\frac{23}{4};S_2=S_3=0;Z=\frac{891}{2}$$

4. القيد الجديد:

$$x_1+x_2+x_3\le 40$$

✓ نحول القيد الجديد إلى الصيغة النموذجية:

$$x_1+x_2+x_3+S_4=40$$

إن متغير الفجوة ( $S_4$ ) يكون عند الحل الأولي متغير أساسي داخل في الحل وتكون قيم صفه المقابلة للمتغيرات الأخرى هي على النحو الأتي:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 40\end{pmatrix}$$

يبين جدول الحل الأمثل أن ($X_1$) و ($X_2$) داخل الحل، لذلك نطبق على صف متغير الفجوة ($S_4$) القاعدة بكيفية إيجاد قيم صف المتغيرات الأخرى عند دخول أحدها في الحل فنقوم بإيجاد تأثير دخول المتغيرتين ($X_1$) و ($X_2$) على الصف ($S_4$) الجديد معتمدين على نتائج الحل النهائي قبل إضافة القيد وعلى النحو الآتي:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 40 \end{pmatrix} - \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{7} \\ 0 \\ \frac{5}{7} \\ \frac{-1}{7} \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{5}{7} \\ 0 \\ \frac{-3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{11}{7} \\ 0 \\ \frac{-8}{7} \\ \frac{3}{7} \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

وبناء على هذه النتائج يكون جدول الحل الأمثل على النحو الآتي:

| $T_3$ | $C_J$ | 10 | 12 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **CB** | **XB** | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | **B** |
| **0** | $S_1$ | 0 | 0 | $\frac{10}{7}$ | 1 | $\frac{1}{7}$ | $\frac{-3}{7}$ | 0 | 37 |
| **10** | $X_1$ | 1 | 0 | $\frac{1}{7}$ | 0 | $\frac{5}{7}$ | $\frac{-1}{7}$ | 0 | 25 |
| **12** | $X_2$ | 0 | 1 | $\frac{5}{7}$ | 0 | $\frac{-3}{7}$ | $\frac{2}{7}$ | 0 | 9 |
| **0** | $S_4$ | 0 | 0 | $\frac{11}{7}$ | 0 | $\frac{-8}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | 1 | 6 |
| $Z_J$ | | 10 | 12 | 10 | 0 | 2 | 2 | 0 | |
| $\Delta Z = C_J - Z_J$ | | 0 | **0** | −4 | **0** | **−2** | −2 | **0** | **Z=358** |

من خلال الجدول نلاحظ أن كل ( $\Delta Z \leq 0$ ) وهذا يعني أن الحل الأمثل لكن مزيج الحل الأساسي قد تغير بإضافة متغير الفجوة ($S_4$) إلى الحل ولكن قيمة الربح لم تتغير، ولكن هذه الحالة ليست دائما.

يمكن التأكد من القيد هل هو قيداً فائضاً ( لا يؤثر على الحل) أو قيد لا يتحقق.

فمثلا بالعودة للقيد المضاف السابق:

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 40$$

بتعويض قيم ($X_1$ ;$X_2$ ;$X_3$) نحصل على:

$$(25) + (9) + (0) = 34 \prec 40$$

نجد أن القيد يتحقق، وعليه يمكن اعتبار هذا القيد قيداً فائضا لا تأثير له على الحل.

## VII– تمارين مقترحة

**التمرين الأول:** لتكن لدينا المشكلة الآتية :

$$Max(z) = 30x_1 + 50x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_1 + 2x_2 \le 11 \\ x_1 + 3x_2 \le 15 \end{cases}$$
$$x_1 ; x_2 \ge 0$$

**المطلوب :**

1. اوجد الحل الأمثل للبرنامج السابق ؛
2. نفرض أن دالة الهدف للمشكلة قد تغيرت إلى :
$$Max(z) = 35x_1 + 55x_2$$
استخرج جدول الحل الأمثل لهذه المشكلة ؛
3. حدد مدى الأمثلية لمعامل $(X_1)$ و $(X_2)$ ؛
4. نفرض أن الجانب الأيمن للمشكلة قد تغير إلى ( 20 ، 11 ، 15 ) على التوالي ؛ أوجد القيم الجديدة للطرف الأيمن وإعادة احتساب قيمة Z ؛
5. أوجد مدى الإمكانية لكل من $b_1$ , $b_2$ , $b_3$ ؛
6. نفرض أننا أضفنا متغير جديد للمشكلة الأصلية معاملات المتغير في القيود الثلاثة هي: ( 4 ، 2 ، 3 ) أما معامله في دالة الهدف يساوي 40 ، أوجد القيم الجديدة لعمود المتغير الجديد في جدول الحل الأمثل ؛
7. إذا فرضنا أن القيد الجديد سيكون كالآتي :
$$x_1 + 4x_2 \le 13$$
ما مدى تأثير هذا القيد على المشكلة .

**التمرين الثاني:** أفرض أن مشكلة البرمجة الخطية الآتية و أن الجدول الذي يعطي الحل الأمثل هو:

$$Max(z) = 4x_1 + 5x_2 + 5x_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 430 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 460 \\ x_1 + 4x_2 \le 420 \end{cases}$$
$$x_1 ; x_2 ; x_3 \ge 0$$

| XB | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_2$ | −1/4 | 1 | 0 | 1/2 | −1/4 | 0 | 100 |
| $X_3$ | 3/4 | 0 | 1 | 0 | 1/2 | 0 | 230 |
| $S_3$ | 2 | 0 | 0 | − 2 | 1 | 1 | 20 |

**المطلوب :**

1. نفرض أن المورد الثالث انخفض من (420) إلى (400)، أوجد القيم الجديدة للطرف الأيمن وإعادة احتساب قيمة (z).

2. إذا فرضنا أن القيد الجديد سيكون كالأتي :

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 600$$

ما مدى تأثير القيد على المشكلة .

**التمرين الثالث:** قام مدير العمليات في مؤسسة س لصناعة البرمجيات ببناء نموذج البرمجة الخطية الذي يهدف إلى مساعدة المؤسسة في تخفيض تكاليف إنتاج نوعين من البرمجيات ، وفيما يلي جدول الحل الأمثل لهذه المشكلة :

$$Min(z) = 5x_1 + 6x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1000 \\ x_1 \leq 300 \\ x_2 \leq 150 \end{cases}$$

$$x_1 ; x_2 \geq 0$$

| ***Cj*** | | 5 | 6 | 0 | 0 | M | M | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***CB*** | ***XB*** | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | $A_2$ | ***b*** |
| 0 | $S_1$ | 0 | 0 | −1 | 1 | 1 | −1 | 550 |
| 5 | $X_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 300 |
| 6 | $X_2$ | 0 | 1 | −1 | 0 | 1 | 0 | 700 |
| ***Zj*** | | 5 | 6 | −1 | 0 | 6 | 0 | ***Z = 5700*** |
| ∆ Z | | 0 | 0 | 1 | 0 | M−6 | M | |

**المطلوب :**

1. حدد مدى الأمثلية لمعامل $(X_1)$ و $(X_2)$ ؛
2. أوجد مدى الإمكانية لكل من $b_1$ , $b_2$ , $b_3$ .